Bsc algebra3 tanár gyakorlat

Utolsó alkalom (2007. december 14.)

84. *Mutassuk meg, hogy egy p^k elemű testben szabad tagonként p-edik hatványra emelni, azaz $(a+b)^p = a^p + b^p$.*

85. *Lássuk be, hogy egy n elemű test elemei éppen az $x^n - x$ polinom gyökei.*

86. *Mivel egyenlő egy véges test összes nemnulla elemének a szorzata, illetve összege?*

87. *Hány részteste van a 3^{101} elemű testnek?*

88. *Adjuk meg a 25 elemű testet.*

89. *Legyen p prím, $m = p^2-1$, és tekintsük az $a_1, \ldots, a_k$ számokból képzett összes kéttagú összeget. Mekkora lehet maximálisan a k, hogy (az a_i-ket alkalmasan megválasztva) ezek az összegek csupa különböző maradékot adjanak m-mel osztva?*

Útmutatás: Legyen α a p^2 elemű test multiplikatív csoportjának (egyik) generátoreleme, és írjuk fel az $\alpha + je$ elemeket α hatványaként (e a test egységeleme, $j = 0, 1, \ldots, p-1$). Ekkor a kitevők halmaza rendelkezik az előírt tulajdonsággal.

A 82. feladat megoldása. A háromszög csúcsait, oldalait, szögeit a szokásos módon jelöljük. Elemi geometriával látható, hogy a megadott szakaszok hossza $u = R\cos\alpha$, $v = R\cos\beta$, $w = R\cos\gamma$, ahol R a körülírt kör sugara.

Belátjuk, hogy $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1$ (minden háromszögben). Ez az addíciós képletből is kihozható, hiszen $\cos\gamma = -\cos(\alpha+\beta)$, de elegánsabb a következő. Mindegyik oldalt felírjuk, mint a másik kettő vetületének az összegét:

$$\begin{aligned}
a\cdot(-1) + b\cos\gamma \quad + c\cos\beta \quad &= 0\\
a\cos\gamma \quad + b\cdot(-1) + c\cos\alpha \quad &= 0\\
a\cos\beta \quad + b\cos\alpha \quad + c\cdot(-1) &= 0
\end{aligned}$$

Ez homogén lineáris egyenletrendszer az a, b, c ismeretlenekre, melynek van nemtriviális megoldása, és így a determinánsa nulla, ami pont a kívánt azonosságot adja.

Így $R(u^2+v^2+w^2) + 2uvw = R^3$, ami harmadfokú egyenlet R-re. Ha például $u = 1$, $v = 2$, $w = 5$, akkor ez $x^3 - 30x - 20$, ami a Schönemann–Eisenstein miatt irreducibilis, így egyetlen pozitív gyöke (is) harmadfokú szám. Ez az $R \approx 5{,}78426$ érték tényleg megoldáshoz vezet, hiszen a három koszinuszra 0 és 1 közötti szám adódik, azaz van ilyen háromszög. Tehát az általános eset nem szerkeszthető.

Ha azonban a háromszög egyenlő szárú, azaz $a = b$ és így $u = v$, akkor ez a polinom felbomlik $R^3 - R(u^2+v^2+w^2) - 2uvw = (R+w)(R^2 - wR - 2u^2)$ alakban, és ezért a gyökei legfeljebb másodfokúak, azaz szerkeszthetők.