

Bsc algebra2 alapszintű gyakorlat

Második alkalom (2007. február 19–22)

1. Az alábbiak közül melyek bázisok és melyek ortonormáltak is \mathbb{R}^2 -ben? (Helytakarékosság végett oszlopvektorok helyett sorvektorok szerepelnek.)

- a) $(1, 1)$ és $(2, 2)$.
- b) $(0, 1)$ és $(1, 1)$.
- c) $(1, 1)$ és $(1, -1)$.
- d) $(1, 1)/\sqrt{2}$ és $(1, -1)/\sqrt{2}$.

Írjuk föl az $(1, 2)$ koordinátáit a b)- és d)-beli bázisban is.

2. Határozzuk meg az alábbi vektorterek dimenzióját.

- a) A komplex számok vektortere \mathbb{R} felett.
- b) A legfeljebb n -edfokú T feletti polinomok a T test felett.
- c) A $T^{2 \times 3}$ a T test felett.
- d) A legfeljebb n -edfokú \mathbb{C} feletti polinomok \mathbb{R} felett. Mi általában az összefüggés egy vektortér \mathbb{R} és \mathbb{C} feletti dimenziója között?
- e) Azon legfeljebb n -edfokú \mathbb{Q} feletti polinomok \mathbb{Q} felett, melyeknek 2 gyöke.
- f) Az \mathbb{R}^n azon elemei \mathbb{R} felett, ahol az első koordináta is, a koordináták összege is 0.
- g) A $T^{n \times n}$ (főátlóra) szimmetrikus mátrixai a T test felett.

3. Mutassuk meg, hogy $n \geq 2$ esetén minden \mathbb{R} feletti n -dimenziós vektortérnek végtelen sok $n - 1$ -dimenziós altere van.

4. Legyen V véges dimenziós vektortér, és U, W alterek V -ben. Bizonyítsuk be, hogy $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$.

5. Egy tízdimenziós térben kiválasztunk három kilencdimenziós alteret. Mekkora lehet a metszetük dimenziója? Adjunk példát minden lehetséges értékre.

6. Mutassuk meg, hogy ha egy \mathbb{R} feletti vektortérnek véges sok altere van, akkor az alterek száma 1 vagy 2. Milyen T testek felett igaz még ez az állítás?

7. A \mathbb{Z}_2^3 vektortérben hány direkt kiegészítő altere van egy egydimenziós altérnek?

8. Ha egy V vektortér vektoraira $a \notin \langle b, c \rangle$, $b \notin \langle a, c \rangle$ és $c \in \langle a, b \rangle$, akkor mi a c ?

9. Lineárisan függetlenek-e az origóra tükrözés, az x -tengelyre tükrözés és az y -tengelyre tükrözés?

10. Adjunk meg olyan A és B lineáris transzformációkat egy alkalmas V vektortéren, melyekre $AB = I$ (az identitás), de BA nem az.

11*. A szultán gondolt \mathbb{R}^{1001} -ben egy bázist, amit Seherezádénak 1001 éjszaka alatt ki kell találnia, különben kivégzik. Éjszakánként egy általa választott vektorról megkérdezheti, hogy mik a koordinátái. Életben marad-e Seherezádé? Mi a helyzet akkor, ha mindig csak az első koordinátára kérdezhet rá, és a kegyelem feltétele az első bázisvektor kitalálása?

IHF. Hánydimenziós $\mathbb{R}[x]$ -nek az az altere, amit az $x - 1$, $x^2 - 3x + 2$ és $x^2 - 6x + 5$ polinomok (együtt) generálnak?