Komplex számok

1. Számoljuk ki az alábbi komplex kifejezések algebrai alakját:

a) $(2+i)(-2+i)$; b) i^n; c) $(1+i)^{2007}$;

d) $\dfrac{3+i}{1-2i}$; e) $1+i+\cdots+i^{2007}$; f) $\left|\dfrac{(2+i)^{2007}}{(2-i)^{2007}}\right|$.

2. Igazoljuk, hogy tetszőleges nem nulla komplex számnak pontosan két négyzetgyöke van, majd keressük meg a $3+4i$ komplex szám négyzetgyökeit.

3. Oldjuk meg az $x^2+(2+2i)x-(3+2i)=0$ egyenletet.

4. Igazoljuk, hogy egy z komplex szám abszolút értéke pontosan akkor 1, ha z reciproka megegyezik a konjugáltjával.

5. Tegyük föl, hogy $(x+iy)^n = 3+2i$. Mennyi lesz ekkor $(x^2+y^2)^n$?

6. Mutassuk meg, hogy ha az a és b egész számok mindegyike előáll mint két egész szám négyzetének az összege, akkor ugyanez igaz a szorzatukra, ab-re is!

7. Adjunk (algebrai*) bizonyítást a háromszög-egyenlőtlenségre, azaz a $|z+v| \le |z|+|v|$ összefüggésre. Mikor áll itt egyenlőség?

8. Mi a mértani helye a síkon azoknak a pontoknak, amelyeknek megfelelő z komplex számokra:

a) $|z-5+i|=2$; b) $\left|\dfrac{z-3+4i}{z-i}\right| \ge 2$; c) $|z|=3iz$; d) $|z|=2\,\mathrm{Re}\,z$?

9. Adjuk meg annak a négyzetnek a másik két csúcsát, amelynek két csúcsát két adott komplex szám, $3-i$ és $1-2i$ alkotja!

10. Bizonyítsuk be, hogy egy parallelogramma átlói hosszának a négyzetösszege megegyezik a négy oldal hosszának a négyzetösszegével!

További középszintű feladatok:

11. Hol helyezkednek el a komplex számsíkon azok a z komplex számok, amelyek reciproka rajta van az egységkörnek az első síknegyedbe eső részén?

12. Határozzuk meg az alábbi halmazt a komplex számsíkon:

$$\left\{ \frac{1}{1-z} \,\middle|\, z \ne 1,\ |z|=1 \right\}.$$

13. Adjuk meg annak a szabályos háromszögnek a harmadik csúcsát, amelynek két csúcsát két adott komplex szám, z_1 és z_2 alkotja!

14*. Hány zárójelezése van egy n-tényezős szorzatnak?