Mátrixműveletek, mátrixegyenletek.

1. Legyenek megadva az alábbi mátrixok:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Végezzük el az alábbi mátrixműveleteket, ha lehetséges:

$A+A$, $A+B$, AB, AC, AC^T, DD^T, D^TD, $AC+2C$, $AD-3D$, D^2, BC, CB, A^{-1}.

2. Számítsuk ki az alábbi mátrixhatványokat:

a) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$; b) $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n$; c) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$; d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}^n$.

3. Jelölje $E_{ij} \in T^{n\times n}$ azt a mátrixot, amelyben az i-edik sor j-edik eleme 1, az összes többi elem pedig 0.

a) $i \neq j$ esetén legyen $P_{ij} = I - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$. Határozzuk meg, hogyan kapjuk meg egy tetszőleges $A \in T^{n\times n}$ mátrixból a $P_{ij}A$, illetve az AP_{ij} mátrixot.

b) $1 \leq i \leq n$ és $\lambda \in T$ esetén legyen $C_i(\lambda) = I - E_{ii} + \lambda E_{ii}$. Határozzuk meg a $C_i(\lambda)A$ és az $AC_i(\lambda)$ mátrixszorzatot.

c) $i \neq j$ és $\lambda \in T$ esetén legyen $B_{ij}(\lambda) = I + \lambda E_{ij}$. Határozzuk meg a $B_{ij}(\lambda)A$ és az $AB_{ij}(\lambda)$ mátrixszorzatot.

4. Számoljuk ki az alábbi mátrixok inverzét:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$; b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}^n$.

5. Tegyük föl, hogy létezik az AB mátrixszorzat. Mely állítások lesznek igazak az alábbiak közül?

a) AB oszlopvektorai az A oszlopvektorainak lineáris kombinációi.

b) AB oszlopvektorai a B oszlopvektorainak lineáris kombinációi.

c) AB sorvektorai a B sorvektorainak lineáris kombinációi.

d) AB sorvektorai a B oszlopvektorainak lineáris kombinációi.

6. Tekintsük az alábbi valós együtthatós mátrixokat:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Oldjuk meg az $AX = B$, illetve az $AX = BX$ mátrixegyenleteket.

7. Mutassuk meg, hogy a $\varphi : a + bi \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ megfeleltetés egy *műveletttartó* injektív leképezés a komplex számtestről a 2×2-es valós mátrixok halmazába. (A φ műveletttartásához azt kell igazolnunk, hogy $\varphi(z_1 + z_2) = \varphi(z_1) + \varphi(z_2)$, és $\varphi(z_1 \cdot z_2) = \varphi(z_1)\cdot\varphi(z_2)$.)

8. a) Legyenek A, B tetszőleges $n\times n$-es mátrixok. Mennyi lesz az $AB - BA$ mátrix főátlójában az elemek összege?

b) Mutassuk meg, hogy nincsenek olyan $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixok, melyekre $AB - BA = I$ teljesülne.

c) Megoldható-e az $AB - BA = I$ mátrixegyenlet $\mathbb{Z}_2^2$-ben?

9. Legyen G véges irányított gráf, melynek csúcsai az $\{1, 2, \ldots, n\}$ pontok. Rendeljük G-hez azt az $A = (a_{ij}) \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ mátrixot, melyben a_{ij} értéke az i-ből j be mutató élek száma. Mit jelentenek az A^2 mátrix elemei?

10. Állapítsuk meg, melyek igazak az alábbi összefüggések közül (A, B mindenütt $n\times n$-es T fölötti mátrixokat jelölnek, I pedig a megfelelő egységmátrix):

a) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$;

b) $(A + I)^3 = A^3 + 3A^2 + 3A + I$;

c) $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$;

d) $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B) \Rightarrow AB = BA$;

e*) $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 \Rightarrow AB = BA$;

f) $A^2 = 0$, $B^2 = 0 \Rightarrow (A + B)^4 = 0$;

g) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, ha A invertálható;

h) $A + A^T$ és AA^T mindig szimmetrikusak (azaz megegyeznek a transzponáltjukkal), ha a mondott műveletek elvégezhetők (mellesleg, ez utóbbinak mi a feltétele?).

11. Egy $n \times n$-es A mátrix *nilpotens*, ha van olyan m, hogy $A^m = 0$; A *projekció*, ha $A^2 = A$; végezetül A *involúció*, ha $A^2 = I$.

a) Igazoljuk, hogy ha A projekció, akkor $I - A$ is projekció, és ha egyik mátrix sem a nullamátrix, akkor egyik sem invertálható.

b) Igazoljuk, hogy ha A projekció, akkor $2I - A$ invoúció.

c) Igazoljuk, hogy ha A nilpotens, akkor A nem invertálható, de $I - A$ invertálható.

d) Igazoljuk, hogy ha A involúció, akkor A invertálható, és $\frac{1}{2}(I_A)$ projekció.