Bsc algebra2 alapszintű gyakorlat

Ötödik alkalom (2007. március 12–22)

1. *Melyek azok a lineáris transzformációk a síkon, melyeknek minimálpolinomja elsőfokú? Melyek azok, amelyeknek a minimálpolinomja és a karakterisztikus polinomja különböző?*

2. *Határozzuk meg egy általános diagonális mátrix minimálpolinomját.*

3. *Oldjuk meg* $\mathbb{Q}^{2\times 2}$*-ben az* $X^4 = 2X$ *egyenletet.*

4. *Adjuk meg az alábbi mátrixok Jordan-alakját.*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -3 & -4 & 1 \\ 6 & 9 & -2 \\ 15 & 24 & -5 \end{pmatrix}$$

5. *Bizonyítsuk be, hogy ha* M *komplex elemű mátrix, akkor* $n \to \infty$ *esetén* M^n *akkor és csak akkor tart nullához, ha* M *minden sajátértékének az abszolút értéke* 1*-nél kisebb.*

6. *Az alábbi sorozatok általános elemét írjuk fel a mátrixhatványozás segítségével, majd a mátrixot diagonalizálva adjunk az eredményre explicit képletet.*
a) $a_0 = a_1 = 1$, $a_k = a_{k-1} + a_{k-2}$ *(Fibonacci-sorozat).*
b) $a_0 = 5$, $a_1 = 6$, $a_2 = 10$, $a_k = 2a_{k-1} - a_{k-2} + 2a_{k-3}$.

7. *Adjunk explicit képletet az* a_k *és* b_k *számokra, amelyek rekurzív definíciója a következő:* $a_0 = 1$, $b_0 = 1$, $a_{k+1} = 2a_k + b_k$, $b_{k+1} = 2b_k - a_k$ $(k \geq 0)$.

IHF. *Egy város lakásait három kategóriába sorolják állapotuk szerint: elhanyagolt, átlagos, és kitűnő. A jelenlegi finanszírozási lehetőségek mellett az éves statisztikák azt mutatják, hogy az elhanyagolt lakások* 60 *százaléka elhanyagolt marad az év végére is,* 30 *százalékukat felújítják átlagos állapotúra, a maradék* 10 *százalékot pedig kitűnő állapotúra. Az átlagos állapotú lakások* 20 *százaléka leromlik elhanyagoltra,* 70 *százaléka marad átlagos állapotú, a maradék* 10 *százalékot pedig felújítják. Végül a kitűnő állapotú lakások* 80 *százaléka kitűnő állapotban marad, a maradék* 20 *százalék pedig leromlik átlagosra az év végére. Hosszú távon mi lesz a lakások állapotának eloszlása?*

8. *Legyen* T *a sík egy transzformációja, ami nem nyújtás. Igazoljuk, hogy ha* T *diagonalizálható, akkor négy invariáns altere van, ha nincs valós sajátértéke, akkor kettő, különben pedig három. Adjunk meg a térben egy olyan lineáris transzformációt, melynek van olyan kétdimenziós invariáns altere, ami nem sajátaltér.*

9. *Melyek azok a transzformációk, melyekre minden altér invariáns?*

10. *Mutassuk meg, hogy ha* $AB = BA$*, akkor* A *minden sajátaltere, továbbá* $\mathrm{Im}(A)$ *és* $\mathrm{Ker}(A)$ *is* B*-invariáns altér.*

11. *Igazoljuk, hogy ha* M *invertálható mátrix, akkor* M^{-1} *polinomja* M*-nek.*

12*. *Igazoljuk, hogy egy* $\mathbb{Q}^{n\times n}$*-beli mátrix minimálpolinomja ugyanaz* $\mathbb{Q}$ *és* $\mathbb{C}$ *felett.*

13*. *Legyen* A *egy* $n \times n$*-es nilpotens mátrix. Igazoljuk, hogy* $A^n = 0$.

14*. *Mutassuk meg, hogy egy komplex elemű négyzetes mátrix akkor és csak akkor nilpotens, ha minden hatványának nulla a nyoma. Az első hány hatványra kell ezt feltenni?*