Algebrai átalakítások

1. Alakítsuk szorzattá az alábbi kifejezéseket:

a) $a^2 - 9$; b) $x^2 - 5x + 6$; c) $a^4 - 5a^2 + 6$;
d) $2a^{64} - 8b^{12}$; e) $x^3 + 8$; f) $a^5 + b^{10}$;
g) $a^n - b^n$; h) $x^{2n+1} + y^{2n+1}$; i*) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

2*. Tegyük föl, hogy $x + y + z = 0$. Határozzuk meg az alábbi kifejezés értékét:

$$\left(\frac{y-z}{x} + \frac{z-x}{y} + \frac{x-y}{z}\right)\left(\frac{x}{y-z} + \frac{y}{z-x} + \frac{z}{x-y}\right)$$

3. Gyöktelenítsük az alábbi törteket:

a) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$; b) $\dfrac{1}{a-\sqrt[3]{2}}$; b) $\dfrac{x}{1-2\sqrt[3]{x}+4\sqrt[3]{x^2}}$; c*) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}$.

4. Igazoljuk, hogy ha egy valós szám előáll $a + b\sqrt{2}$ alakban, ahol a és b valamilyen racionális számok, akkor az előállításban szereplő racionális együtthatók egyértelműek. (Ez azt jelenti, hogy ha $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$ valamilyen $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$-ra, akkor $a = c$ és $b = d$.)

5. Keressünk olyan a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 egész számokat, melyekre az $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ szám gyöke az $a_4x^4 + a_3x^3 + \cdots + a_1x + a_0 = 0$ egyenletnek. (*: Van-e alacsonyabb fokú ilyen egyenlet?)

6. Bizonyítsuk be a binomiális tételt:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i.$$

7. Bizonyítsuk be a polinomiális tételt:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k=n} \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$$

8. Határozzuk meg az alábbi binomiális összegek értékét:

a) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}$;
b) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots \pm \binom{n}{n}$;
c) $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots$.

9*. Mi lesz az x^{50}-es tag együtthatója az alábbi kifejezésben:

$$(1+x)^{2007} + x(1+x)^{2006} + x^2(1+x)^{2005} + \cdots + x^{2007}$$

10. Mi lesz 2-es számrendszerben az utolsó két jegye az alábbi kifejezés értékének:

$$1^{2007} + 2^{2007} + 3^{2007} + 4^{2007} + 5^{2007} + 6^{2007} + 7^{2007} + 8^{2007}?$$

Hát 3-as számrendszerben?

11. A mond B-nek egy tetszőleges pozitív egész számot, a-t, valamint megjelöli három sapka (egy piros, egy kék és egy sárga) valamelyikét. Ezek után B mond C-nek egy számot (saját belátása szerint) az a, a $2a$ és a $3a$ valamelyike közül (de azt nem mondhatja meg, hogy az A által mondott szám mi volt, és a színről sem szólhat). Milyen stratégiában egyezzen meg B és C, hogy a B által átadott információ alapján C a megfelelő színű sapkát húzza föl?