Bsc algebra3 tanár gyakorlat

Első alkalom (2007. szeptember 14.)

A számozás a Kiss: *Bevezetés az algebrába* tankönyv számozásának felel meg, ahol a megoldások is elolvashatók.

5.1.7. *Legyen I egy T test fölötti $n \times n$-es mátrixgyűrűben azoknak a mátrixoknak a halmaza, melyeknek az első oszlopa végig nulla. Ideál-e ez?*

5.1.11. *Határozzuk meg a legszűkebb olyan ideált az egész számok gyűrűjében, amely a* 18 *és* 30 *számokat tartalmazza.*

5.2.14. *Készítsük el az alábbi faktorgyűrűk műveleti tábláit, majd osztályozzuk őket izomorfia szerint. (Ha n egész, akkor nR az R gyűrű $\{nr \ : \ r \in R\}$ részgyűrűjét jelöli.)* $\mathbb{Z}_4/\{0\}$, $\mathbb{Z}_8/\{0,4\}$, $\mathbb{Z}_{16}/\{0,4,8,12\}$, $2\mathbb{Z}/(8)$, $2\mathbb{Z}_{16}/(8)$, $\mathbb{Z}/(4)$, $4\mathbb{Z}/(16)$, $\mathbb{Z}[x]/(4,x)$.

1. *Számítsuk ki az $\mathbb{R}[x]/(x^2+1)$ faktorgyűrűben az x polinom maradékosztályának a négyzetét és inverzét.*

5.2.15. *A $\mathbb{Q}[x]/(x^2+x+1)$-ben mi az $x+(x^2+x+1)$ inverze?*

5.2.10. *Írjuk föl az $L = \mathbb{Z}_2[x]/(x^2+x+1)$ faktorgyűrű műveleti tábláit, és igazoljuk, hogy testet kaptunk. Keressünk benne $\mathbb{Z}_2$-vel izomorf $\{O, E\}$ résztestet (ahol E az egységelem, O a nullelem), és adjuk meg L-ben az Ex^2+Ex+E polinom gyökeit.*

5.2.18*. *Melyek igazak az alábbiak közül:* $\mathbb{R}[x]/(x^2+2) \cong \mathbb{C}$, $\mathbb{R}[x]/(x^2-1) \cong \mathbb{C}$, $\mathbb{R}[x]/(x^2-1) \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{G}/(5) \cong \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ *($\mathbb{G}$ a Gauss-egészek),* $\mathbb{G}/(3) \cong \mathbb{Z}_3[x]/(x^2+1)$, $\mathbb{C}[x,y]/(x) \cong \mathbb{C}[y]$.

5.2.19*. *Lehet-e egy nullosztómentes, de nem egységelemes gyűrű faktorgyűrűje egységelemes? Lehet-e egy nullosztómentes gyűrű faktora nem nullosztómentes? És fordítva?*

5.3.14. *Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_{24}$ gyűrűben azon r elemek halmazát, melyekre $18r = 0$. Ideált kaptunk-e? Általánosítsuk a kapott állítást!*

5.3.15. *Mutassuk meg, hogy ha r bal oldali nullosztó, és sr nem nulla, akkor sr is bal oldali nullosztó. Igaz-e, hogy ha r, s bal oldali nullosztók, és $r+s \neq 0$, akkor $r+s$ is bal oldali nullosztó?*

5.3.16*. *Mely $m > 0$ egészekre igaz, hogy a $\mathbb{Z}_m$ gyűrűben a nullosztók a nullával együtt ideált alkotnak?*

5.1.25*. *Adjunk példát egy-egy olyan részgyűrűre a $\mathbb{Q}[x]$, illetve a $\mathbb{Z}[x]$ polinomgyűrűkben, amely nem ideál, de tartalmaz minden n-re n-edfokú polinomot.*

5.3.19*. *Igazoljuk, hogy egy T test fölötti $n \times n$-es felső háromszög-mátrixok gyűrűjében ideált alkotnak azok a mátrixok, amelyeknek a főátlójában végig nulla áll, és a szerinte vett faktor a T^n direkt hatvánnyal izomorf.*

5.3.3**. *Igazoljuk, hogy ha T test, akkor a $T^{n \times n}$ teljes mátrixgyűrű egyszerű gyűrű.*

5.1.32**. *Bizonyítsuk be, hogy ha egy egységelemes gyűrűben $1-ab$ invertálható, akkor $1-ba$ is.*