Komplex számok trigonometrikus alakja, egységgyökök

1. Határozzuk meg az alábbi komplex számok trigonometrikus alakját:

a) $1-i$; b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$; c) $\sin 12^\circ - i\cos 12^\circ$; d) $1-i\operatorname{tg}\alpha$;

e) $(-1-i)^{2007}$; f) $\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{1956}$; g) $(\cos 324^\circ - i\sin 324^\circ)^{1945}$.

2. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok körében:

a) $x^4+1=0$; b) $x^6=i$; c) $x^4+4=0$; d) $x^n=-1$.

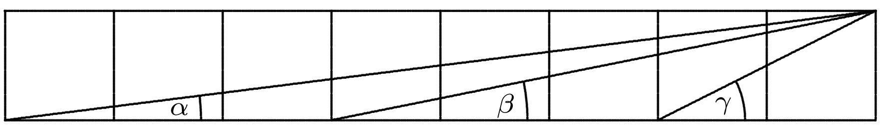
3. Jelölje ω_α az α argumentumú 1 abszolút értékű komplex számot, azaz legyen $\omega_\alpha=\cos\alpha+i\sin\alpha$.

a) Igazoljuk, hogy $\omega_\alpha\omega_\beta=\omega_{\alpha+\beta}$.
b) Mennyi ω_α^n?
c) Mennyi ω_α^{-1}?
d) Határozzuk meg $\omega_\alpha-1$ és $\omega_\alpha+1$ trigonometrikus alakját.

4. Adjuk meg (a szokásos algebrai műveletek és a konjugálás segítségével) egy tetszőleges $z\in\mathbb{C}$ komplex szám képét az alábbi síktranszformációknál:

a) origó körüli 60°-os forgatás;
b) $1+i$ körüli α szögű forgatás;
c) a képzetes tengelyre való tükrözés;
d) az origón átmenő, a valós tengely pozitív félegyenesével α szöget bezáró egyenesre való tükrözés.

5. Részlet egy négyzetrácsból:



Igazoljuk, hogy $\alpha+\beta+\gamma=\pi/4$.

6. Mely komplex számokra igaz, hogy:

a) $\bar{z}=z^2$; b) $\bar{z}=z^n$?

7. Fejezzük ki $\cos 3\alpha$-t és $\cos 5\alpha$-t $\cos\alpha$ segítségével.

8. Írjuk föl az első síknegyedbe eső tizenkettedik egységgyökök algebrai alakját. Melyek lesznek ezek közül primitív tizenkettedik gyökök?

9. Igazoljuk, hogy egységgyökök szorzata, reciproka, konjugáltja, hatványa és n-edik gyöke is egységgyök. Igaz-e ugyanez egységgyökök összegére is?

10. Jelölje $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ az n-edik egységgyököket. Határozzuk meg az alábbi kifejezések értékét:

a) $\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j$; b) $\prod_{j=1}^{n} \varepsilon_j$; c) $\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j^2$; d) $\sum_{j \neq k} \varepsilon_j \varepsilon_k$; e) $\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_i^k$.

11. Hozzuk zárt alakra az alábbi összegeket:

a) $\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \cdots$; b) $\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \cdots$; c) $\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \cdots$.

12. Mi lesz a rendje az alábbi komplex számoknak:

a) 1; b) $1+i$; c) $-i$; d) ω_{75°; e) ω_{285°.

13. Igazoljuk a hatvány rendjére vonatkozó $o(a^k) = \dfrac{o(a)}{(o(a),k)}$ összefüggést.

14. Mi lehet a rendje egy 8-adik és egy 9-edik egységgyök szorzatának? Hát ha azt is tudjuk, hogy a tényezők primitív 8-adik, ill. 9-edik egységgyökök? Fejezzük ki $o(\varepsilon)$ segítségével $-\varepsilon$ rendjét!

További feladatok elsősorban középszintű gyakorlatokra:

15. Igazoljuk, hogy $\left(\dfrac{1 + i \operatorname{tg} \alpha}{1 - i \operatorname{tg} \alpha}\right)^n = \dfrac{1 + i \operatorname{tg} n\alpha}{1 - i \operatorname{tg} n\alpha}$.

16. Határozzuk meg a $z = \dfrac{(1+ti)}{(1-ti)}$ alakú számok mértani helyét számok mértani helyét, ahol t befutja a valós számokat.

17. a) Legyen $x + \dfrac{1}{x} = -1$. Mennyi $x^{65} + \left(\dfrac{1}{x}\right)^{65}$?

b) Legyen $x + \frac{1}{x} = 2\cos\alpha$. Igazoljuk, hogy $x^n + \left(\dfrac{1}{x}\right)^n = 2\cos n\alpha$.

18. Hozzuk zárt alakra a $\sum_{j=0}^{n} \cos j\alpha = 1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos n\alpha$ összeget.

(*Útmutatás:* Vizsgáljuk meg az ω_α hányadosú megfelelő mértani sor összegét.)

19. Jelölje $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{\varphi(n)}$ a primitív n-edik egységgyököket. Határozzuk meg az alábbi kifejezések értékét:

a) $\prod_{j=1}^{\varphi(n)} \zeta_j$; b) $\prod_{j=1}^{\varphi(n)} \zeta_j^2$; c*) $\sum_{j=1}^{\varphi(n)} \zeta_j$.

20*. Le lehet-e fedni egy 6×10-es sakktáblát 1×4-es dominókkal (egyrétűen, hézagmentesen)? Általánosítsunk!