Algebra3, elemző szakirány

ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Előadó: Kiss Emil
ewkiss@cs.elte.hu

8. előadás

Szerkeszthetetlenség csak vonalzóval

6.8.1. Állítás

Kockás papíron

Szerkeszthetetlenség csak vonalzóval

6.8.1. Állítás

Kockás papíron csak vonalzóval

Szerkeszthetetlenség csak vonalzóval

6.8.1. Állítás

Kockás papíron csak vonalzóval nem tudjuk megszerkeszteni

Szerkeszthetetlenség csak vonalzóval

6.8.1. Állítás

Kockás papíron csak vonalzóval nem tudjuk megszerkeszteni az egyik kis négyzetoldalra támaszkodó szabályos háromszög

Szerkeszthetetlenség csak vonalzóval

6.8.1. Állítás

Kockás papíron csak vonalzóval nem tudjuk megszerkeszteni az egyik kis négyzetoldalra támaszkodó szabályos háromszög harmadik csúcsát.

Szerkeszthetetlenség csak vonalzóval

6.8.1. Állítás

Kockás papíron csak vonalzóval nem tudjuk megszerkeszteni az egyik kis négyzetoldalra támaszkodó szabályos háromszög harmadik csúcsát.

Kiinduló adatok

A négyzetrács csúcspontjai.

Szerkeszthetetlenség csak vonalzóval

6.8.1. Állítás

Kockás papíron csak vonalzóval nem tudjuk megszerkeszteni az egyik kis négyzetoldalra támaszkodó szabályos háromszög harmadik csúcsát.

Kiinduló adatok

A négyzetrács csúcspontjai.

Megengedett lépések

(1) Két adott vagy megszerkesztett ponton át egyenes húzása.

Szerkeszthetetlenség csak vonalzóval

6.8.1. Állítás

Kockás papíron csak vonalzóval nem tudjuk megszerkeszteni az egyik kis négyzetoldalra támaszkodó szabályos háromszög harmadik csúcsát.

Kiinduló adatok

A négyzetrács csúcspontjai.

Megengedett lépések

(1) Két adott vagy megszerkesztett ponton át egyenes húzása.

(2) Két megszerkesztett egyenes metszéspontjának kijelölése.

Szerkeszthetetlenség csak vonalzóval

6.8.1. Állítás

Kockás papíron csak vonalzóval nem tudjuk megszerkeszteni az egyik kis négyzetoldalra támaszkodó szabályos háromszög harmadik csúcsát.

Kiinduló adatok

A négyzetrács csúcspontjai.

Megengedett lépések

(1) Két adott vagy megszerkesztett ponton át egyenes húzása.

(2) Két megszerkesztett egyenes metszéspontjának kijelölése.

Ezt a kétféle lépést véges sokszor szabad alkalmazni.

Szerkeszthetetlenség csak vonalzóval

6.8.1. Állítás

Kockás papíron csak vonalzóval nem tudjuk megszerkeszteni az egyik kis négyzetoldalra támaszkodó szabályos háromszög harmadik csúcsát.

Kiinduló adatok

A négyzetrács csúcspontjai.

Megengedett lépések

(1) Két adott vagy megszerkesztett ponton át egyenes húzása.

(2) Két megszerkesztett egyenes metszéspontjának kijelölése.

Ezt a kétféle lépést véges sokszor szabad alkalmazni.
A végén a keresett pontot kell megkapnunk

Szerkeszthetetlenség csak vonalzóval

6.8.1. Állítás

Kockás papíron csak vonalzóval nem tudjuk megszerkeszteni az egyik kis négyzetoldalra támaszkodó szabályos háromszög harmadik csúcsát.

Kiinduló adatok

A négyzetrács csúcspontjai.

Megengedett lépések

(1) Két adott vagy megszerkesztett ponton át egyenes húzása.

(2) Két megszerkesztett egyenes metszéspontjának kijelölése.

Ezt a kétféle lépést véges sokszor szabad alkalmazni.
A végén a keresett pontot kell megkapnunk (2) típusú lépéssel.

A feladat algebraizálása

A négyzetrács ad egy természetes koordinátarendszert:

A feladat algebraizálása

A négyzetrács ad egy természetes koordinátarendszert:
$(0, 0)$ és $(1, 0)$ egy kis négyzet két szomszédos csúcsa.

A feladat algebraizálása

A négyzetrács ad egy természetes koordinátarendszert:
$(0, 0)$ és $(1, 0)$ egy kis négyzet két szomszédos csúcsa.

Hívjuk a sík (p, q) pontját racionálisnak,

A feladat algebraizálása

A négyzetrács ad egy természetes koordinátarendszert: $(0, 0)$ és $(1, 0)$ egy kis négyzet két szomszédos csúcsa.

Hívjuk a sík (p, q) pontját racionálisnak, ha $p, q \in \mathbb{Q}$.

A feladat algebraizálása

A négyzetrács ad egy természetes koordinátarendszert:
$(0,0)$ és $(1,0)$ egy kis négyzet két szomszédos csúcsa.

Hívjuk a sík (p,q) pontját racionálisnak, ha $p, q \in \mathbb{Q}$.
Minden egyenest megadhatunk egyenlettel:

A feladat algebraizálása

A négyzetrács ad egy természetes koordinátarendszert:
$(0,0)$ és $(1,0)$ egy kis négyzet két szomszédos csúcsa.

Hívjuk a sík (p,q) pontját racionálisnak, ha $p,q \in \mathbb{Q}$.
Minden egyenest megadhatunk egyenlettel:

$$ax + by + c = 0,$$

A feladat algebraizálása

A négyzetrács ad egy természetes koordinátarendszert:
$(0, 0)$ és $(1, 0)$ egy kis négyzet két szomszédos csúcsa.

Hívjuk a sík (p, q) pontját racionálisnak, ha $p, q \in \mathbb{Q}$.
Minden egyenest megadhatunk egyenlettel:

$ax + by + c = 0$, ahol a, b, c valós számok.

A feladat algebraizálása

A négyzetrács ad egy természetes koordinátarendszert: $(0,0)$ és $(1,0)$ egy kis négyzet két szomszédos csúcsa.

Hívjuk a sík (p,q) pontját racionálisnak, ha $p, q \in \mathbb{Q}$.
Minden egyenest megadhatunk egyenlettel:

$ax + by + c = 0$, ahol a, b, c valós számok.

Hívjunk egy egyenest racionálisnak,

A feladat algebraizálása

A négyzetrács ad egy természetes koordinátarendszert:
$(0,0)$ és $(1,0)$ egy kis négyzet két szomszédos csúcsa.

Hívjuk a sík (p,q) pontját racionálisnak, ha $p,q \in \mathbb{Q}$.
Minden egyenest megadhatunk egyenlettel:

$$ax + by + c = 0, \text{ ahol } a, b, c \text{ valós számok.}$$

Hívjunk egy egyenest racionálisnak, ha $a, b, c \in \mathbb{Q}$-val felírható.

A feladat algebraizálása

A négyzetrács ad egy természetes koordinátarendszert:
$(0,0)$ és $(1,0)$ egy kis négyzet két szomszédos csúcsa.

Hívjuk a sík (p,q) pontját racionálisnak, ha $p,q \in \mathbb{Q}$.
Minden egyenest megadhatunk egyenlettel:

$ax+by+c=0$, ahol a, b, c valós számok.

Hívjunk egy egyenest racionálisnak, ha $a,b,c \in \mathbb{Q}$-val felírható.

Az (1) lépésben két racionális pontból racionális egyenes lesz,

A feladat algebraizálása

A négyzetrács ad egy természetes koordinátarendszert:
$(0, 0)$ és $(1, 0)$ egy kis négyzet két szomszédos csúcsa.

Hívjuk a sík (p, q) pontját racionálisnak, ha $p, q \in \mathbb{Q}$.
Minden egyenest megadhatunk egyenlettel:

$$ax + by + c = 0, \text{ ahol } a, b, c \text{ valós számok.}$$

Hívjunk egy egyenest racionálisnak, ha $a, b, c \in \mathbb{Q}$-val felírható.

Az (1) lépésben két racionális pontból racionális egyenes lesz,
a (2) lépésben két racionális egyenesből racionális pont lesz,

A feladat algebraizálása

A négyzetrács ad egy természetes koordinátarendszert:
$(0, 0)$ és $(1, 0)$ egy kis négyzet két szomszédos csúcsa.

Hívjuk a sík (p, q) pontját racionálisnak, ha $p, q \in \mathbb{Q}$.
Minden egyenest megadhatunk egyenlettel:

$ax + by + c = 0$, ahol a, b, c valós számok.

Hívjunk egy egyenest racionálisnak, ha $a, b, c \in \mathbb{Q}$-val felírható.

Az (1) lépésben két racionális pontból racionális egyenes lesz, a (2) lépésben két racionális egyenesből racionális pont lesz, mert mindkétszer lineáris egyenletrendszert kell megoldani.

A feladat algebraizálása

A négyzetrács ad egy természetes koordinátarendszert:
$(0,0)$ és $(1,0)$ egy kis négyzet két szomszédos csúcsa.

Hívjuk a sík (p,q) pontját racionálisnak, ha $p,q \in \mathbb{Q}$.
Minden egyenest megadhatunk egyenlettel:

$$ax + by + c = 0, \text{ ahol } a, b, c \text{ valós számok.}$$

Hívjunk egy egyenest racionálisnak, ha $a, b, c \in \mathbb{Q}$-val felírható.

Az (1) lépésben két racionális pontból racionális egyenes lesz,
a (2) lépésben két racionális egyenesből racionális pont lesz,
mert mindkétszer lineáris egyenletrendszert kell megoldani.
Ezért az eljárásban végig minden egyenes és pont racionális.

A feladat algebraizálása

A négyzetrács ad egy természetes koordinátarendszert:
$(0, 0)$ és $(1, 0)$ egy kis négyzet két szomszédos csúcsa.

Hívjuk a sík (p, q) pontját racionálisnak, ha $p, q \in \mathbb{Q}$.
Minden egyenest megadhatunk egyenlettel:

$$ax + by + c = 0, \text{ ahol } a, b, c \text{ valós számok.}$$

Hívjunk egy egyenest racionálisnak, ha $a, b, c \in \mathbb{Q}$-val felírható.

Az (1) lépésben két racionális pontból racionális egyenes lesz,
a (2) lépésben két racionális egyenesből racionális pont lesz,
mert mindkétszer lineáris egyenletrendszert kell megoldani.
Ezért az eljárásban végig minden egyenes és pont racionális.
Azaz csak racionális pont lehet szerkeszthető.

A feladat algebraizálása

A négyzetrács ad egy természetes koordinátarendszert: $(0,0)$ és $(1,0)$ egy kis négyzet két szomszédos csúcsa.

Hívjuk a sík (p,q) pontját racionálisnak, ha $p,q\in\mathbb{Q}$.
Minden egyenest megadhatunk egyenlettel:

$ax+by+c=0$, ahol a,b,c valós számok.

Hívjunk egy egyenest racionálisnak, ha $a,b,c\in\mathbb{Q}$-val felírható.

Az (1) lépésben két racionális pontból racionális egyenes lesz, a (2) lépésben két racionális egyenesből racionális pont lesz, mert mindkétszer lineáris egyenletrendszert kell megoldani. Ezért az eljárásban végig minden egyenes és pont racionális. Azaz csak racionális pont lehet szerkeszthető. A keresett $(1/2,\sqrt{3}/2)$ nem racionális pont,

A feladat algebraizálása

A négyzetrács ad egy természetes koordinátarendszert:
$(0, 0)$ és $(1, 0)$ egy kis négyzet két szomszédos csúcsa.

Hívjuk a sík (p, q) pontját racionálisnak, ha $p, q \in \mathbb{Q}$.
Minden egyenest megadhatunk egyenlettel:

$$ax + by + c = 0, \text{ ahol } a, b, c \text{ valós számok.}$$

Hívjunk egy egyenest racionálisnak, ha $a, b, c \in \mathbb{Q}$-val felírható.

Az (1) lépésben két racionális pontból racionális egyenes lesz,
a (2) lépésben két racionális egyenesből racionális pont lesz,
mert mindkétszer lineáris egyenletrendszert kell megoldani.
Ezért az eljárásban végig minden egyenes és pont racionális.
Azaz csak racionális pont lehet szerkeszthető. A keresett
$(1/2, \sqrt{3}/2)$ nem racionális pont, így nem szerkeszthető. $\square$

Euklideszi szerkesztés

Kiinduló adatok

Pontok,

Euklideszi szerkesztés

Kiinduló adatok

Pontok, egyenesek,

Euklideszi szerkesztés

Kiinduló adatok

Pontok, egyenesek, körök,

Euklideszi szerkesztés

Kiinduló adatok

Pontok, egyenesek, körök, szakaszok, stb.

Euklideszi szerkesztés

Kiinduló adatok

Pontok, egyenesek, körök, szakaszok, stb. a síkon.

Euklideszi szerkesztés

Kiinduló adatok

Pontok, egyenesek, körök, szakaszok, stb. a síkon.

További megengedett lépések

(3) Két adott vagy megszerkesztett pont körzőnyílásba vétele,

Euklideszi szerkesztés

Kiinduló adatok

Pontok, egyenesek, körök, szakaszok, stb. a síkon.

További megengedett lépések

(3) Két adott vagy megszerkesztett pont körzőnyílásba vétele, és ezzel a sugárral egy adott vagy megszerkesztett pont

Euklideszi szerkesztés

Kiinduló adatok

Pontok, egyenesek, körök, szakaszok, stb. a síkon.

További megengedett lépések

(3) Két adott vagy megszerkesztett pont körzőnyílásba vétele, és ezzel a sugárral egy adott vagy megszerkesztett pont körüli kör rajzolása.

Euklideszi szerkesztés

Kiinduló adatok

Pontok, egyenesek, körök, szakaszok, stb. a síkon.

További megengedett lépések

(3) Két adott vagy megszerkesztett pont körzőnyílásba vétele, és ezzel a sugárral egy adott vagy megszerkesztett pont körüli kör rajzolása.

(4) Adott vagy megszerkesztett kör és egyenes metszéspontjainak kijelölése.

Euklideszi szerkesztés

Kiinduló adatok

Pontok, egyenesek, körök, szakaszok, stb. a síkon.

További megengedett lépések

(3) Két adott vagy megszerkesztett pont körzőnyílásba vétele, és ezzel a sugárral egy adott vagy megszerkesztett pont körüli kör rajzolása.

(4) Adott vagy megszerkesztett kör és egyenes metszéspontjainak kijelölése.

(5) Két adott vagy megszerkesztett kör metszéspontjainak kijelölése.

Euklideszi szerkesztés

Kiinduló adatok

Pontok, egyenesek, körök, szakaszok, stb. a síkon.

További megengedett lépések

(3) Két adott vagy megszerkesztett pont körzőnyílásba vétele, és ezzel a sugárral egy adott vagy megszerkesztett pont körüli kör rajzolása.

(4) Adott vagy megszerkesztett kör és egyenes metszéspontjainak kijelölése.

(5) Két adott vagy megszerkesztett kör metszéspontjainak kijelölése.

Szerkesztés: az ötféle lépést véges sokszor alkalmazzuk.

Az euklideszi szerkesztés algebraizálása

Felveszünk egy koordinátarendszert

Az euklideszi szerkesztés algebraizálása

Felveszünk egy koordinátarendszert úgy, hogy
$(0, 0)$ és $(1, 0)$ adott vagy szerkeszthető legyen.

Az euklideszi szerkesztés algebraizálása

Felveszünk egy koordinátarendszert úgy, hogy
$(0, 0)$ és $(1, 0)$ adott vagy szerkeszthető legyen.

A pontokat (p, q) alakban adjuk meg, ahol $p, q \in \mathbb{R}$.

Az euklideszi szerkesztés algebraizálása

Felveszünk egy koordinátarendszert úgy, hogy
$(0,0)$ és $(1,0)$ adott vagy szerkeszthető legyen.

A pontokat (p, q) alakban adjuk meg, ahol $p, q \in \mathbb{R}$.
Minden egyenest megadhatunk egyenlettel:

Az euklideszi szerkesztés algebraizálása

Felveszünk egy koordinátarendszert úgy, hogy
$(0,0)$ és $(1,0)$ adott vagy szerkeszthető legyen.

A pontokat (p,q) alakban adjuk meg, ahol $p, q \in \mathbb{R}$.
Minden egyenest megadhatunk egyenlettel:

$$ax + by + c = 0, \text{ ahol } a, b, c \text{ valós számok.}$$

Az euklideszi szerkesztés algebraizálása

Felveszünk egy koordinátarendszert úgy, hogy
$(0, 0)$ és $(1, 0)$ adott vagy szerkeszthető legyen.

A pontokat (p, q) alakban adjuk meg, ahol $p, q \in \mathbb{R}$.
Minden egyenest megadhatunk egyenlettel:

$ax + by + c = 0$, ahol a, b, c valós számok.

Minden kört megadhatunk egyenlettel:

Az euklideszi szerkesztés algebraizálása

Felveszünk egy koordinátarendszert úgy, hogy
$(0, 0)$ és $(1, 0)$ adott vagy szerkeszthető legyen.

A pontokat (p, q) alakban adjuk meg, ahol $p, q \in \mathbb{R}$.
Minden egyenest megadhatunk egyenlettel:

$$ax + by + c = 0, \text{ ahol } a, b, c \text{ valós számok.}$$

Minden kört megadhatunk egyenlettel:

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2, \text{ ahol } p, q, r \text{ valós számok.}$$

Az euklideszi szerkesztés algebraizálása

Felveszünk egy koordinátarendszert úgy, hogy
$(0, 0)$ és $(1, 0)$ adott vagy szerkeszthető legyen.

A pontokat (p, q) alakban adjuk meg, ahol $p, q \in \mathbb{R}$.
Minden egyenest megadhatunk egyenlettel:

$$ax + by + c = 0, \text{ ahol } a, b, c \text{ valós számok.}$$

Minden kört megadhatunk egyenlettel:

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2, \text{ ahol } p, q, r \text{ valós számok.}$$

Feltesszük, hogy a kiinduló adatok csak pontok.

Az euklideszi szerkesztés algebraizálása

Felveszünk egy koordinátarendszert úgy, hogy
$(0,0)$ és $(1,0)$ adott vagy szerkeszthető legyen.

A pontokat (p, q) alakban adjuk meg, ahol $p, q \in \mathbb{R}$.
Minden egyenest megadhatunk egyenlettel:

$$ax + by + c = 0, \text{ ahol } a, b, c \text{ valós számok.}$$

Minden kört megadhatunk egyenlettel:

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2, \text{ ahol } p, q, r \text{ valós számok.}$$

Feltesszük, hogy a kiinduló adatok csak pontok.
Ezek koordinátái és $\mathbb{Q}$ által generált test az alaptest,

Az euklideszi szerkesztés algebraizálása

Felveszünk egy koordinátarendszert úgy, hogy
$(0, 0)$ és $(1, 0)$ adott vagy szerkeszthető legyen.

A pontokat (p, q) alakban adjuk meg, ahol $p, q \in \mathbb{R}$.
Minden egyenest megadhatunk egyenlettel:

$$ax + by + c = 0, \text{ ahol } a, b, c \text{ valós számok.}$$

Minden kört megadhatunk egyenlettel:

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2, \text{ ahol } p, q, r \text{ valós számok.}$$

Feltesszük, hogy a kiinduló adatok csak pontok.
Ezek koordinátái és $\mathbb{Q}$ által generált test az alaptest, jele K_0.

Az euklideszi szerkesztés algebraizálása

Felveszünk egy koordinátarendszert úgy, hogy
$(0, 0)$ és $(1, 0)$ adott vagy szerkeszthető legyen.

A pontokat (p, q) alakban adjuk meg, ahol $p, q \in \mathbb{R}$.
Minden egyenest megadhatunk egyenlettel:

$$ax + by + c = 0, \text{ ahol } a, b, c \text{ valós számok.}$$

Minden kört megadhatunk egyenlettel:

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2, \text{ ahol } p, q, r \text{ valós számok.}$$

Feltesszük, hogy a kiinduló adatok csak pontok.
Ezek koordinátái és $\mathbb{Q}$ által generált test az alaptest, jele K_0.
Az $(1) - (5)$ típusú lépések során kapott új alakzat „koordinátái” minden lépésnél egy testbővítést adnak.

Az euklideszi szerkesztés algebraizálása

Felveszünk egy koordinátarendszert úgy, hogy
$(0,0)$ és $(1,0)$ adott vagy szerkeszthető legyen.

A pontokat (p, q) alakban adjuk meg, ahol $p, q \in \mathbb{R}$.
Minden egyenest megadhatunk egyenlettel:

$$ax + by + c = 0, \text{ ahol } a, b, c \text{ valós számok.}$$

Minden kört megadhatunk egyenlettel:

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2, \text{ ahol } p, q, r \text{ valós számok.}$$

Feltesszük, hogy a kiinduló adatok csak pontok.
Ezek koordinátái és $\mathbb{Q}$ által generált test az alaptest, jele K_0.
Az $(1) - (5)$ típusú lépések során kapott új alakzat „koordinátái” minden lépésnél egy testbővítést adnak. Így a szerkesztés egy $\mathbb{Q} \leq K_0 \leq K_1 \leq \ldots \leq K_n \leq \mathbb{R}$ testláncot eredményez.

Szerkeszthető számok

6.8.3. Lemma

A K_{i+1} megkapható $K_i(\sqrt{d})$ alakban

Szerkeszthető számok

6.8.3. Lemma

A K_{i+1} megkapható $K_i(\sqrt{d})$ alakban alkalmas $0 < d \in K_i$-re.

Szerkeszthető számok

6.8.3. Lemma

A K_{i+1} megkapható $K_i(\sqrt{d})$ alakban alkalmas $0 < d \in K_i$-re.
Speciálisan $K_i \leq K_{i+1}$ foka 1 vagy 2

Szerkeszthető számok

6.8.3. Lemma

A K_{i+1} megkapható $K_i(\sqrt{d})$ alakban alkalmas $0 < d \in K_i$-re. Speciálisan $K_i \leq K_{i+1}$ foka 1 vagy 2 és $|K_n : K_0|$ 2-hatvány.

Szerkeszthető számok

6.8.3. Lemma

A K_{i+1} megkapható $K_i(\sqrt{d})$ alakban alkalmas $0 < d \in K_i$-re.
Speciálisan $K_i \leq K_{i+1}$ foka 1 vagy 2 és $|K_n : K_0|$ 2-hatvány.
Így K_n elemei algebraiak K_0 fölött,

Szerkeszthető számok

6.8.3. Lemma

A K_{i+1} megkapható $K_i(\sqrt{d})$ alakban alkalmas $0 < d \in K_i$-re.
Speciálisan $K_i \leq K_{i+1}$ foka 1 vagy 2 és $|K_n : K_0|$ 2-hatvány.
Így K_n elemei algebraiak K_0 fölött, és fokuk 2-hatvány.

Szerkeszthető számok

6.8.3. Lemma

A K_{i+1} megkapható $K_i(\sqrt{d})$ alakban alkalmas $0 < d \in K_i$-re.
Speciálisan $K_i \leq K_{i+1}$ foka 1 vagy 2 és $|K_n : K_0|$ 2-hatvány.
Így K_n elemei algebraiak K_0 fölött, és fokuk 2-hatvány.

Bizonyítás

Másodfokú egyenletet kell megoldani. $\square$

Szerkeszthető számok

6.8.3. Lemma

A K_{i+1} megkapható $K_i(\sqrt{d})$ alakban alkalmas $0 < d \in K_i$-re. Speciálisan $K_i \leq K_{i+1}$ foka 1 vagy 2 és $|K_n : K_0|$ 2-hatvány. Így K_n elemei algebraiak K_0 fölött, és fokuk 2-hatvány.

Bizonyítás

Másodfokú egyenletet kell megoldani. $\square$

6.8.5. Definíció

Az $r \in \mathbb{R}$ szerkeszthető szám, ha $(r, 0)$ szerkeszthető pont.

Szerkeszthető számok

6.8.3. Lemma

A K_{i+1} megkapható $K_i(\sqrt{d})$ alakban alkalmas $0 < d \in K_i$-re.
Speciálisan $K_i \leq K_{i+1}$ foka 1 vagy 2 és $|K_n : K_0|$ 2-hatvány.
Így K_n elemei algebraiak K_0 fölött, és fokuk 2-hatvány.

Bizonyítás

Másodfokú egyenletet kell megoldani. □

6.8.5. Definíció

Az $r \in \mathbb{R}$ szerkeszthető szám, ha $(r, 0)$ szerkeszthető pont.

Beláttuk

Minden szerkeszthető szám foka K_0 fölött 2-hatvány.

Kockakettőzés

6.8.6. Probléma

Kockakettőzés,

Kockakettőzés

6.8.6. Probléma

Kockakettőzés, vagy Déloszi Probléma:

Kockakettőzés

6.8.6. Probléma

Kockakettőzés, vagy Déloszi Probléma:
szerkesztendő egy olyan kocka élhossza,

Kockakettőzés

6.8.6. Probléma

Kockakettőzés, vagy Déloszi Probléma:
szerkesztendő egy olyan kocka élhossza, aminek térfogata egy adott élhosszúságú kocka térfogatának kétszerese.

Kockakettőzés

6.8.6. Probléma

Kockakettőzés, vagy Déloszi Probléma:
szerkesztendő egy olyan kocka élhossza, aminek térfogata egy adott élhosszúságú kocka térfogatának kétszerese.

Megoldás

Adott a síkon az első kocka élhossza,

Kockakettőzés

6.8.6. Probléma

Kockakettőzés, vagy Déloszi Probléma:
szerkesztendő egy olyan kocka élhossza, aminek térfogata egy adott élhosszúságú kocka térfogatának kétszerese.

Megoldás

Adott a síkon az első kocka élhossza, vagyis egy szakasz.

Kockakettőzés

6.8.6. Probléma

Kockakettőzés, vagy Déloszi Probléma:
szerkesztendő egy olyan kocka élhossza, aminek térfogata egy adott élhosszúságú kocka térfogatának kétszerese.

Megoldás

Adott a síkon az első kocka élhossza, vagyis egy szakasz.
Vegyük föl a koordinátarendszert úgy, hogy $(0, 0)$ és $(1, 0)$ a megadott szakasz két végpontja legyen.

Kockakettőzés

6.8.6. Probléma

Kockakettőzés, vagy Déloszi Probléma:
szerkesztendő egy olyan kocka élhossza, aminek térfogata egy adott élhosszúságú kocka térfogatának kétszerese.

Megoldás

Adott a síkon az első kocka élhossza, vagyis egy szakasz.
Vegyük föl a koordinátarendszert úgy, hogy $(0, 0)$ és $(1, 0)$ a megadott szakasz két végpontja legyen.
Az alaptest tehát $K_0 = \mathbb{Q}(0, 0, 1, 0) = \mathbb{Q}$.

Kockakettőzés

6.8.6. Probléma

Kockakettőzés, vagy Déloszi Probléma:
szerkesztendő egy olyan kocka élhossza, aminek térfogata egy adott élhosszúságú kocka térfogatának kétszerese.

Megoldás

Adott a síkon az első kocka élhossza, vagyis egy szakasz.
Vegyük föl a koordinátarendszert úgy, hogy $(0,0)$ és $(1,0)$ a megadott szakasz két végpontja legyen.
Az alaptest tehát $K_0 = \mathbb{Q}(0,0,1,0) = \mathbb{Q}$.
A keresett szakasz hossza $\sqrt[3]{2}$,

Kockakettőzés

6.8.6. Probléma

Kockakettőzés, vagy Déloszi Probléma:
szerkesztendő egy olyan kocka élhossza, aminek térfogata egy adott élhosszúságú kocka térfogatának kétszerese.

Megoldás

Adott a síkon az első kocka élhossza, vagyis egy szakasz.
Vegyük föl a koordinátarendszert úgy, hogy $(0, 0)$ és $(1, 0)$ a megadott szakasz két végpontja legyen.
Az alaptest tehát $K_0 = \mathbb{Q}(0, 0, 1, 0) = \mathbb{Q}$.
A keresett szakasz hossza $\sqrt[3]{2}$, azaz szerkesztendő $(\sqrt[3]{2}, 0)$.

Kockakettőzés

6.8.6. Probléma

Kockakettőzés, vagy Déloszi Probléma:
szerkesztendő egy olyan kocka élhossza, aminek térfogata egy adott élhosszúságú kocka térfogatának kétszerese.

Megoldás

Adott a síkon az első kocka élhossza, vagyis egy szakasz.
Vegyük föl a koordinátarendszert úgy, hogy $(0,0)$ és $(1,0)$ a megadott szakasz két végpontja legyen.
Az alaptest tehát $K_0 = \mathbb{Q}(0,0,1,0) = \mathbb{Q}$.
A keresett szakasz hossza $\sqrt[3]{2}$, azaz szerkesztendő $(\sqrt[3]{2}, 0)$.
Az a kérdés tehát, hogy $\sqrt[3]{2}$ szerkeszthető szám-e $\mathbb{Q}$ fölött.

Kockakettőzés

6.8.6. Probléma

Kockakettőzés, vagy Déloszi Probléma:
szerkesztendő egy olyan kocka élhossza, aminek térfogata egy adott élhosszúságú kocka térfogatának kétszerese.

Megoldás

Adott a síkon az első kocka élhossza, vagyis egy szakasz.
Vegyük föl a koordinátarendszert úgy, hogy $(0, 0)$ és $(1, 0)$ a megadott szakasz két végpontja legyen.
Az alaptest tehát $K_0 = \mathbb{Q}(0, 0, 1, 0) = \mathbb{Q}$.
A keresett szakasz hossza $\sqrt[3]{2}$, azaz szerkesztendő $(\sqrt[3]{2}, 0)$.
Az a kérdés tehát, hogy $\sqrt[3]{2}$ szerkeszthető szám-e $\mathbb{Q}$ fölött.
Nem szerkeszthető,

Kockakettőzés

6.8.6. Probléma

Kockakettőzés, vagy Déloszi Probléma:
szerkesztendő egy olyan kocka élhossza, aminek térfogata egy adott élhosszúságú kocka térfogatának kétszerese.

Megoldás

Adott a síkon az első kocka élhossza, vagyis egy szakasz.
Vegyük föl a koordinátarendszert úgy, hogy $(0, 0)$ és $(1, 0)$ a megadott szakasz két végpontja legyen.
Az alaptest tehát $K_0 = \mathbb{Q}(0, 0, 1, 0) = \mathbb{Q}$.
A keresett szakasz hossza $\sqrt[3]{2}$, azaz szerkesztendő $(\sqrt[3]{2}, 0)$.
Az a kérdés tehát, hogy $\sqrt[3]{2}$ szerkeszthető szám-e $\mathbb{Q}$ fölött.
Nem szerkeszthető, mert foka 3,

Kockakettőzés

6.8.6. Probléma

Kockakettőzés, vagy Déloszi Probléma:
szerkesztendő egy olyan kocka élhossza, aminek térfogata egy adott élhosszúságú kocka térfogatának kétszerese.

Megoldás

Adott a síkon az első kocka élhossza, vagyis egy szakasz.
Vegyük föl a koordinátarendszert úgy, hogy $(0, 0)$ és $(1, 0)$ a megadott szakasz két végpontja legyen.
Az alaptest tehát $K_0 = \mathbb{Q}(0, 0, 1, 0) = \mathbb{Q}$.
A keresett szakasz hossza $\sqrt[3]{2}$, azaz szerkesztendő $(\sqrt[3]{2}, 0)$.
Az a kérdés tehát, hogy $\sqrt[3]{2}$ szerkeszthető szám-e $\mathbb{Q}$ fölött.
Nem szerkeszthető, mert foka 3, ami nem 2-hatvány. $\square$

Körnégyszögesítés

6.8.7. Probléma

Körnégyszögesítés:

Körnégyszögesítés

6.8.7. Probléma

Körnégyszögesítés: szerkesszünk egy megadott sugarú körrel egyenlő területű négyzetet

Körnégyszögesítés

6.8.7. Probléma

Körnégyszögesítés: szerkesszünk egy megadott sugarú körrel egyenlő területű négyzetet (illetve ennek az oldalát).

Körnégyszögesítés

6.8.7. Probléma

Körnégyszögesítés: szerkesszünk egy megadott sugarú körrel egyenlő területű négyzetet (illetve ennek az oldalát).

Megoldás

Adott a síkon a kör sugara,

Körnégyszögesítés

6.8.7. Probléma

Körnégyszögesítés: szerkesszünk egy megadott sugarú körrel egyenlő területű négyzetet (illetve ennek az oldalát).

Megoldás

Adott a síkon a kör sugara, vagyis egy szakasz.

Körnégyszögesítés

6.8.7. Probléma

Körnégyszögesítés: szerkesszünk egy megadott sugarú körrel egyenlő területű négyzetet (illetve ennek az oldalát).

Megoldás

Adott a síkon a kör sugara, vagyis egy szakasz.
Vegyük föl a koordinátarendszert úgy, hogy $(0, 0)$ és $(1, 0)$ a megadott szakasz két végpontja legyen.

Körnégyszögesítés

6.8.7. Probléma

Körnégyszögesítés: szerkesszünk egy megadott sugarú körrel egyenlő területű négyzetet (illetve ennek az oldalát).

Megoldás

Adott a síkon a kör sugara, vagyis egy szakasz.
Vegyük föl a koordinátarendszert úgy, hogy $(0, 0)$ és $(1, 0)$ a megadott szakasz két végpontja legyen.
Az alaptest tehát $K_0 = \mathbb{Q}(0, 0, 1, 0) = \mathbb{Q}$.

Körnégyszögesítés

6.8.7. Probléma

Körnégyszögesítés: szerkesszünk egy megadott sugarú körrel egyenlő területű négyzetet (illetve ennek az oldalát).

Megoldás

Adott a síkon a kör sugara, vagyis egy szakasz.
Vegyük föl a koordinátarendszert úgy, hogy $(0,0)$ és $(1,0)$ a megadott szakasz két végpontja legyen.
Az alaptest tehát $K_0 = \mathbb{Q}(0,0,1,0) = \mathbb{Q}$.
A kör területe ekkor π,

Körnégyszögesítés

6.8.7. Probléma

Körnégyszögesítés: szerkesszünk egy megadott sugarú körrel egyenlő területű négyzetet (illetve ennek az oldalát).

Megoldás

Adott a síkon a kör sugara, vagyis egy szakasz.
Vegyük föl a koordinátarendszert úgy, hogy $(0,0)$ és $(1,0)$ a megadott szakasz két végpontja legyen.
Az alaptest tehát $K_0 = \mathbb{Q}(0,0,1,0) = \mathbb{Q}$.
A kör területe ekkor π, tehát a keresett szakasz hossza $\sqrt{\pi}$.

Körnégyszögesítés

6.8.7. Probléma

Körnégyszögesítés: szerkesszünk egy megadott sugarú körrel egyenlő területű négyzetet (illetve ennek az oldalát).

Megoldás

Adott a síkon a kör sugara, vagyis egy szakasz.
Vegyük föl a koordinátarendszert úgy, hogy $(0, 0)$ és $(1, 0)$ a megadott szakasz két végpontja legyen.
Az alaptest tehát $K_0 = \mathbb{Q}(0, 0, 1, 0) = \mathbb{Q}$.
A kör területe ekkor π, tehát a keresett szakasz hossza $\sqrt{\pi}$.
Az a kérdés tehát, hogy a $\sqrt{\pi}$ szerkeszthető szám-e $\mathbb{Q}$ fölött.

Körnégyszögesítés

6.8.7. Probléma

Körnégyszögesítés: szerkesszünk egy megadott sugarú körrel egyenlő területű négyzetet (illetve ennek az oldalát).

Megoldás

Adott a síkon a kör sugara, vagyis egy szakasz.
Vegyük föl a koordinátarendszert úgy, hogy $(0,0)$ és $(1,0)$ a megadott szakasz két végpontja legyen.
Az alaptest tehát $K_0 = \mathbb{Q}(0,0,1,0) = \mathbb{Q}$.
A kör területe ekkor π, tehát a keresett szakasz hossza $\sqrt{\pi}$.
Az a kérdés tehát, hogy a $\sqrt{\pi}$ szerkeszthető szám-e $\mathbb{Q}$ fölött.
Nem szerkeszthető,

Körnégyszögesítés

6.8.7. Probléma

Körnégyszögesítés: szerkesszünk egy megadott sugarú körrel egyenlő területű négyzetet (illetve ennek az oldalát).

Megoldás

Adott a síkon a kör sugara, vagyis egy szakasz.
Vegyük föl a koordinátarendszert úgy, hogy $(0,0)$ és $(1,0)$ a megadott szakasz két végpontja legyen.
Az alaptest tehát $K_0 = \mathbb{Q}(0,0,1,0) = \mathbb{Q}$.
A kör területe ekkor π, tehát a keresett szakasz hossza $\sqrt{\pi}$.
Az a kérdés tehát, hogy a $\sqrt{\pi}$ szerkeszthető szám-e $\mathbb{Q}$ fölött.
Nem szerkeszthető, mert $\sqrt{\pi}$ transzcendens szám.

Körnégyszögesítés

6.8.7. Probléma

Körnégyszögesítés: szerkesszünk egy megadott sugarú körrel egyenlő területű négyzetet (illetve ennek az oldalát).

Megoldás

Adott a síkon a kör sugara, vagyis egy szakasz.
Vegyük föl a koordinátarendszert úgy, hogy $(0, 0)$ és $(1, 0)$ a megadott szakasz két végpontja legyen.
Az alaptest tehát $K_0 = \mathbb{Q}(0, 0, 1, 0) = \mathbb{Q}$.
A kör területe ekkor π, tehát a keresett szakasz hossza $\sqrt{\pi}$.
Az a kérdés tehát, hogy a $\sqrt{\pi}$ szerkeszthető szám-e $\mathbb{Q}$ fölött.
Nem szerkeszthető, mert $\sqrt{\pi}$ transzcendens szám.
Mert ha algebrai lenne,

Körnégyszögesítés

6.8.7. Probléma

Körnégyszögesítés: szerkesszünk egy megadott sugarú körrel egyenlő területű négyzetet (illetve ennek az oldalát).

Megoldás

Adott a síkon a kör sugara, vagyis egy szakasz.
Vegyük föl a koordinátarendszert úgy, hogy $(0, 0)$ és $(1, 0)$ a megadott szakasz két végpontja legyen.
Az alaptest tehát $K_0 = \mathbb{Q}(0, 0, 1, 0) = \mathbb{Q}$.
A kör területe ekkor π, tehát a keresett szakasz hossza $\sqrt{\pi}$.
Az a kérdés tehát, hogy a $\sqrt{\pi}$ szerkeszthető szám-e $\mathbb{Q}$ fölött.
Nem szerkeszthető, mert $\sqrt{\pi}$ transzcendens szám.
Mert ha algebrai lenne, akkor a négyzete, π is algebrai lenne.

Körnégyszögesítés

6.8.7. Probléma

Körnégyszögesítés: szerkesszünk egy megadott sugarú körrel egyenlő területű négyzetet (illetve ennek az oldalát).

Megoldás

Adott a síkon a kör sugara, vagyis egy szakasz.
Vegyük föl a koordinátarendszert úgy, hogy $(0,0)$ és $(1,0)$ a megadott szakasz két végpontja legyen.
Az alaptest tehát $K_0 = \mathbb{Q}(0,0,1,0) = \mathbb{Q}$.
A kör területe ekkor π, tehát a keresett szakasz hossza $\sqrt{\pi}$.
Az a kérdés tehát, hogy a $\sqrt{\pi}$ szerkeszthető szám-e $\mathbb{Q}$ fölött.
Nem szerkeszthető, mert $\sqrt{\pi}$ transzcendens szám.
Mert ha algebrai lenne, akkor a négyzete, π is algebrai lenne.
(Lindemann analízis-tételét használtuk föl.) $\square$

Szögharmadolás

6.8.8. Probléma

Szögharmadolás:

Szögharmadolás

6.8.8. Probléma

Szögharmadolás: szerkesszük meg egy adott szög harmadát.

Szögharmadolás

6.8.8. Probléma

Szögharmadolás: szerkesszük meg egy adott szög harmadát.

Megoldás

Mivel 60° szerkeszthető az egységszakaszból kiindulva,

Szögharmadolás

6.8.8. Probléma

Szögharmadolás: szerkesszük meg egy adott szög harmadát.

Megoldás

Mivel 60° szerkeszthető az egységszakaszból kiindulva, elég belátni, hogy 20 fokos szög nem szerkeszthető.

Szögharmadolás

6.8.8. Probléma

Szögharmadolás: szerkesszük meg egy adott szög harmadát.

Megoldás

Mivel 60° szerkeszthető az egységszakaszból kiindulva, elég belátni, hogy 20 fokos szög nem szerkeszthető. Azaz, hogy a $\cos(20^\circ)$ szám nem szerkeszthető $\mathbb{Q}$ fölött.

Szögharmadolás

6.8.8. Probléma

Szögharmadolás: szerkesszük meg egy adott szög harmadát.

Megoldás

Mivel 60° szerkeszthető az egységszakaszból kiindulva,
elég belátni, hogy 20 fokos szög nem szerkeszthető.
Azaz, hogy a $\cos(20^\circ)$ szám nem szerkeszthető $\mathbb{Q}$ fölött.
HF: minimálpolinomja $x^3 - (3/4)x - (1/8)$ (5.10.15. Feladat).

Szögharmadolás

6.8.8. Probléma

Szögharmadolás: szerkesszük meg egy adott szög harmadát.

Megoldás

Mivel 60° szerkeszthető az egységszakaszból kiindulva,
elég belátni, hogy 20 fokos szög nem szerkeszthető.
Azaz, hogy a $\cos(20^\circ)$ szám nem szerkeszthető $\mathbb{Q}$ fölött.
HF: minimálpolinomja $x^3 - (3/4)x - (1/8)$ (5.10.15. Feladat).
Ezért $\mathbb{Q}$ fölött $\cos(20^\circ)$ harmadfokú,

Szögharmadolás

6.8.8. Probléma

Szögharmadolás: szerkesszük meg egy adott szög harmadát.

Megoldás

Mivel 60° szerkeszthető az egységszakaszból kiindulva,
elég belátni, hogy 20 fokos szög nem szerkeszthető.
Azaz, hogy a $\cos(20^\circ)$ szám nem szerkeszthető $\mathbb{Q}$ fölött.
HF: minimálpolinomja $x^3 - (3/4)x - (1/8)$ (5.10.15. Feladat).
Ezért $\mathbb{Q}$ fölött $\cos(20^\circ)$ harmadfokú, így nem szerkeszthető. $\square$

Szögharmadolás

6.8.8. Probléma

Szögharmadolás: szerkesszük meg egy adott szög harmadát.

Megoldás

Mivel 60° szerkeszthető az egységszakaszból kiindulva, elég belátni, hogy 20 fokos szög nem szerkeszthető.
Azaz, hogy a $\cos(20^\circ)$ szám nem szerkeszthető $\mathbb{Q}$ fölött.
HF: minimálpolinomja $x^3 - (3/4)x - (1/8)$ (5.10.15. Feladat).
Ezért $\mathbb{Q}$ fölött $\cos(20^\circ)$ harmadfokú, így nem szerkeszthető. $\square$

20 fokos szög szerkesztése

Szögharmadolás

6.8.8. Probléma

Szögharmadolás: szerkesszük meg egy adott szög harmadát.

Megoldás

Mivel 60° szerkeszthető az egységszakaszból kiindulva,
elég belátni, hogy 20 fokos szög nem szerkeszthető.
Azaz, hogy a $\cos(20^\circ)$ szám nem szerkeszthető $\mathbb{Q}$ fölött.
HF: minimálpolinomja $x^3 - (3/4)x - (1/8)$ (5.10.15. Feladat).
Ezért $\mathbb{Q}$ fölött $\cos(20^\circ)$ harmadfokú, így nem szerkeszthető. $\square$

20 fokos szög szerkesztése $=$ szabályos 18-szög szerkesztése.

Szögharmadolás

6.8.8. Probléma

Szögharmadolás: szerkesszük meg egy adott szög harmadát.

Megoldás

Mivel 60° szerkeszthető az egységszakaszból kiindulva,
elég belátni, hogy 20 fokos szög nem szerkeszthető.
Azaz, hogy a $\cos(20^\circ)$ szám nem szerkeszthető $\mathbb{Q}$ fölött.
HF: minimálpolinomja $x^3 - (3/4)x - (1/8)$ (5.10.15. Feladat).
Ezért $\mathbb{Q}$ fölött $\cos(20^\circ)$ harmadfokú, így nem szerkeszthető. $\square$

20 fokos szög szerkesztése = szabályos 18-szög szerkesztése.
Jobb $\cos(20^\circ)$ helyett $\varepsilon = \cos(20^\circ) + i\sin(20^\circ)$-ot nézni!

Szögharmadolás

6.8.8. Probléma

Szögharmadolás: szerkesszük meg egy adott szög harmadát.

Megoldás

Mivel 60° szerkeszthető az egységszakaszból kiindulva,
elég belátni, hogy 20 fokos szög nem szerkeszthető.
Azaz, hogy a $\cos(20^\circ)$ szám nem szerkeszthető $\mathbb{Q}$ fölött.
HF: minimálpolinomja $x^3 - (3/4)x - (1/8)$ (5.10.15. Feladat).
Ezért $\mathbb{Q}$ fölött $\cos(20^\circ)$ harmadfokú, így nem szerkeszthető. $\square$

20 fokos szög szerkesztése $=$ szabályos 18-szög szerkesztése.
Jobb $\cos(20^\circ)$ helyett $\varepsilon = \cos(20^\circ) + i\sin(20^\circ)$-ot nézni!
Ugyanis ε minimálpolinomja $\Phi_{18}(x)$,

Szögharmadolás

6.8.8. Probléma

Szögharmadolás: szerkesszük meg egy adott szög harmadát.

Megoldás

Mivel 60° szerkeszthető az egységszakaszból kiindulva, elég belátni, hogy 20 fokos szög nem szerkeszthető.
Azaz, hogy a $\cos(20^\circ)$ szám nem szerkeszthető $\mathbb{Q}$ fölött.
HF: minimálpolinomja $x^3 - (3/4)x - (1/8)$ (5.10.15. Feladat).
Ezért $\mathbb{Q}$ fölött $\cos(20^\circ)$ harmadfokú, így nem szerkeszthető. $\square$

20 fokos szög szerkesztése $=$ szabályos 18-szög szerkesztése.
Jobb $\cos(20^\circ)$ helyett $\varepsilon = \cos(20^\circ) + i\sin(20^\circ)$-ot nézni!
Ugyanis ε minimálpolinomja $\Phi_{18}(x)$, ezért foka $\varphi(18) = 6$.

Szögharmadolás

6.8.8. Probléma

Szögharmadolás: szerkesszük meg egy adott szög harmadát.

Megoldás

Mivel 60° szerkeszthető az egységszakaszból kiindulva,
elég belátni, hogy 20 fokos szög nem szerkeszthető.
Azaz, hogy a $\cos(20^\circ)$ szám nem szerkeszthető $\mathbb{Q}$ fölött.
HF: minimálpolinomja $x^3 - (3/4)x - (1/8)$ (5.10.15. Feladat).
Ezért $\mathbb{Q}$ fölött $\cos(20^\circ)$ harmadfokú, így nem szerkeszthető. $\square$

20 fokos szög szerkesztése = szabályos 18-szög szerkesztése.
Jobb $\cos(20^\circ)$ helyett $\varepsilon = \cos(20^\circ) + i\sin(20^\circ)$-ot nézni!
Ugyanis ε minimálpolinomja $\Phi_{18}(x)$, ezért foka $\varphi(18) = 6$.
Hogyan ad ez információt a $\cos(20^\circ)$ fokára?

$\cos(2\pi/n)$ foka

Láttuk: $\varepsilon = \cos(20^\circ) + i\sin(20^\circ)$ foka $\mathbb{Q}$ fölött $\varphi(18) = 6$.

$\cos(2\pi/n)$ foka

Láttuk: $\varepsilon = \cos(20^\circ) + i\sin(20^\circ)$ foka $\mathbb{Q}$ fölött $\varphi(18) = 6$.
Nyilván $\varepsilon^{-1} = \overline{\varepsilon}$

$\cos(2\pi/n)$ foka

Láttuk: $\varepsilon = \cos(20^\circ) + i\sin(20^\circ)$ foka $\mathbb{Q}$ fölött $\varphi(18) = 6$.
Nyilván $\varepsilon^{-1} = \overline{\varepsilon} = \cos(20^\circ) - i\sin(20^\circ)$

$\cos(2\pi/n)$ foka

Láttuk: $\varepsilon = \cos(20^\circ) + i\sin(20^\circ)$ foka $\mathbb{Q}$ fölött $\varphi(18) = 6$.
Nyilván $\varepsilon^{-1} = \overline{\varepsilon} = \cos(20^\circ) - i\sin(20^\circ) \in \mathbb{Q}(\varepsilon)$,

$\cos(2\pi/n)$ foka

Láttuk: $\varepsilon = \cos(20^\circ) + i\sin(20^\circ)$ foka $\mathbb{Q}$ fölött $\varphi(18) = 6$.
Nyilván $\varepsilon^{-1} = \overline{\varepsilon} = \cos(20^\circ) - i\sin(20^\circ) \in \mathbb{Q}(\varepsilon)$, és így
$\cos(20^\circ) = (\varepsilon + \overline{\varepsilon})/2 \in \mathbb{Q}(\varepsilon)$,

$\cos(2\pi/n)$ foka

Láttuk: $\varepsilon = \cos(20^\circ) + i\sin(20^\circ)$ foka $\mathbb{Q}$ fölött $\varphi(18) = 6$.
Nyilván $\varepsilon^{-1} = \overline{\varepsilon} = \cos(20^\circ) - i\sin(20^\circ) \in \mathbb{Q}(\varepsilon)$, és így
$\cos(20^\circ) = (\varepsilon + \overline{\varepsilon})/2 \in \mathbb{Q}(\varepsilon)$, azaz $\mathbb{Q}\left(\cos(20^\circ)\right) \leq \mathbb{Q}(\varepsilon)$.

$\cos(2\pi/n)$ foka

Láttuk: $\varepsilon = \cos(20^\circ) + i\sin(20^\circ)$ foka $\mathbb{Q}$ fölött $\varphi(18) = 6$.
Nyilván $\varepsilon^{-1} = \overline{\varepsilon} = \cos(20^\circ) - i\sin(20^\circ) \in \mathbb{Q}(\varepsilon)$, és így
$\cos(20^\circ) = (\varepsilon + \overline{\varepsilon})/2 \in \mathbb{Q}(\varepsilon)$, azaz $\mathbb{Q}\left(\cos(20^\circ)\right) \leq \mathbb{Q}(\varepsilon)$.
Továbbá $\left(i\sin(20^\circ)\right)^2 = \cos(20^\circ)^2 - 1$

$\cos(2\pi/n)$ foka

Láttuk: $\varepsilon = \cos(20^\circ) + i\sin(20^\circ)$ foka $\mathbb{Q}$ fölött $\varphi(18) = 6$.
Nyilván $\varepsilon^{-1} = \overline{\varepsilon} = \cos(20^\circ) - i\sin(20^\circ) \in \mathbb{Q}(\varepsilon)$, és így
$\cos(20^\circ) = (\varepsilon + \overline{\varepsilon})/2 \in \mathbb{Q}(\varepsilon)$, azaz $\mathbb{Q}\big(\cos(20^\circ)\big) \leq \mathbb{Q}(\varepsilon)$.
Továbbá $\big(i\sin(20^\circ)\big)^2 = \cos(20^\circ)^2 - 1 \in \mathbb{Q}\big(\cos(20^\circ)\big)$,

$\cos(2\pi/n)$ foka

Láttuk: $\varepsilon = \cos(20^\circ) + i\sin(20^\circ)$ foka $\mathbb{Q}$ fölött $\varphi(18) = 6$.
Nyilván $\varepsilon^{-1} = \overline{\varepsilon} = \cos(20^\circ) - i\sin(20^\circ) \in \mathbb{Q}(\varepsilon)$, és így
$\cos(20^\circ) = (\varepsilon + \overline{\varepsilon})/2 \in \mathbb{Q}(\varepsilon)$, azaz $\mathbb{Q}\left(\cos(20^\circ)\right) \leq \mathbb{Q}(\varepsilon)$.
Továbbá $\left(i\sin(20^\circ)\right)^2 = \cos(20^\circ)^2 - 1 \in \mathbb{Q}\left(\cos(20^\circ)\right)$,
és így $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ foka $\mathbb{Q}\left(\cos(20^\circ)\right)$ fölött 1 vagy 2

$\cos(2\pi/n)$ foka

Láttuk: $\varepsilon = \cos(20^\circ) + i\sin(20^\circ)$ foka $\mathbb{Q}$ fölött $\varphi(18) = 6$.
Nyilván $\varepsilon^{-1} = \overline{\varepsilon} = \cos(20^\circ) - i\sin(20^\circ) \in \mathbb{Q}(\varepsilon)$, és így $\cos(20^\circ) = (\varepsilon + \overline{\varepsilon})/2 \in \mathbb{Q}(\varepsilon)$, azaz $\mathbb{Q}\big(\cos(20^\circ)\big) \leq \mathbb{Q}(\varepsilon)$.
Továbbá $\big(i\sin(20^\circ)\big)^2 = \cos(20^\circ)^2 - 1 \in \mathbb{Q}\big(\cos(20^\circ)\big)$, és így $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ foka $\mathbb{Q}\big(\cos(20^\circ)\big)$ fölött 1 vagy 2 (hiszen $\sqrt{\cos(20^\circ)^2 - 1}$-gyel való bővítéssel kapható).

$\cos(2\pi/n)$ foka

Láttuk: $\varepsilon = \cos(20^\circ) + i\sin(20^\circ)$ foka $\mathbb{Q}$ fölött $\varphi(18) = 6$.
Nyilván $\varepsilon^{-1} = \overline{\varepsilon} = \cos(20^\circ) - i\sin(20^\circ) \in \mathbb{Q}(\varepsilon)$, és így
$\cos(20^\circ) = (\varepsilon + \overline{\varepsilon})/2 \in \mathbb{Q}(\varepsilon)$, azaz $\mathbb{Q}\big(\cos(20^\circ)\big) \leq \mathbb{Q}(\varepsilon)$.
Továbbá $\big(i\sin(20^\circ)\big)^2 = \cos(20^\circ)^2 - 1 \in \mathbb{Q}\big(\cos(20^\circ)\big)$,
és így $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ foka $\mathbb{Q}\big(\cos(20^\circ)\big)$ fölött 1 vagy 2
(hiszen $\sqrt{\cos(20^\circ)^2 - 1}$-gyel való bővítéssel kapható).
A $\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}\big(\cos(20^\circ)\big) \leq \mathbb{Q}(\varepsilon)$ láncból

$\cos(2\pi/n)$ foka

Láttuk: $\varepsilon = \cos(20^\circ) + i\sin(20^\circ)$ foka $\mathbb{Q}$ fölött $\varphi(18) = 6$.
Nyilván $\varepsilon^{-1} = \overline{\varepsilon} = \cos(20^\circ) - i\sin(20^\circ) \in \mathbb{Q}(\varepsilon)$, és így
$\cos(20^\circ) = (\varepsilon + \overline{\varepsilon})/2 \in \mathbb{Q}(\varepsilon)$, azaz $\mathbb{Q}\left(\cos(20^\circ)\right) \leq \mathbb{Q}(\varepsilon)$.
Továbbá $\left(i\sin(20^\circ)\right)^2 = \cos(20^\circ)^2 - 1 \in \mathbb{Q}\left(\cos(20^\circ)\right)$,
és így $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ foka $\mathbb{Q}\left(\cos(20^\circ)\right)$ fölött 1 vagy 2
(hiszen $\sqrt{\cos(20^\circ)^2 - 1}$-gyel való bővítéssel kapható).
A $\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}\left(\cos(20^\circ)\right) \leq \mathbb{Q}(\varepsilon)$ láncból $\mathrm{gr}_{\mathbb{Q}}\left(\cos(20^\circ)\right) = 3$ vagy 6.

$\cos(2\pi/n)$ foka

Láttuk: $\varepsilon = \cos(20^\circ) + i\sin(20^\circ)$ foka $\mathbb{Q}$ fölött $\varphi(18) = 6$.
Nyilván $\varepsilon^{-1} = \overline{\varepsilon} = \cos(20^\circ) - i\sin(20^\circ) \in \mathbb{Q}(\varepsilon)$, és így
$\cos(20^\circ) = (\varepsilon + \overline{\varepsilon})/2 \in \mathbb{Q}(\varepsilon)$, azaz $\mathbb{Q}\big(\cos(20^\circ)\big) \leq \mathbb{Q}(\varepsilon)$.
Továbbá $\big(i\sin(20^\circ)\big)^2 = \cos(20^\circ)^2 - 1 \in \mathbb{Q}\big(\cos(20^\circ)\big)$,
és így $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ foka $\mathbb{Q}\big(\cos(20^\circ)\big)$ fölött 1 vagy 2
(hiszen $\sqrt{\cos(20^\circ)^2 - 1}$-gyel való bővítéssel kapható).
A $\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}\big(\cos(20^\circ)\big) \leq \mathbb{Q}(\varepsilon)$ láncból $\mathrm{gr}_{\mathbb{Q}}\big(\cos(20^\circ)\big) = 3$ vagy 6.
Egyik sem 2-hatvány. $\square$

$\cos(2\pi/n)$ foka

Láttuk: $\varepsilon = \cos(20^\circ) + i\sin(20^\circ)$ foka $\mathbb{Q}$ fölött $\varphi(18) = 6$.
Nyilván $\varepsilon^{-1} = \overline{\varepsilon} = \cos(20^\circ) - i\sin(20^\circ) \in \mathbb{Q}(\varepsilon)$, és így
$\cos(20^\circ) = (\varepsilon + \overline{\varepsilon})/2 \in \mathbb{Q}(\varepsilon)$, azaz $\mathbb{Q}\big(\cos(20^\circ)\big) \leq \mathbb{Q}(\varepsilon)$.
Továbbá $\big(i\sin(20^\circ)\big)^2 = \cos(20^\circ)^2 - 1 \in \mathbb{Q}\big(\cos(20^\circ)\big)$,
és így $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ foka $\mathbb{Q}\big(\cos(20^\circ)\big)$ fölött 1 vagy 2
(hiszen $\sqrt{\cos(20^\circ)^2 - 1}$-gyel való bővítéssel kapható).
A $\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}\big(\cos(20^\circ)\big) \leq \mathbb{Q}(\varepsilon)$ láncból $\mathrm{gr}_{\mathbb{Q}}\big(\cos(20^\circ)\big) = 3$ vagy 6.
Egyik sem 2-hatvány. $\square$

Ez nyilván általánosítható, azaz beláttuk:

$\cos(2\pi/n)$ foka

Láttuk: $\varepsilon = \cos(20^\circ) + i\sin(20^\circ)$ foka $\mathbb{Q}$ fölött $\varphi(18) = 6$.
Nyilván $\varepsilon^{-1} = \overline{\varepsilon} = \cos(20^\circ) - i\sin(20^\circ) \in \mathbb{Q}(\varepsilon)$, és így
$\cos(20^\circ) = (\varepsilon + \overline{\varepsilon})/2 \in \mathbb{Q}(\varepsilon)$, azaz $\mathbb{Q}\left(\cos(20^\circ)\right) \leq \mathbb{Q}(\varepsilon)$.
Továbbá $\left(i\sin(20^\circ)\right)^2 = \cos(20^\circ)^2 - 1 \in \mathbb{Q}\left(\cos(20^\circ)\right)$,
és így $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ foka $\mathbb{Q}\left(\cos(20^\circ)\right)$ fölött 1 vagy 2
(hiszen $\sqrt{\cos(20^\circ)^2 - 1}$-gyel való bővítéssel kapható).
A $\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}\left(\cos(20^\circ)\right) \leq \mathbb{Q}(\varepsilon)$ láncból $\mathrm{gr}_{\mathbb{Q}}\left(\cos(20^\circ)\right) = 3$ vagy 6.
Egyik sem 2-hatvány. $\square$

Ez nyilván általánosítható, azaz beláttuk:

6.8.10. Állítás

Ha $n \geq 1$, akkor $\mathrm{gr}_{\mathbb{Q}}\left(\cos(2\pi/n)\right)$ értéke $\varphi(n)$, vagy $\varphi(n)/2$.

$\cos(2\pi/n)$ foka

Láttuk: $\varepsilon = \cos(20^\circ) + i\sin(20^\circ)$ foka $\mathbb{Q}$ fölött $\varphi(18) = 6$.
Nyilván $\varepsilon^{-1} = \overline{\varepsilon} = \cos(20^\circ) - i\sin(20^\circ) \in \mathbb{Q}(\varepsilon)$, és így
$\cos(20^\circ) = (\varepsilon + \overline{\varepsilon})/2 \in \mathbb{Q}(\varepsilon)$, azaz $\mathbb{Q}\left(\cos(20^\circ)\right) \le \mathbb{Q}(\varepsilon)$.
Továbbá $\left(i\sin(20^\circ)\right)^2 = \cos(20^\circ)^2 - 1 \in \mathbb{Q}\left(\cos(20^\circ)\right)$,
és így $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ foka $\mathbb{Q}\left(\cos(20^\circ)\right)$ fölött 1 vagy 2
(hiszen $\sqrt{\cos(20^\circ)^2 - 1}$-gyel való bővítéssel kapható).
A $\mathbb{Q} \le \mathbb{Q}\left(\cos(20^\circ)\right) \le \mathbb{Q}(\varepsilon)$ láncból $\mathrm{gr}_{\mathbb{Q}}\left(\cos(20^\circ)\right) = 3$ vagy 6.
Egyik sem 2-hatvány. $\square$

Ez nyilván általánosítható, azaz beláttuk:

6.8.10. Állítás

Ha $n \ge 1$, akkor $\mathrm{gr}_{\mathbb{Q}}\left(\cos(2\pi/n)\right)$ értéke $\varphi(n)$, vagy $\varphi(n)/2$.

A pontos érték a 6.8.24. Feladatban olvasható.

Szabályos sokszögek szerkeszthetősége

6.8.11. Tétel (félig bizonyítva)

Akkor és csak akkor szerkeszthető szabályos n-szög,

Szabályos sokszögek szerkeszthetősége

6.8.11. Tétel (félig bizonyítva)

Akkor és csak akkor szerkeszthető szabályos n-szög, ha a $\varphi(n)$ szám 2-hatvány.

Szabályos sokszögek szerkeszthetősége

6.8.11. Tétel (félig bizonyítva)

Akkor és csak akkor szerkeszthető szabályos n-szög, ha a $\varphi(n)$ szám 2-hatvány. Ez akkor és csak akkor igaz, ha $n = 2^m p_1 p_2 \dots p_r$,

Szabályos sokszögek szerkeszthetősége

6.8.11. Tétel (félig bizonyítva)

Akkor és csak akkor szerkeszthető szabályos n-szög, ha a $\varphi(n)$ szám 2-hatvány. Ez akkor és csak akkor igaz, ha $n = 2^m p_1 p_2 \dots p_r$, ahol $m \geq 0$

Szabályos sokszögek szerkeszthetősége

6.8.11. Tétel (félig bizonyítva)

Akkor és csak akkor szerkeszthető szabályos n-szög, ha a $\varphi(n)$ szám 2-hatvány. Ez akkor és csak akkor igaz, ha $n = 2^m p_1 p_2 \ldots p_r$, ahol $m \geq 0$ és a p_i számok páronként különböző Fermat-prímek

Szabályos sokszögek szerkeszthetősége

6.8.11. Tétel (félig bizonyítva)

Akkor és csak akkor szerkeszthető szabályos n-szög, ha a $\varphi(n)$ szám 2-hatvány. Ez akkor és csak akkor igaz, ha $n = 2^m p_1 p_2 \ldots p_r$, ahol $m \geq 0$ és a p_i számok páronként különböző Fermat-prímek (vagyis $2^{2^k} + 1$ alakú prímszámok).

Szabályos sokszögek szerkeszthetősége

6.8.11. Tétel (félig bizonyítva)

Akkor és csak akkor szerkeszthető szabályos n-szög, ha a $\varphi(n)$ szám 2-hatvány. Ez akkor és csak akkor igaz, ha $n = 2^m p_1 p_2 \ldots p_r$, ahol $m \geq 0$ és a p_i számok páronként különböző Fermat-prímek (vagyis $2^{2^k} + 1$ alakú prímszámok).

Mivel $\cos(2\pi/n)$ foka $\varphi(n)$ vagy $\varphi(n)/2$,

Szabályos sokszögek szerkeszthetősége

6.8.11. Tétel (félig bizonyítva)

Akkor és csak akkor szerkeszthető szabályos n-szög, ha a $\varphi(n)$ szám 2-hatvány. Ez akkor és csak akkor igaz, ha $n = 2^m p_1 p_2 \ldots p_r$, ahol $m \geq 0$ és a p_i számok páronként különböző Fermat-prímek (vagyis $2^{2^k} + 1$ alakú prímszámok).

Mivel $\cos(2\pi/n)$ foka $\varphi(n)$ vagy $\varphi(n)/2$, ha szerkeszthető szabályos n-szög, akkor $\varphi(n)$ 2-hatvány.

Szabályos sokszögek szerkeszthetősége

6.8.11. Tétel (félig bizonyítva)

Akkor és csak akkor szerkeszthető szabályos n-szög, ha a $\varphi(n)$ szám 2-hatvány. Ez akkor és csak akkor igaz, ha $n = 2^m p_1 p_2 \ldots p_r$, ahol $m \geq 0$ és a p_i számok páronként különböző Fermat-prímek (vagyis $2^{2^k} + 1$ alakú prímszámok).

Mivel $\cos(2\pi/n)$ foka $\varphi(n)$ vagy $\varphi(n)/2$,
ha szerkeszthető szabályos n-szög, akkor $\varphi(n)$ 2-hatvány.
A Fermat-prímes jellemzés elemi számelméleti gondolatmenet.

Szabályos sokszögek szerkeszthetősége

6.8.11. Tétel (félig bizonyítva)

Akkor és csak akkor szerkeszthető szabályos n-szög, ha a $\varphi(n)$ szám 2-hatvány. Ez akkor és csak akkor igaz, ha $n = 2^m p_1 p_2 \ldots p_r$, ahol $m \geq 0$ és a p_i számok páronként különböző Fermat-prímek (vagyis $2^{2^k} + 1$ alakú prímszámok).

Mivel $\cos(2\pi/n)$ foka $\varphi(n)$ vagy $\varphi(n)/2$,
ha szerkeszthető szabályos n-szög, akkor $\varphi(n)$ 2-hatvány.
A Fermat-prímes jellemzés elemi számelméleti gondolatmenet.
A megfordítás az alábbi tételből következik.

Szabályos sokszögek szerkeszthetősége

6.8.11. Tétel (félig bizonyítva)

Akkor és csak akkor szerkeszthető szabályos n-szög, ha a $\varphi(n)$ szám 2-hatvány. Ez akkor és csak akkor igaz, ha $n = 2^m p_1 p_2 \ldots p_r$, ahol $m \geq 0$ és a p_i számok páronként különböző Fermat-prímek (vagyis $2^{2^k} + 1$ alakú prímszámok).

Mivel $\cos(2\pi/n)$ foka $\varphi(n)$ vagy $\varphi(n)/2$,
ha szerkeszthető szabályos n-szög, akkor $\varphi(n)$ 2-hatvány.
A Fermat-prímes jellemzés elemi számelméleti gondolatmenet.
A megfordítás az alábbi tételből következik.

6.8.15. Tétel (NB)

Legyen α minimálpolinomja K_0 fölött t.

Szabályos sokszögek szerkeszthetősége

6.8.11. Tétel (félig bizonyítva)

Akkor és csak akkor szerkeszthető szabályos n-szög, ha a $\varphi(n)$ szám 2-hatvány. Ez akkor és csak akkor igaz, ha $n = 2^m p_1 p_2 \dots p_r$, ahol $m \geq 0$ és a p_i számok páronként különböző Fermat-prímek (vagyis $2^{2^k} + 1$ alakú prímszámok).

Mivel $\cos(2\pi/n)$ foka $\varphi(n)$ vagy $\varphi(n)/2$,
ha szerkeszthető szabályos n-szög, akkor $\varphi(n)$ 2-hatvány.
A Fermat-prímes jellemzés elemi számelméleti gondolatmenet.
A megfordítás az alábbi tételből következik.

6.8.15. Tétel (NB)

Legyen α minimálpolinomja K_0 fölött t. Ha t felbontási testének foka K_0 fölött 2-hatvány,

Szabályos sokszögek szerkeszthetősége

6.8.11. Tétel (félig bizonyítva)

Akkor és csak akkor szerkeszthető szabályos n-szög, ha a $\varphi(n)$ szám 2-hatvány. Ez akkor és csak akkor igaz, ha $n = 2^m p_1 p_2 \dots p_r$, ahol $m \geq 0$ és a p_i számok páronként különböző Fermat-prímek (vagyis $2^{2^k} + 1$ alakú prímszámok).

Mivel $\cos(2\pi/n)$ foka $\varphi(n)$ vagy $\varphi(n)/2$,
ha szerkeszthető szabályos n-szög, akkor $\varphi(n)$ 2-hatvány.
A Fermat-prímes jellemzés elemi számelméleti gondolatmenet.
A megfordítás az alábbi tételből következik.

6.8.15. Tétel (NB)

Legyen α minimálpolinomja K_0 fölött t. Ha t felbontási testének foka K_0 fölött 2-hatvány, akkor α szerkeszthető.

A gyökképlet létezése

Tanultuk

Másodfokú egyenletre gyökképlet:

A gyökképlet létezése

Tanultuk

Másodfokú egyenletre gyökképlet: középiskolában.

A gyökképlet létezése

Tanultuk

Másodfokú egyenletre gyökképlet: középiskolában.
Harmadfokú egyenlet:

A gyökképlet létezése

Tanultuk

Másodfokú egyenletre gyökképlet: középiskolában.
Harmadfokú egyenlet: Cardano-képlet.

A gyökképlet létezése

Tanultuk

Másodfokú egyenletre gyökképlet: középiskolában.
Harmadfokú egyenlet: Cardano-képlet.
Negyedfokú egyenlet:

A gyökképlet létezése

Tanultuk

Másodfokú egyenletre gyökképlet: középiskolában.
Harmadfokú egyenlet: Cardano-képlet.
Negyedfokú egyenlet: van képlet, de bonyolult (Ferrari).

A gyökképlet létezése

Tanultuk

Másodfokú egyenletre gyökképlet: középiskolában.
Harmadfokú egyenlet: Cardano-képlet.
Negyedfokú egyenlet: van képlet, de bonyolult (Ferrari).

Gyökképlet: négy alapművelet,

A gyökképlet létezése

Tanultuk

Másodfokú egyenletre gyökképlet: középiskolában.
Harmadfokú egyenlet: Cardano-képlet.
Negyedfokú egyenlet: van képlet, de bonyolult (Ferrari).

Gyökképlet: négy alapművelet, gyökvonás

A gyökképlet létezése

Tanultuk

Másodfokú egyenletre gyökképlet: középiskolában.
Harmadfokú egyenlet: Cardano-képlet.
Negyedfokú egyenlet: van képlet, de bonyolult (Ferrari).

Gyökképlet: négy alapművelet, gyökvonás az együtthatókból.

A gyökképlet létezése

Tanultuk

Másodfokú egyenletre gyökképlet: középiskolában.
Harmadfokú egyenlet: Cardano-képlet.
Negyedfokú egyenlet: van képlet, de bonyolult (Ferrari).

Gyökképlet: négy alapművelet, gyökvonás az együtthatókból.

6.9.7. Tétel (Abel-Ruffini, NB)

A legalább ötödfokú általános egyenletre nincs gyökképlet.

A gyökképlet létezése

Tanultuk

Másodfokú egyenletre gyökképlet: középiskolában.
Harmadfokú egyenlet: Cardano-képlet.
Negyedfokú egyenlet: van képlet, de bonyolult (Ferrari).

Gyökképlet: négy alapművelet, gyökvonás az együtthatókból.

6.9.7. Tétel (Abel-Ruffini, NB)

A legalább ötödfokú általános egyenletre nincs gyökképlet.
Sőt, az $x^5 - 4x + 2 = 0$-ra sincs (vö. 6.6.15. Feladat).

A gyökképlet létezése

Tanultuk

Másodfokú egyenletre gyökképlet: középiskolában.
Harmadfokú egyenlet: Cardano-képlet.
Negyedfokú egyenlet: van képlet, de bonyolult (Ferrari).

Gyökképlet: négy alapművelet, gyökvonás az együtthatókból.

6.9.7. Tétel (Abel-Ruffini, NB)

A legalább ötödfokú általános egyenletre nincs gyökképlet.
Sőt, az $x^5 - 4x + 2 = 0$-ra sincs (vö. 6.6.15. Feladat).

Tehát nem arról van szó, hogy még nem találtuk meg a képletet,

A gyökképlet létezése

Tanultuk

Másodfokú egyenletre gyökképlet: középiskolában.
Harmadfokú egyenlet: Cardano-képlet.
Negyedfokú egyenlet: van képlet, de bonyolult (Ferrari).

Gyökképlet: négy alapművelet, gyökvonás az együtthatókból.

6.9.7. Tétel (Abel-Ruffini, NB)

A legalább ötödfokú általános egyenletre nincs gyökképlet.
Sőt, az $x^5 - 4x + 2 = 0$-ra sincs (vö. 6.6.15. Feladat).

Tehát nem arról van szó, hogy még nem találtuk meg a képletet, hanem arról, hogy a képlet nem is létezik.

A gyökképlet létezése

Tanultuk

Másodfokú egyenletre gyökképlet: középiskolában.
Harmadfokú egyenlet: Cardano-képlet.
Negyedfokú egyenlet: van képlet, de bonyolult (Ferrari).

Gyökképlet: négy alapművelet, gyökvonás az együtthatókból.

6.9.7. Tétel (Abel-Ruffini, NB)

A legalább ötödfokú általános egyenletre nincs gyökképlet.
Sőt, az $x^5 - 4x + 2 = 0$-ra sincs (vö. 6.6.15. Feladat).

Tehát nem arról van szó, hogy még nem találtuk meg a képletet, hanem arról, hogy a képlet nem is létezik.
A bizonyítás testbővítéseket használ,

A gyökképlet létezése

Tanultuk

Másodfokú egyenletre gyökképlet: középiskolában.
Harmadfokú egyenlet: Cardano-képlet.
Negyedfokú egyenlet: van képlet, de bonyolult (Ferrari).

Gyökképlet: négy alapművelet, gyökvonás az együtthatókból.

6.9.7. Tétel (Abel-Ruffini, NB)

A legalább ötödfokú általános egyenletre nincs gyökképlet.
Sőt, az $x^5 - 4x + 2 = 0$-ra sincs (vö. 6.6.15. Feladat).

Tehát nem arról van szó, hogy még nem találtuk meg a képletet, hanem arról, hogy a képlet nem is létezik.
A bizonyítás testbővítéseket használ, és az egyenlet „szimmetriáit” vizsgálja.

A gyökképlet létezése

Tanultuk

Másodfokú egyenletre gyökképlet: középiskolában.
Harmadfokú egyenlet: Cardano-képlet.
Negyedfokú egyenlet: van képlet, de bonyolult (Ferrari).

Gyökképlet: négy alapművelet, gyökvonás az együtthatókból.

6.9.7. Tétel (Abel-Ruffini, NB)

A legalább ötödfokú általános egyenletre nincs gyökképlet.
Sőt, az $x^5 - 4x + 2 = 0$-ra sincs (vö. 6.6.15. Feladat).

Tehát nem arról van szó, hogy még nem találtuk meg a képletet, hanem arról, hogy a képlet nem is létezik.
A bizonyítás testbővítéseket használ, és az egyenlet „szimmetriáit” vizsgálja. Ez a Galois-elmélet kiindulópontja.