Bsc algebra2 alapszintű gyakorlat

Hetedik alkalom (2007. április 11–17)

4.3.29. *Határozzuk meg a* $\mathbb{Z}_m^+$ *és* $\mathbb{Z}_m^\times$ *csoportok elemeinek a rendjeit, ahol* $m = 7, 8, 12$.

4.3.30. *Határozzuk meg a* g *elem rendjét a* G *csoportban, ha* $G = \mathbb{R}^+$, $g = -1$; $G = \mathbb{R}^\times$, $g = -1$; $G = \mathbb{Z}_{19}^+$, $g = 17$; $G = \mathbb{Z}_{19}^\times$, $g = 17$; $G = \mathbb{Z}_{32}^+$, $g = 3$; $G = \mathbb{Z}_{32}^\times$, $g = 3$; $G = \mathbb{Z}_{11}[x]^+$, $g = x + 1$; $G = \mathbb{Z}_{11}[x]^\times$, $g = 5$.

4.3.11. *Mi a sík egybevágósági transzformációinak a rendje?*

4.3.31. *Adjuk meg a VI. feladatsor 2. feladatában (4.2.25) lévő permutációk rendjeit.*

4.3.32. *Hány* n *hosszú ciklus van* S_n*-ben?*

4.3.33. *Hány* 2, 3, 4, 5, 6, *illetve* 12 *rendű elem van* A_7*-ben?*

4.3.39. *Mutassuk meg, hogy ha* g *és* h *relatív prím rendű, fölcserélhető elemei egy csoportnak, akkor* $o(gh) = o(g)o(h)$. *Elhagyható-e a két feltétel valamelyike?*

4.3.40. *Bizonyítsuk be, hogy ha a* G *csoport minden elemének a négyzete az egységelem, akkor* G *kommutatív. Igaz-e az állítás négyzet helyett negyedik hatványra?*

4.3.41*. *Mutassuk meg, hogy* $(a^n - 1, a^m - 1) = a^{(n,m)} - 1$ *(*a, n, m *pozitív egész).*

4.3.34. *Igazoljuk, hogy ha egy* g *csoportelem rendje* n, *és* $m \mid n$, *akkor* $o\big(g^{n/m}\big) = m$. *Legyen* G *csoport, amelynek elemszáma véges, és legalább kettő. Mutassuk meg, hogy* G*-ben van prímrendű elem.*

4.3.36. *Legyen* g *egy* n*-edrendű eleme a* G *csoportnak és* $g = h^m$, *ahol* $m \mid n$. *Határozzuk meg* h *rendjét.*

4.3.37. *Igaz-e tetszőleges* G *csoportban, hogy ha* G*-ben van* d *rendű elem, akkor ezek száma legalább* $\varphi(d)$*? És az, hogy pontosan* $\varphi(d)$*?*

4.3.38. *Mutassuk meg, hogy a 3-hatványadik komplex egységgyökök csoportot alkotnak a szorzásra. Ciklikus-e ez a csoport?*

4.3.21. *Ciklikus-e a* $\mathbb{Z}_{17}^\times$ *csoport?*

4.3.18. *Határozzuk meg a* $\mathbb{Z}^+$ *és a* $\mathbb{Z}_{12}^+$ *csoportok összes generátorelemét.*

4.4.25. *Határozzuk meg Lagrange tételének felhasználásával az* S_3, $\mathbb{Z}_{12}^+$ *és a* $\mathbb{Z}_{12}^\times$ *csoportok összes részcsoportját, valamint az* A_4 *alternáló csoport összes negyedrendű részcsoportját.*

4.4.15. *Adjuk meg az* S_3 *szimmetrikus csoportban a* $H = \{id, (12)\}$ *részcsoport szerinti bal és jobb oldali mellékosztályokat, és igazoljuk, hogy* $(123)H \neq H(123)$.

4.4.17. *Jelölje* $n\mathbb{Z}^+$ *az* n*-nel osztható egészekből álló részcsoportot* $\mathbb{Z}^+$*-ban. Igazoljuk, hogy* $|\mathbb{Z}^+ : n\mathbb{Z}^+| = n$.

4.4.26. *Mutassuk meg, hogy a sík, illetve a körvonal egybevágósági transzformációinak csoportjában is a mozgások részcsoportjának indexe* 2.

4.4.32*. *Igazoljuk, hogy egy véges csoport rendje pontosan akkor páros, ha van másodrendű eleme.*

IHF. *Adjuk meg* $\mathbb{Z}_{24}^\times$ *elemeinek rendjét. Van-e* 4, *illetve* 6 *elemű nem ciklikus részcsoport?*