Komplex és valós együtthatós polinomok, interpoláció

1. Irreducibilisek-e az alábbi polinomok $\mathbb{R}[x]$-ben, illetve $\mathbb{C}[x]$-ben? Van-e gyökük $\mathbb{R}$-ben, illetve $\mathbb{C}$-ben?

a) 2; b) $x-2$; c) x^2-2; d) x^2+2; e) $x^{22}-2$; f) $x^{22}+2$.

2. Bontsuk az alábbi polinomokat irreducibilisek szorzatára $\mathbb{C}[x]$-ben és $\mathbb{R}[x]$-ben.

a) $x^{12}-1$; b) $x^{12}-4096$; c) $x^2-10x+1$; d) x^4-10x^2+1.

3. Oldjuk meg az alábbi egyenletet:

$$x^6-2x^5+2x^4-2x^3+2x^2-2x+1=0$$

4. a) Soroljuk föl a legföljebb negyedfokú polinomokat $\mathbb{Z}_2[x]$-ben.
b) Válasszuk ki az előbbi listából az irreducibiliseket.

5. Keressünk olyan minél alacsonyabb fokú $f\in\mathbb{C}[x]$ polinomot, melyre:

a) $f(0)=1$, $f(1)=2$, $f(2)=3$, $f(3)=4$;
b) $f(0)=1$, $f(1)=4$, $f(2)=15$, $f(3)=40$;
c) $f(1)=1$, $f(-1)=-1$, $f(i)=-i$, $f(-i)=i$.

6. a) Keressünk olyan $f\in\mathbb{C}[x]$ polinomot, amelyre $f(z)=1/z$ minden olyan z-re, melyre $z^{10}=1$.
b) Van-e olyan polinomfüggvény, amely minden egységgyököt a reciprokába visz?

7. a) Igaz-e, hogy ha egy $f\in\mathbb{C}[x]$ polinom minden valós helyen valós értéket vesz föl, akkor $f\in\mathbb{R}[x]$?
b) Igaz-e, hogy ha egy $f\in\mathbb{C}[x]$ polinom minden racionális helyen racionális értéket vesz föl, akkor $f\in\mathbb{Q}[x]$?
c) Igaz-e, hogy ha egy $f\in\mathbb{C}[x]$ polinom minden egész helyen egész értéket vesz föl, akkor $f\in\mathbb{Z}[x]$?

8. Igazoljuk, hogy ha $f\in\mathbb{C}[x]$ olyan polinom, amelyre $f(p)=p^3$ minden $p\in\mathbb{Z}$ prímre, akkor f-nek van racionális gyöke. :-)

9. Tegyük föl, hogy az $f\in\mathbb{Z}[x]$ polinomra $f(1-2i)=0$. Igazoljuk, hogy $f(1)$ osztható 4-gyel.

10. Jelölje $L_0,L_1,\ldots,L_{10}$ a $0,1,2,\ldots,10$ helyekhez tartozó Lagrange-féle interpolációs alappolinomokat. Határozzuk meg az $L_0+L_1+\cdots+L_{10}$ összeget.

11. a) Bontsuk gyöktényezők szorzatára $\mathbb{Z}_p[x]$-ben az $x^{p-1}-1$ polinomot.
b) Igazoljuk, hogy $(p-1)!\equiv-1 \pmod p$ (ezt nevezik Wilson-féle kongruenciatételnek).

12*. Tegyük föl, hogy a páronként különböző $a_0,\ldots,a_n$ egész számokhoz és a tetszőleges $b_0,\ldots,b_n$ egész számokhoz megkonstruált $\mathbb{Q}[x]$-beli legföljebb n-edfokú interpolációs polinom nem egész együtthatós. Van-e olyan $g\in\mathbb{Z}[x]$, melyre $g(a_i)=b_i$ minden $0\le i\le n$-re?