Polinomok számelmélete

1. (*Racionális gyökteszt.*) Tegyük föl, hogy az $a/b \in \mathbb{Q}$ racionális szám (ahol $a, b \in \mathbb{Z}$ egymáshoz relatív prím egészek) gyöke az $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ egész együtthatós polinomnak. Igazoljuk, hogy $a \mid a_0$, és $b \mid a_n$, majd keressük meg a $2x^3 + 3x + 5$ polinom racionális gyökeit. Következtessünk arra, hogy tetszőleges $a \in \mathbb{Z}$ számra $\sqrt[n]{a}$ pontosan akkor racionális, ha a egy egész szám n-edik hatványa.

2. Keressünk olyan egész együtthatós polinomokat, amelyeknek gyöke:

a) $\sqrt{2}$; b) $\sqrt[3]{5}$; c) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Igazoljuk ennek alapján, hogy $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ irracionális.

3. Van-e olyan polinom $\mathbb{Q}[x]$-ben, amelynek nem minden együtthatója egész, mégis egész értéket vesz föl minden egész helyen?

4. Legyen $f \in \mathbb{Z}[x]$ olyan polinom, melyre f három különböző egész helyen ± 1-et vesz föl értékül. Igazoljuk, hogy f-nek nincs egész gyöke.

5. Adjuk meg az $f = 49x^4 - 35x^3 + 36x^2 + 13x + 1$ racionális gyökeit és ezek multiplicitását, majd bontsuk a polinomot gyöktényezőkre.

6. Határozzuk meg a maradékot az $x^{50} + x^{40} + \cdots + x^{10} + 1$ polinom $x^2 - 1$, $x^2 + 1$, illetve $(x-1)^2$ polinomokkal való osztásánál.

7. Határozzuk meg a p és q polinomok kitüntetett közös osztóját, ha:

a) $p = x^4 - 5x^2 + 4$, és $q = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 8x - 8$;
b) $p = x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1$, és $q = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$;
c) $p = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$, és $q = x^2 - x + 1$.

8. Határozzuk meg az $x^n - 1$ és az $x^m - 1$ polinomok legnagyobb közös osztóját.

9. Mutassuk meg, hogy $x^2 + x + 1 \mid x^{3k+2} + x^{3\ell+1} + x^{3m}$.

10. Bontsuk $\mathbb{C}[x]$-ben gyöktényezők szorzatára az $f = x^4 + 1$ polinomot. Mutassuk meg, hogy az $x^4 + 1$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}[x]$-ben, de nem irreducibilis $\mathbb{R}[x]$-ben.

11. Legyen $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ harmadfokú polinom, és $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ olyan másodfokú, amely az $a, b, c \in \mathbb{Z}$ különböző helyeken az $f(x)$-szel megegyező értéket vesz föl. Bizonyítsuk be, hogy $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

12*. Igazoljuk, hogy egy $f \in \mathbb{Q}[x]$ polinom akkor és csak akkor vesz föl egész értéket minden egész helyen, ha vannak olyan $c_0, \ldots, c_n$ egész számok, hogy f az alábbi alakban írható:

$$f = c_n\binom{x}{n} + c_{n-1}\binom{x}{n-1} + \cdots + c_0\binom{x}{0}.$$