Magasabbfokú egyenletek, többszörös gyökök. Lineáris egyenletrendszerek

1. Határozzuk meg az $f(x) = x^6 - x^5 - 8x^4 + 2x^3 + 13x^2 - x - 6$ polinom többszörös gyökeit.

2. Jellemezzük azokat az $f \in \mathbb{Z}_p[x]$ polinomokat, melyeknek a deriváltja 0.

3. Van-e olyan $a \in \mathbb{R}$, melyre az $x^6 - 6ix + a \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak létezik többszörös gyöke.

4. Igazoljuk, hogy bármely $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomhoz létezik olyan $g \in \mathbb{C}[x]$ polinom, melyre $g' = f$ (azaz g-nek a deriváltja f), s mutassuk meg, hogy g úgy is választható, hogy g-nek csupa különböző gyöke legyen.

5. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

a) $x^3 - 6ix - i + 8 = 0$; b) $x^3 + 12x - 16i = 0$;
c) $x^3 - 21x + 20 = 0$; d) $x^4 + x^2 + 4x - 3 = 0$.

6. Oldjuk meg az $x^8 + 2x^2 + 4x + 2$ egyenletet. (Vagy legalább mutassuk meg, hogy meg tudjuk oldani…) (*Útmutatás:* Írjuk föl a polinomot két négyzet különbségeként.)

7. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket.

a) $$\begin{aligned} -x+3y+3z&=2\\ 3x+y+z&=4\\ 2x-2y+3z&=10 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 2x+3y+z&=11\\ x-y-2z&=-7\\ 3x+2y-z&=2 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 2x+3y+z&=11\\ x-y-2z&=-7\\ 3x+2y-z&=4 \end{aligned}$$

8. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}_2$ és $\mathbb{Z}_3$ fölött:

$$\begin{aligned} x-y&=1\\ x+4z&=3\\ -3x+y-2z&=-4 \end{aligned}$$

9. Döntsük el, melyek igazak az alábbi következtetések közül.

a) Ha egy racionális együtthatós egyenletrendszernek van komplex megoldása, akkor van racionális megoldása is.
b) Ha egy egész együtthatós egyenletrendszernek van racionális megoldása, akkor van egész megoldása is.
c) Ha egy lineáris egyenletrendszernek nincs megoldása, akkor van olyan egyenlet a rendszerben, amelynek nincs megoldása.
d) Ha egy 3 egyenletből álló egyenletrendszer bármely két egyenletének van közös megoldása, akkor az egész egyenletrendszernek is van közös megoldása.

10. Van-e olyan egész együtthatós lineáris egyenletrendszer, amelynek:

a) van megodása $\mathbb{Q}$ fölött, de nincs megoldása $\mathbb{Z}_3$ fölött;
b) van megodása $\mathbb{Z}_3$ fölött, de nincs megoldása $\mathbb{Q}$ fölött;
c) van megodása $\mathbb{Z}$ fölött, de nincs megoldása $\mathbb{Z}_3$ fölött;
d) van megodása $\mathbb{Z}_3$ fölött, de nincs megoldása $\mathbb{Z}$ fölött?

11. Tamás egy lineáris egyenletrendszert old meg, és megállapítja, hogy a rendszernek pontosan egy megoldása van. Az eredményt hallva (magát a feladatot azonban nem ismerve) Péter azt állítja, hogy a rendszer egyetlen (általa kiválasztott) együtthatóját megváltoztatva el tudná érni, hogy az egyenletrendszernek ne legyen megoldása. Sikerül-e Péternek betartania a szavát?

12. Tekintsünk egy n ismeretlenes, m egyenletből álló, $\mathbb{R}$ fölötti lineáris egyenletrendszert, melynek t (valós) megoldása van ($t = \infty$ is lehetséges). Töltsük ki az alábbi táblázatokat: I jelentse azt, hogy ilyen eset előfordulhat, N pedig azt, hogy nem.

Általános	$t=0$	$t=1$	$t=\infty$
$n<m$			
$n=m$			
$n>m$			

Homogén	$t=0$	$t=1$	$t=\infty$
$n<m$			
$n=m$			
$n>m$			