

Polinomok, polinomfüggvények, gyűrűk

1. Mi lesz a 20-adfokú tag együtthatója az alábbi polinomokban?

a) $(2x^{10} + x^5 - 1)(x^{20} + x^{15} - x^7 + 3x)$;

b) $(x^{20} - 1)(x^{19} + x^{18} + \dots + x + 1)$;

c) $(x + 1)^{20}(1 + x + \dots + x^{20})$;

d) $(x + 1)^{20}(1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{20})$.

2. Írjuk föl az alábbi komplex együtthatós polinomokat gyöktényezőik szorzataként!

a) $x^2 - 3x + 2$; b) $x^6 - 1$; c) $x^6 + 1$; d) $x^3 + i$; e) $x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1$.

3. Hányféleképpen írhatjuk föl az $x^2 - 1 \in \mathbb{Z}_8[x]$ polinomot gyöktényezőik szorzataként?

4. Mik lesznek a nullosztók \mathbb{Z}_n -ben?

5. a) Mutassuk meg, hogy tetszőleges racionális szám gyöke egy egész együtthatós polinomnak.

b) Mutassuk meg, hogy tetszőleges komplex szám gyöke egy valós együtthatós polinomnak.

c**) Mutassuk meg, hogy van olyan valós szám, amely nem gyöke egyetlen racionális együtthatós polinomnak sem. (*Útmutatás:* Hány olyan valós szám lehet, amely gyöke egy racionális együtthatós polinomnak?)

6. Tegyük föl, hogy $f \in \mathbb{Z}[x]$ polinomra $f(1881) = 1945$, és $f(1882) = 1967$. Igazoljuk, hogy f -nek nincs \mathbb{Z} -beli gyöke. (*Ráadás kérdés:* Kikhez köthetők az itt megadott évszámok?)

7. Igazoljuk, hogy az alábbi függvények nem polinomfüggvények:

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$;

b) $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, 0 \neq x \mapsto 1/x, 0 \mapsto 0$;

c) $g : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}, z \mapsto \bar{z}$.

8*. Határozzuk meg egy egységsugarú körbe írt szabályos n -szög egyik csúcsából az összes többi csúcsba húzott szakaszok hosszainak szorzatát.

9*. Legyen $f \in \mathbb{R}[x]$ olyan negyedfokú polinom, amelynek a főegyütthatója 1 (az ilyen polinomokat nevezzük *normált* polinomoknak), és tegyük föl, hogy $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, és $f(3) = 6$. Határozzuk meg az $f(4) + f(0)$ értéket.