Bsc algebra2 alapszintű gyakorlat

Hatodik alkalom (2007. március 26–29)

4.2.18. *Mutassuk meg, hogy* $(123) = (231)$, *sőt általában egy ciklust bármelyik eleménél kezdve ugyanazt a permutációt kapjuk.*

4.2.25. *Adjuk meg az alábbi hat permutáció ciklusfelbontását és előjelét.*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 8 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 6 & 4 & 8 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ c & a & e & b & d \end{bmatrix}$$

$$(1234)(35)(1432)(35)\,, \quad (12345)(234)(12345)^{-1}\,, \quad [(12)(23)(34)]^{1222}\,.$$

Tegyük meg ugyanezt az $\{1, 2, \ldots, n\}$ *halmaz „hátulról előre” permutációjával is.*

4.2.23. *Igazoljuk, hogy* $(x_1 \ldots x_k) = (x_1x_2)(x_2x_3)\ldots(x_{k-2}x_{k-1})(x_{k-1}x_k)$.

4.2.26. *Legyen* $f = (12)(345)$. *Hány különböző hatványa van ennek a permutációnak? Melyik a legkisebb hatványa, ami az egységelemet adja? Mely* k *és* ℓ *egészekre lesz* $f^k = f^\ell$*?*

4.8.14. *Mutassuk meg, hogy ha* $(x_1 \ldots x_k)$ *egy ciklus az* S_n *csoportban, és* $f \in S_n$, *akkor* $f \circ \big(x_1 \ldots x_k\big) \circ f^{-1} = \big(f(x_1) \ldots f(x_k)\big)$.

4.2.31*. *Mely* $f \in S_n$ *permutációk cserélhetők föl az* $(1, 2, \ldots, n)$ *ciklussal?*

4.2.32*. *Igazoljuk, hogy egy permutáció pontosan akkor hatványa egy ciklusnak, ha diszjunkt ciklusfelbontásában a ciklusok hossza azonos (az egyelemű ciklusokat nem írjuk ki).*

4.2.34*. *Mutassuk meg, hogy* S_n *valamennyi eleme előáll legfeljebb* $n-1$ *darab transzpozíció szorzataként. Van-e olyan elem, amihez* $n-1$ *transzpozíciónál kevesebb nem elegendő?*

4.2.30*. *Igazoljuk, hogy minden páros permutáció előáll hármasciklusok szorzataként.*

2.2.8. *Mutassuk meg, hogy tetszőleges műveletre nézve legfeljebb egy neutrális elem lehet.*

2.2.10. *Igazoljuk, hogy asszociatív műveletnél minden elemnek csak egy inverze lehet.*

4.1.1. *Mutassuk meg, hogy minden csoportban érvényes az* **egyszerűsítési szabály**, *vagyis az* $ag = bg$, *illetve* $ga = gb$ *egyenlőségek bármelyikéből* $a = b$ *következik.*

4.1.15. *Ha* f *és* g *transzformációk, milyen kapcsolatban állnak* f *és* gfg^{-1} *fixpontjai?*

4.1.16. *Legyen* r *a* $\overrightarrow{PP'}$ *eltolás a síkon. Igazoljuk, hogy ha* g *tetszőleges egybevágóság, akkor* grg^{-1} *a* $\overrightarrow{g(P)g(P')}$ *eltolás.*

4.1.17. *Legyen* t *az* e *egyenesre való tükrözés. Igazoljuk, hogy ha* g *tetszőleges egybevágóság, akkor* gtg^{-1} *a* $g(e)$ *egyenesre való tükrözés.*

4.1.18. *Legyen* f *a* P *pont körüli* α *szögű forgatás a síkon. Igazoljuk, hogy ha* g *tetszőleges egybevágóság, akkor* gfg^{-1} *forgatás* $g(P)$ *körül, mégpedig* α *szöggel, ha* g *mozgás, és* $-\alpha$ *szöggel egyébként.*

4.1.36. *Tegyük föl, hogy* f *és* g *fölcserélhető transzformációk az* X *halmazon. Mutassuk meg, hogy* f *a* g *fixpontjainak halmazát önmagára képzi.*

4.1.37. *Mikor fölcserélhető két egyenesre tükrözés a síkon?*

4.1.39*. *A tér mely egybevágóságainak a négyzete az identitás?*