

## Bsc algebra2 alapszintű gyakorlat

Első alkalom (2007. február 12–15)

1. Lineárisan függetlenek-e az alábbi vektorrendszerek? Mennyi a rangjuk?
  - a) Az  $\mathbb{R}$  feletti  $\mathbb{R}[x]$  vektortérben  $\{1, x, x^2\}$ ,  $\{x, 2x, x^2, x^3\}$ ,  $\{1 + x, 1 + 2x, 1 + 3x\}$ ,  $\{1 + x, 1 + x^2, x + x^2\}$ .
  - b) Az  $\mathbb{R}$  feletti  $\mathbb{C}$  vektortérben tetszőleges három komplex szám.
2. Igazoljuk az alábbiakat.
  - a) Ha egy vektorrendszerben szerepel a nullvektor, akkor az nem lehet független.
  - b)  $\{v\}$  akkor és csak akkor független, ha  $v \neq 0$ .
  - c) Ha  $\{v_1, v_2, v_3\}$  független, akkor  $\{v_1 + v_2, v_2, v_3\}$  is független.
  - d) Páronként különböző fokú polinomok rendszere mindig független.
3. Altér-e a  $W$  halmaz a  $V$  vektortérben az alábbi esetekben?
  - a)  $V = T[x]$  a  $T$  test felett,  $W$  a páros fokú polinomok, és a zéruspolinom.
  - b)  $V = T[x]$  a  $T$  test felett,  $W$  a legfeljebb tizedfokú polinomok, és a zéruspolinom.
  - c)  $V$  a komplex számok vektortere  $\mathbb{R}$  illetve  $\mathbb{C}$  felett, és  $W = \{z \mid \operatorname{Re}(z) = 0\}$ .
  - d)  $V$  a sík  $\mathbb{R}$  felett,  $W$  pedig az első és harmadik síknegyed uniója.
4. Igaz-e  $\mathbb{R}$  felett, hogy  $x \in \langle x^2 - 1, x^2 - 2, 3x + 2 \rangle$ ? És  $\langle x, x^2 + 2, x + 2 \rangle = \langle 1, x + 1, x^2 + 1 \rangle$ ?
5. Legyen  $V$  a sík (helyvektorai), mint  $\mathbb{R}$  feletti vektortér.
  - a) Milyen alakzatot alkothat egy 1 illetve 2 elemmel generált altér?
  - b) Igazoljuk, hogy minden altér generálható két elemmel, és adjuk meg az összes alteret.
  - c) Hány altere van a  $\mathbb{Z}_2$  test feletti  $\mathbb{Z}_2^2$  és  $\mathbb{Z}_2^3$  vektortereknek? És a  $\mathbb{Z}_7$  feletti  $\mathbb{Z}_7^2$ -nek?
6. Határozzuk meg a térben az  $(0, 1, 1)$  és  $(1, 0, 1)$  helyvektorok szögét.
7. Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test felett.
  - a) Mi az üres halmaz által generált altér?
  - b) Mutassuk meg, hogy egy 1 elemmel generált altérnek legfeljebb két altere lehet.
  - c) Mikor lesz két altér uniója is altér?
8. Legyen  $W$  altere az  $\mathbb{R}$  feletti  $V$  vektortérnek, és  $u, v \in V$ . Tegyük fel, hogy  $2u + 6v \in W$  és  $3u + v \in W$ . Következik-e ebből, hogy  $u, v \in W$ ?
9. Az alábbi állítások közül melyek igazak egy  $n$ -dimenziós  $V$  vektortérben?
  - a) Ha  $F$  független is és generátorrendszer is, akkor  $F$  maximális független részhalmaz.
  - b) Ha  $F$  maximális független, akkor generátorrendszer.
  - c) Ha  $G$  minimális generátorrendszer, akkor független.
  - d) Bármely két generátorrendszer egyenlő elemszámú.
  - e) Bármely két minimális generátorrendszer egyenlő elemszámú.
  - f) Ha  $F$  elemszáma  $n$ , és független, akkor generátorrendszer (bázis) is.
  - g) Ha  $G$  elemszáma  $n$ , és generátorrendszer, akkor független (bázis) is.
  - h) Bármely  $n$  elemű részhalmaz generátorrendszer.
  - i) Van olyan  $n + 1$  elemű részhalmaz, ami generátorrendszer.

**IHF.** Tegyük fel, hogy egy vektortér  $a, b, c, d$  vektoraira  $\{a, b, d\}$ ,  $\{a, c, d\}$ ,  $\{b, c, d\}$  mindegyike összefüggő, de  $\{a, b, c\}$  független. Határozzuk meg  $d$ -t.