

Bsc algebra3 tanár gyakorlat
Második alkalom (2007. szeptember 21.)

Átnézendő a 09/25-i előadásra: egész együtthatós polinomok számelmélete. Az alábbi feladatokban $\alpha = a + bi$, ahol $a, b \in \mathbb{Z}$.

1. Az alábbi állításokról vizsgáljuk meg, igazak-e a Gauss-egészek gyűrűjében.
 - a) $2 + 3i \mid 7i - 4$.
 - b) $3 + 4i$ és $4 - 3i$ egymás egységszeresei.
2. Hogyan olvasható le a és b , illetve $N(\alpha)$ alapján, hogy $1 - i \mid \alpha$?
3. Az $1 + i$, $2 + i$, $3 + 4i$, 2 , 3 , 5 számok közül melyek felbonthatatlanok \mathbb{G} -ben?
4. Igazoljuk háromféleképpen is, hogy α Gauss-prím $\iff \bar{\alpha}$ Gauss-prím.
5. Bontsuk fel a 14 , 20 , 30 , $90 - 1230i$ számokat \mathbb{G} -ben az alaptétel szerint.
6. Teljes hatodik hatvány-e \mathbb{G} -ben a -27 ? És a -8 ?
7. Melyek igazak az alábbiak, illetve a megfordításaik közül?
 - a) $(N(\alpha), N(\beta)) = 1 \implies (\alpha, \beta) = 1$.
 - b) $(\alpha, \bar{\alpha}) = 1 \implies (a, b) = 1$.
 - c) α „köbszám” $\implies N(\alpha)$ köbszám.
8. Mennyi az $1234567 + 891011i$ Gauss-egész összes osztójának az összege?
9. Melyek igazak?
 - a) $73 \mid a^2 + b^2 \implies 73^2 \mid a^2 + b^2$.
 - b) $77 \mid a^2 + b^2 \implies 77^2 \mid a^2 + b^2$.
10. Mely Gauss-egészek oszthatók a konjugáltjukkal?
11. Határozzuk meg a $2 + 11i$ és $13 + 4i$ összes kitüntetett közös osztóját a Gauss-egészek között az euklideszi algoritmussal, és ezek egyikét állítsuk elő az algoritmus alapján $ax + by$ alakban, ahol $x, y \in \mathbb{G}$.
12. Egyértelmű-e a maradékos osztás \mathbb{G} -ben? Ha igen, bizonyítsuk be. Ha nem, adjunk ellenpéldát.
- 13**. Oldjuk meg az egész számok körében az $x^2 + 1 = y^3$ diofantikus egyenletet az alábbi feladatsor végrehajtásával.
 - a) Bontsuk fel \mathbb{G} -ben szorzatra az egyenlet baloldalát.
 - b) Mutassuk meg, hogy a baloldal két tényezőjének közös prímosztója csak $1 + i$ lehet, és ilyenkor y páros.
 - c) Mutassuk meg a 4-gyel való oszthatóságot vizsgálva, hogy y nem lehet páros szám.
 - d) Mutassuk meg, hogy \mathbb{G} mindegyik egysége teljes köb \mathbb{G} -ben.
 - e) Mutassuk meg, hogy a baloldal mindkét tényezője teljes köb \mathbb{G} -ben.
 - f) Az $a + bi$ köbének kiszámításával keressük meg x lehetséges értékeit.Oldjuk meg hasonlóan az $x^2 + 121 = y^3$ diofantikus egyenletet is.