Racionális és egész együtthatós polinomok számelmélete

Körosztási polinomok. Többhatározatlanú polinomok

1. Állapítsuk meg, irreducibilisek-e az alábbi polinomok $\mathbb{Q}$, illetve $\mathbb{Z}$ fölött, valamint azt is, van-e racionális, illetve egész gyökük.

a) $x^2 - 2$; b) $x^3 - 4$; c) $x^7 - 2$; d) $2x - 4$;
e) $4x - 2$; f) $2x^7 - 1$; g) $4x^7 - 2$; h) $x^4 + 4$.

2. Igazoljuk a „fordított Schönemann–Eisenstein-kritérium”-ot:

Ha egy $f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ polinomhoz van olyan p prímszám, hogy (1) $p \nmid a_0$, (2) $p \mid a_k$ $(1 \leq k \leq n)$, és (3) $p^2 \nmid a_n$, akkor f irreducibilis $\mathbb{Q}[x]$-ben.

3. Irreducibilisek-e az alábbi polinomok $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, illetve $\mathbb{Z}_p$ fölött a megadott prímekre?

a) $x^7 - 3x^6 + 9x^3 - 18x^2 + 3$, $p = 3$;
b) $3x^7 - 18x^5 + 9x^4 - 3x^2 + 1$, $p = 3$;
c) $x^7 - 3x^6 + 9x^3 - 10x^2 + 3$, $p = 103$.

4. Legyen az $f \in \mathbb{Z}[x]$ polinom foka n, legyen p prímszám, és legyen $0 < k < n$. Jelölje $\bar{f}$ az f-ből kapott polinomot, amikor modulo p vesszük az együtthatóit. Döntsük el, melyek igazak az alábbi állítások közül:

a) f irreducibilis $\mathbb{Z}$ fölött $\Rightarrow$ $\bar{f}$ irreducibilis $\mathbb{Z}_p$ fölött;
b) $\bar{f}$ irreducibilis $\mathbb{Z}_p$ fölött $\Rightarrow$ f irreducibilis $\mathbb{Z}$, illetve $\mathbb{Q}$ fölött;
c) $\bar{f}$ irreducibilis $\mathbb{Z}_p$ fölött, és $\bar{f}$ foka n $\Rightarrow$ f irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött;
d) f-nek van $\mathbb{Z}$ fölött k-adfokú tényezője $\Rightarrow$ $\bar{f}$-nak is van k-adfokú tényezője;
e) f-nek van $\mathbb{Z}$ fölött k-adfokú tényezője, és $\bar{f}$ foka n $\Rightarrow$ $\bar{f}$-nak is van k-adfokú tényezője.

5. Határozzuk meg az összes legföljebb 4-edfokú irreducibilis polinomot $\mathbb{Z}_2[x]$-ben. Hány ötödfokú irreducibilis polinom van $\mathbb{Z}_2[x]$-ben?

6. Bontsuk föl az $x^{12} - 1$ polinomot irreducibilisek szorzatára $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_{13}$ és $\mathbb{Z}$, illetve $\mathbb{Q}$ fölött.

7. Felbonthatatlanok-e az alábbi polinomok $\mathbb{Z}_{17}$ fölött?

a) $x^{16} - 1$; b) $x^8 + 1$; c) $x^4 + 1$;
d) $x^2 + 1$; e) $x^{17} + 1$; f) $x^{17} + 2$;

8. Döntsük el, irreducibilisek-e az alábbi polinomok $\mathbb{Q}$ fölött:

a) $x^4 - 6x - 3$; b) $x^3 - 7x - 3$; c) $x^3 - 8x - 3$; d) $x^4 - 7x - 3$;
e) $x^4 - 2x - 1$; f) $3x^{17} + x + 2$; g) $5x^{17} - x + 4$; h) $x^4 - x^2 + 1$;

9. Legyen az $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ polinomnak gyöke az $\sqrt[5]{2}$. Bizonyítsuk be, hogy $f(2) \neq 999$.

10. Adjunk meg olyan egész együtthatós polinomot, amely irreducibilis $\mathbb{Z}$ fölött, reducibilis $\mathbb{Z}_5$ fölött, gyöke van $\mathbb{Z}_{11}$ fölött és ezek közül egyik sem teljesül rá $\mathbb{Z}_3$ fölött.

11. Számítsuk ki a $\Phi_n(x)$ körosztási polinomokat $1 \leq n \leq 20$-ra.

12. Irreducibilis-e $\Phi_p(x)$, ha az együtthatóit modulo p vesszük (p tetszőleges prím)?

13. Igazoljuk, hogy ha p prímszám, akkor $\Phi_{p^k}(x) = \Phi_p(x^{p^{k-1}})$.

14. Legyen $m \mid n$, és tegyük föl, hogy n minden prímosztója osztja m-et is. Igazoljuk, hogy $\Phi_n(x) = \Phi_m(x^{n/m})$, majd számoljuk ki ennek alapján $\Phi_{72}(x)$-et.

15. Bontsuk $\mathbb{Z}[x]$-ben irreducibilis polinomok szorzatára az alábbi polinomokat:

a) $x^{10} - 1$; b) $x^{10} + 1$; c) $x^6 + x^3 + 1$;

d) $((x^{12} - 1), (x^{30} - 1))$; e) $((x^{12} - 1), (x^{30} + 1))$; f) $((x^{128} - 1), (x^6 - 2x^4 + 3x^3 + 117))$.

16. A gyökök és együtthatók közötti összefüggést fölhasználva adjunk újabb bizonyítást az n-edik egységgyökök összegére, szorzatára és kettős szorzatainak összegére vonatkozó képletekre.

17. Számoljuk ki az n-edik primitív egységgyökök összegét $n \in \{2, 3, 5, 4, 8, 9, 6, 10, 30, 12\}$ esetén.

18. Tekintsük $\mathbb{N}^n$-et a lexikografikus rendezéssel, és legyen H ennek egy tetszőleges nem üres részhalmaza. Igazoljuk, hogy H-nak van legkisebb eleme.

19. Fejezzük ki az $x_1, x_2, \dots, x_n$ változók elemi szimmetrikus polinomjai, azaz $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ segítségével az alábbi szimmetrikus kifejezéseket:

a) $x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3$;

b) $\sum\limits_{i<j} x_i^2 x_j + \sum\limits_{i>j} x_i x_j^2$;

c) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \cdots + \dfrac{1}{x_n}$.

20. Legyenek a, b, c az $x^3 + 3x + 1$ polinom gyökei. Keressük meg azt a normált (azaz 1 főegyütthatójú) polinomot, amelynek a gyökei a^2, b^2, c^2.

21. Legyenek az $x^3 + ax^2 + bx + c$ polinom gyökei $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Adjuk meg azt a normált polinomot, amelynek a gyökei: $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_3$ és $\alpha_2 + \alpha_3$.

22. Legyenek az $x^3 - ax^2 + bx - c$ polinom gyökei egy háromszög oldalhosszai. Határozzuk meg a háromszög kerületét és területét.