Bsc algebra2 alapszintű gyakorlat

Negyedik alkalom (2007. március 5–8)

1. *Határozzuk meg az alábbi lineáris transzformációk illetve mátrixok sajátértékeit, sajátaltereit, karakterisztikus polinomját, minimálpolinomját, és Jordan-alakját.*

a) *Az alábbi mátrixok* $\mathbb{R}$ *illetve* $\mathbb{C}$ *felett:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

Melyek diagonalizálhatóak? Számítsuk ki az utolsó két mátrix n-edik hatványát.

b) *A vektortér a sík* $\mathbb{R}$ *felett, a transzformáció pedig az* $y = x$ *egyenesre való tükrözés; az erre az egyenesre való, függőleges irányú vetítés; az origó körüli* α *szögű forgatás.*

IHF *A transzformáció a deriválás az* $\mathbb{R}[x]$ *legfeljebb másodfokú elemeinek vektorterén.*

2. *Legyen A egybevágósági transzformáció a térben, mely a P pontot helyben hagyja. Igazoljuk, hogy van olyan $Q \neq P$ pont, melyet A vagy helyben hagy, vagy P-re tükröz.*

3. *Milyen kapcsolatban állnak az M karakterisztikus polinomjának együtthatói M nyomával illetve determinánsával? Mutassuk meg, hogy ha M-nek n különböző sajátértéke van, akkor ezek összege az M nyoma, szorzatuk az M determinánsa.*

4. *Melyek igazak az alábbi állítások közül?*

a) *Ha λ sajátértéke A-nak, akkor λ^2 sajátértéke A^2-nek.*

b) *Ha λ^2 sajátértéke A^2-nek, akkor λ sajátértéke A-nak.*

c) *Ha 0 sajátértéke A^2-nek, akkor 0 sajátértéke A-nak.*

5. *Igazoljuk, hogy ha a λ sajátértékhez tartozó sajátaltér k dimenziós, akkor λ legalább k-szoros gyöke a karakterisztikus polinomnak. Teljesül-e mindig az egyenlőség? Igaz-e, hogy a diagonalizálhatóság azzal ekvivalens, hogy a sajátalterek összege az egész tér?*

6. *Határozzuk meg az* $\{x^2+2x+2,\ 2x^2-3x+6,\ 3x^2-8x+10\}$ *polinomrendszer rangját.*

7. *Igazoljuk, hogy ha A és B összeadható lineáris leképzések, akkor $r(A+B) \leq r(A)+r(B)$. Adjunk példát arra az esetre, amikor egyenlőség áll, és arra is, amikor nem.*

8. *Legyenek $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ és $B \in \mathrm{Hom}(U, V)$. Igazoljuk, hogy $\mathrm{Im}(AB) \subseteq \mathrm{Im}(A)$, $\mathrm{Ker}(AB) \supseteq \mathrm{Ker}(B)$ és $r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$.*

9. *Éjfélkor a hétfejű sárkány megjelent a királylánynál, felírt egy 8 rangú, 13×21-es valós mátrixot, és a következőket mondta. „Minden reggel megváltoztathatod a mátrix egy elemét. Én minden éjjel eljövök, és én is megváltoztathatom a mátrix egy elemét. Ha a mátrix rangja hét lesz, akkor felfallak." Érdemes-e a királylánynak algebrát tanulni?*

A királylány huga már tökéletesen tudja az algebrát, a sárkány őt is meglátogatta. „Neked egy 8 rangú 8×8-as mátrixot kell most azonnal felírnod. Minden reggel meg kell változtatnod a mátrix egy elemét (tehát a most felírt mátrixot már holnap reggel is). Én minden éjjel eljövök, és én is megváltoztatom a mátrix egy elemét. Mindketten mindig kötelesek vagyunk egy-egy elemet ténylegesen meg is változtatni. Ha a mátrix rangját hétté tudom tenni, akkor felfallak." A királylány huga életben maradt-e?