Algebra3, elemző szakirány

ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Előadó: Kiss Emil
ewkiss@cs.elte.hu

4. előadás

Ortogonalizálás

F7.2.4. Definíció

Legyen B bilineáris függvény a V vektortéren.

Ortogonalizálás

F7.2.4. Definíció

Legyen B bilineáris függvény a V vektortéren.
A $v, w \in V$ vektorok *B-ortogonálisak*,

Ortogonalizálás

F7.2.4. Definíció

Legyen B bilineáris függvény a V vektortéren.
A $v, w \in V$ vektorok *B-ortogonálisak*, ha $B(v, w) = 0$.

Ortogonalizálás

F7.2.4. Definíció

Legyen B bilineáris függvény a V vektortéren.
A $v, w \in V$ vektorok B-ortogonálisak, ha $B(v, w) = 0$.
A $b_1, \ldots, b_n$ bázis B-ortogonális,

Ortogonalizálás

F7.2.4. Definíció

Legyen B bilineáris függvény a V vektortéren.
A $v, w \in V$ vektorok B-ortogonálisak, ha $B(v, w) = 0$.
A $b_1, \ldots, b_n$ bázis B-ortogonális, ha $i \neq j \implies B(b_i, b_j) = 0$.

Ortogonalizálás

F7.2.4. Definíció

Legyen B bilineáris függvény a V vektortéren.
A $v, w \in V$ vektorok B-ortogonálisak, ha $B(v, w) = 0$.
A $b_1, \ldots, b_n$ bázis B-ortogonális, ha $i \neq j \implies B(b_i, b_j) = 0$.
A $b_1, \ldots, b_n$ bázis nyilván pontosan akkor B-ortogonális,

Ortogonalizálás

F7.2.4. Definíció

Legyen B bilineáris függvény a V vektortéren.
A $v, w \in V$ vektorok B-ortogonálisak, ha $B(v, w) = 0$.
A $b_1, \ldots, b_n$ bázis B-ortogonális, ha $i \neq j \implies B(b_i, b_j) = 0$.
A $b_1, \ldots, b_n$ bázis nyilván pontosan akkor B-ortogonális, ha B mátrixa ebben a bázisban diagonális.

Ortogonalizálás

F7.2.4. Definíció

Legyen B bilineáris függvény a V vektortéren.
A $v, w \in V$ vektorok B-ortogonálisak, ha $B(v, w) = 0$.
A $b_1, \ldots, b_n$ bázis B-ortogonális, ha $i \neq j \implies B(b_i, b_j) = 0$.
A $b_1, \ldots, b_n$ bázis nyilván pontosan akkor B-ortogonális, ha B mátrixa ebben a bázisban diagonális.

F7.2.3. Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, bilineáris függvény.

Ortogonalizálás

F7.2.4. Definíció

Legyen B bilineáris függvény a V vektortéren.
A $v, w \in V$ vektorok B-ortogonálisak, ha $B(v, w) = 0$.
A $b_1, \ldots, b_n$ bázis B-ortogonális, ha $i \neq j \implies B(b_i, b_j) = 0$.
A $b_1, \ldots, b_n$ bázis nyilván pontosan akkor B-ortogonális, ha B mátrixa ebben a bázisban diagonális.

F7.2.3. Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény.

Ortogonalizálás

F7.2.4. Definíció

Legyen B bilineáris függvény a V vektortéren.
A $v, w \in V$ vektorok B-ortogonálisak, ha $B(v, w) = 0$.
A $b_1, \dots, b_n$ bázis B-ortogonális, ha $i \neq j \implies B(b_i, b_j) = 0$.
A $b_1, \dots, b_n$ bázis nyilván pontosan akkor B-ortogonális, ha B mátrixa ebben a bázisban diagonális.

F7.2.3. Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Ekkor létezik B-ortogonális bázis.

Ortogonalizálás

F7.2.4. Definíció

Legyen B bilineáris függvény a V vektortéren.
A $v, w \in V$ vektorok B-ortogonálisak, ha $B(v, w) = 0$.
A $b_1, \ldots, b_n$ bázis B-ortogonális, ha $i \neq j \implies B(b_i, b_j) = 0$.
A $b_1, \ldots, b_n$ bázis nyilván pontosan akkor B-ortogonális, ha B mátrixa ebben a bázisban diagonális.

F7.2.3. Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Ekkor létezik B-ortogonális bázis.
Ha V euklideszi tér, akkor van B-ortogonális ONB is.

Ortogonalizálás

F7.2.4. Definíció

Legyen B bilineáris függvény a V vektortéren.
A $v, w \in V$ vektorok B-ortogonálisak, ha $B(v, w) = 0$.
A $b_1, \ldots, b_n$ bázis B-ortogonális, ha $i \neq j \implies B(b_i, b_j) = 0$.
A $b_1, \ldots, b_n$ bázis nyilván pontosan akkor B-ortogonális, ha B mátrixa ebben a bázisban diagonális.

F7.2.3. Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Ekkor létezik B-ortogonális bázis.
Ha V euklideszi tér, akkor van B-ortogonális ONB is.

Bizonyítás: háromféle eljárás (lásd Freud: 7.2. Szakasz).

Ortogonalizálás

F7.2.4. Definíció

Legyen B bilineáris függvény a V vektortéren.
A $v, w \in V$ vektorok B-ortogonálisak, ha $B(v, w) = 0$.
A $b_1, \ldots, b_n$ bázis B-ortogonális, ha $i \neq j \implies B(b_i, b_j) = 0$.
A $b_1, \ldots, b_n$ bázis nyilván pontosan akkor B-ortogonális,
ha B mátrixa ebben a bázisban diagonális.

F7.2.3. Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Ekkor létezik B-ortogonális bázis.
Ha V euklideszi tér, akkor van B-ortogonális ONB is.

Bizonyítás: háromféle eljárás (lásd Freud: 7.2. Szakasz).
Módosított Gauss-elimináció,

Ortogonalizálás

F7.2.4. Definíció

Legyen B bilineáris függvény a V vektortéren.
A $v, w \in V$ vektorok B-ortogonálisak, ha $B(v, w) = 0$.
A $b_1, \ldots, b_n$ bázis B-ortogonális, ha $i \neq j \implies B(b_i, b_j) = 0$.
A $b_1, \ldots, b_n$ bázis nyilván pontosan akkor B-ortogonális, ha B mátrixa ebben a bázisban diagonális.

F7.2.3. Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Ekkor létezik B-ortogonális bázis.
Ha V euklideszi tér, akkor van B-ortogonális ONB is.

Bizonyítás: háromféle eljárás (lásd Freud: 7.2. Szakasz).
Módosított Gauss-elimináció, illetve Gram-Schmidt módszer.

Ortogonalizálás

F7.2.4. Definíció

Legyen B bilineáris függvény a V vektortéren.
A $v, w \in V$ vektorok B-ortogonálisak, ha $B(v, w) = 0$.
A $b_1, \dots, b_n$ bázis B-ortogonális, ha $i \neq j \implies B(b_i, b_j) = 0$.
A $b_1, \dots, b_n$ bázis nyilván pontosan akkor B-ortogonális, ha B mátrixa ebben a bázisban diagonális.

F7.2.3. Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Ekkor létezik B-ortogonális bázis.
Ha V euklideszi tér, akkor van B-ortogonális ONB is.

Bizonyítás: háromféle eljárás (lásd Freud: 7.2. Szakasz).
Módosított Gauss-elimináció, illetve Gram-Schmidt módszer.
B-ortogonális ONB keresése: sajátértékek segítségével.

Ortogonalizálás ONB-ben

Bizonyítás

Tudjuk, hogy $B(v, w) = \langle v, Aw \rangle$ alkalmas $A \in \mathrm{Hom}(V)$-re,

Ortogonalizálás ONB-ben

Bizonyítás

Tudjuk, hogy $B(v, w) = \langle v, Aw \rangle$ alkalmas $A \in \mathrm{Hom}(V)$-re, ahol A valósban szimmetrikus,

Ortogonalizálás ONB-ben

Bizonyítás

Tudjuk, hogy $B(v, w) = \langle v, Aw \rangle$ alkalmas $A \in \mathrm{Hom}(V)$-re, ahol A valósban szimmetrikus, komplexben önadjungált.

Ortogonalizálás ONB-ben

Bizonyítás

Tudjuk, hogy $B(v, w) = \langle v, Aw \rangle$ alkalmas $A \in \mathrm{Hom}(V)$-re, ahol A valósban szimmetrikus, komplexben önadjungált. Ezért A ONB-ben diagonalizálható

Ortogonalizálás ONB-ben

Bizonyítás

Tudjuk, hogy $B(v, w) = \langle v, Aw \rangle$ alkalmas $A \in \mathrm{Hom}(V)$-re, ahol A valósban szimmetrikus, komplexben önadjungált. Ezért A ONB-ben diagonalizálható (valósban főtengelytétel).

Ortogonalizálás ONB-ben

Bizonyítás

Tudjuk, hogy $B(v, w) = \langle v, Aw \rangle$ alkalmas $A \in \mathrm{Hom}(V)$-re, ahol A valósban szimmetrikus, komplexben önadjungált.
Ezért A ONB-ben diagonalizálható (valósban főtengelytétel).
Legyen $b_1, \dots, b_n$ ilyen ONB.

Ortogonalizálás ONB-ben

Bizonyítás

Tudjuk, hogy $B(v, w) = \langle v, Aw \rangle$ alkalmas $A \in \mathrm{Hom}(V)$-re, ahol A valósban szimmetrikus, komplexben önadjungált. Ezért A ONB-ben diagonalizálható (valósban főtengelytétel). Legyen $b_1, \ldots, b_n$ ilyen ONB. Belátjuk, hogy ez B-ortogonális.

Ortogonalizálás ONB-ben

Bizonyítás

Tudjuk, hogy $B(v, w) = \langle v, Aw \rangle$ alkalmas $A \in \mathrm{Hom}(V)$-re, ahol A valósban szimmetrikus, komplexben önadjungált. Ezért A ONB-ben diagonalizálható (valósban főtengelytétel). Legyen $b_1, \ldots, b_n$ ilyen ONB. Belátjuk, hogy ez B-ortogonális. Ha $Ab_j = \lambda_j b_j$,

Ortogonalizálás ONB-ben

Bizonyítás

Tudjuk, hogy $B(v, w) = \langle v, Aw \rangle$ alkalmas $A \in \mathrm{Hom}(V)$-re, ahol A valósban szimmetrikus, komplexben önadjungált. Ezért A ONB-ben diagonalizálható (valósban főtengelytétel). Legyen $b_1, \dots, b_n$ ilyen ONB. Belátjuk, hogy ez B-ortogonális. Ha $Ab_j = \lambda_j b_j$, akkor $B(b_i, b_j) = \langle b_i, Ab_j \rangle$

Ortogonalizálás ONB-ben

Bizonyítás

Tudjuk, hogy $B(v, w) = \langle v, Aw \rangle$ alkalmas $A \in \mathrm{Hom}(V)$-re, ahol A valósban szimmetrikus, komplexben önadjungált. Ezért A ONB-ben diagonalizálható (valósban főtengelytétel). Legyen $b_1, \ldots, b_n$ ilyen ONB. Belátjuk, hogy ez B-ortogonális. Ha $Ab_j = \lambda_j b_j$, akkor $B(b_i, b_j) = \langle b_i, Ab_j \rangle = \lambda_j \langle b_i, b_j \rangle$,

Ortogonalizálás ONB-ben

Bizonyítás

Tudjuk, hogy $B(v, w) = \langle v, Aw \rangle$ alkalmas $A \in \mathrm{Hom}(V)$-re, ahol A valósban szimmetrikus, komplexben önadjungált. Ezért A ONB-ben diagonalizálható (valósban főtengelytétel). Legyen $b_1, \ldots, b_n$ ilyen ONB. Belátjuk, hogy ez B-ortogonális. Ha $Ab_j = \lambda_j b_j$, akkor $B(b_i, b_j) = \langle b_i, Ab_j \rangle = \lambda_j \langle b_i, b_j \rangle$, és ez nulla, ha $i \neq j$. $\square$

Ortogonalizálás ONB-ben

Bizonyítás

Tudjuk, hogy $B(v, w) = \langle v, Aw \rangle$ alkalmas $A \in \mathrm{Hom}(V)$-re, ahol A valósban szimmetrikus, komplexben önadjungált. Ezért A ONB-ben diagonalizálható (valósban főtengelytétel). Legyen $b_1, \ldots, b_n$ ilyen ONB. Belátjuk, hogy ez B-ortogonális. Ha $Ab_j = \lambda_j b_j$, akkor $B(b_i, b_j) = \langle b_i, Ab_j \rangle = \lambda_j \langle b_i, b_j \rangle$, és ez nulla, ha $i \neq j$. $\square$

$B(b_i, b_i) = \lambda_i$,

Ortogonalizálás ONB-ben

Bizonyítás

Tudjuk, hogy $B(v, w) = \langle v, Aw \rangle$ alkalmas $A \in \mathrm{Hom}(V)$-re, ahol A valósban szimmetrikus, komplexben önadjungált. Ezért A ONB-ben diagonalizálható (valósban főtengelytétel). Legyen $b_1, \ldots, b_n$ ilyen ONB. Belátjuk, hogy ez B-ortogonális. Ha $Ab_j = \lambda_j b_j$, akkor $B(b_i, b_j) = \langle b_i, Ab_j \rangle = \lambda_j \langle b_i, b_j \rangle$, és ez nulla, ha $i \neq j$. $\square$

$B(b_i, b_i) = \lambda_i$, azaz B mátrixában a főátló elemei éppen az A sajátértékei.

Ortogonalizálás ONB-ben

Bizonyítás

Tudjuk, hogy $B(v, w) = \langle v, Aw\rangle$ alkalmas $A \in \mathrm{Hom}(V)$-re, ahol A valósban szimmetrikus, komplexben önadjungált. Ezért A ONB-ben diagonalizálható (valósban főtengelytétel). Legyen $b_1, \dots, b_n$ ilyen ONB. Belátjuk, hogy ez B-ortogonális. Ha $Ab_j = \lambda_j b_j$, akkor $B(b_i, b_j) = \langle b_i, Ab_j\rangle = \lambda_j \langle b_i, b_j\rangle$, és ez nulla, ha $i \neq j$. □

$B(b_i, b_i) = \lambda_i$, azaz B mátrixában a főátló elemei éppen az A sajátértékei. Másképp fogalmazva: tudjuk, hogy A és B mátrixa mindegyik ONB-ben ugyanaz.

Ortogonalizálás ONB-ben

Bizonyítás

Tudjuk, hogy $B(v, w) = \langle v, Aw\rangle$ alkalmas $A \in \mathrm{Hom}(V)$-re, ahol A valósban szimmetrikus, komplexben önadjungált. Ezért A ONB-ben diagonalizálható (valósban főtengelytétel). Legyen $b_1, \dots, b_n$ ilyen ONB. Belátjuk, hogy ez B-ortogonális. Ha $Ab_j = \lambda_j b_j$, akkor $B(b_i, b_j) = \langle b_i, Ab_j\rangle = \lambda_j \langle b_i, b_j\rangle$, és ez nulla, ha $i \neq j$. $\square$

$B(b_i, b_i) = \lambda_i$, azaz B mátrixában a főátló elemei éppen az A sajátértékei. Másképp fogalmazva: tudjuk, hogy A és B mátrixa mindegyik ONB-ben ugyanaz. Legyen M a B mátrixa egy tetszőleges ONB-ben.

Ortogonalizálás ONB-ben

Bizonyítás

Tudjuk, hogy $B(v, w) = \langle v, Aw \rangle$ alkalmas $A \in \mathrm{Hom}(V)$-re, ahol A valósban szimmetrikus, komplexben önadjungált. Ezért A ONB-ben diagonalizálható (valósban főtengelytétel). Legyen $b_1, \ldots, b_n$ ilyen ONB. Belátjuk, hogy ez B-ortogonális. Ha $Ab_j = \lambda_j b_j$, akkor $B(b_i, b_j) = \langle b_i, Ab_j \rangle = \lambda_j \langle b_i, b_j \rangle$, és ez nulla, ha $i \neq j$. $\square$

$B(b_i, b_i) = \lambda_i$, azaz B mátrixában a főátló elemei éppen az A sajátértékei. Másképp fogalmazva: tudjuk, hogy A és B mátrixa mindegyik ONB-ben ugyanaz. Legyen M a B mátrixa egy tetszőleges ONB-ben. Ha az M mátrixot egy alkalmas ONB-ben diagonalizáljuk,

Ortogonalizálás ONB-ben

Bizonyítás

Tudjuk, hogy $B(v, w) = \langle v, Aw \rangle$ alkalmas $A \in \mathrm{Hom}(V)$-re,
ahol A valósban szimmetrikus, komplexben önadjungált.
Ezért A ONB-ben diagonalizálható (valósban főtengelytétel).
Legyen $b_1, \ldots, b_n$ ilyen ONB. Belátjuk, hogy ez B-ortogonális.
Ha $Ab_j = \lambda_j b_j$, akkor $B(b_i, b_j) = \langle b_i, Ab_j \rangle = \lambda_j \langle b_i, b_j \rangle$,
és ez nulla, ha $i \neq j$. $\square$

$B(b_i, b_i) = \lambda_i$, azaz B mátrixában a főátló elemei
éppen az A sajátértékei. Másképp fogalmazva:
tudjuk, hogy A és B mátrixa mindegyik ONB-ben ugyanaz.
Legyen M a B mátrixa egy tetszőleges ONB-ben.
Ha az M mátrixot egy alkalmas ONB-ben diagonalizáljuk,
akkor ugyanez az ONB B-ortogonális is lesz,

Ortogonalizálás ONB-ben

Bizonyítás

Tudjuk, hogy $B(v, w) = \langle v, Aw \rangle$ alkalmas $A \in \mathrm{Hom}(V)$-re, ahol A valósban szimmetrikus, komplexben önadjungált. Ezért A ONB-ben diagonalizálható (valósban főtengelytétel). Legyen $b_1, \ldots, b_n$ ilyen ONB. Belátjuk, hogy ez B-ortogonális. Ha $Ab_j = \lambda_j b_j$, akkor $B(b_i, b_j) = \langle b_i, Ab_j \rangle = \lambda_j \langle b_i, b_j \rangle$, és ez nulla, ha $i \neq j$. $\square$

$B(b_i, b_i) = \lambda_i$, azaz B mátrixában a főátló elemei éppen az A sajátértékei. Másképp fogalmazva: tudjuk, hogy A és B mátrixa mindegyik ONB-ben ugyanaz. Legyen M a B mátrixa egy tetszőleges ONB-ben. Ha az M mátrixot egy alkalmas ONB-ben diagonalizáljuk, akkor ugyanez az ONB B-ortogonális is lesz, és a két diagonális mátrix ugyanaz.

Négyzetösszeg alak

F7.2.5. Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény

Négyzetösszeg alak

F7.2.5. Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény és $b_1, \ldots, b_n$ B-ortogonális bázis.

Négyzetösszeg alak

F7.2.5. Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény és $b_1, \ldots, b_n$ B-ortogonális bázis.
Ekkor $\lambda_i = B(b_i, b_i)$ valós

Négyzetösszeg alak

F7.2.5. Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény és $b_1, \ldots, b_n$ B-ortogonális bázis.
Ekkor $\lambda_i = B(b_i, b_i)$ valós (hiszen $B(b_i, b_i) = \overline{B(b_i, b_i)}$).

Négyzetösszeg alak

F7.2.5. Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény és $b_1, \ldots, b_n$ B-ortogonális bázis.
Ekkor $\lambda_i = B(b_i, b_i)$ valós (hiszen $B(b_i, b_i) = \overline{B(b_i, b_i)}$).
Ha $\lambda_i > 0$, akkor legyen $c_i = b_i/\sqrt{\lambda_i}$.

Négyzetösszeg alak

F7.2.5. Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény és $b_1, \ldots, b_n$ B-ortogonális bázis.
Ekkor $\lambda_i = B(b_i, b_i)$ valós (hiszen $B(b_i, b_i) = \overline{B(b_i, b_i)}$).
Ha $\lambda_i > 0$, akkor legyen $c_i = b_i/\sqrt{\lambda_i}$.
Ha $\lambda_i < 0$, akkor legyen $c_i = b_i/\sqrt{-\lambda_i}$.

Négyzetösszeg alak

F7.2.5. Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény és $b_1, \ldots, b_n$ B-ortogonális bázis.
Ekkor $\lambda_i = B(b_i, b_i)$ valós (hiszen $B(b_i, b_i) = \overline{B(b_i, b_i)}$).
Ha $\lambda_i > 0$, akkor legyen $c_i = b_i/\sqrt{\lambda_i}$.
Ha $\lambda_i < 0$, akkor legyen $c_i = b_i/\sqrt{-\lambda_i}$.
Ekkor $c_1, \ldots, c_n$ is B-ortogonális bázis,

Négyzetösszeg alak

F7.2.5. Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény és $b_1, \ldots, b_n$ B-ortogonális bázis.
Ekkor $\lambda_i = B(b_i, b_i)$ valós (hiszen $B(b_i, b_i) = \overline{B(b_i, b_i)}$).
Ha $\lambda_i > 0$, akkor legyen $c_i = b_i/\sqrt{\lambda_i}$.
Ha $\lambda_i < 0$, akkor legyen $c_i = b_i/\sqrt{-\lambda_i}$.
Ekkor $c_1, \ldots, c_n$ is B-ortogonális bázis, melyben B mátrixának főátlójában minden elem 0, 1, vagy -1.

Négyzetösszeg alak

F7.2.5. Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény és $b_1, \ldots, b_n$ B-ortogonális bázis.
Ekkor $\lambda_i = B(b_i, b_i)$ valós (hiszen $B(b_i, b_i) = \overline{B(b_i, b_i)}$).
Ha $\lambda_i > 0$, akkor legyen $c_i = b_i/\sqrt{\lambda_i}$.
Ha $\lambda_i < 0$, akkor legyen $c_i = b_i/\sqrt{-\lambda_i}$.
Ekkor $c_1, \ldots, c_n$ is B-ortogonális bázis, melyben B mátrixának főátlójában minden elem 0, 1, vagy -1.
Ebben a bázisban a B-hez tartozó kvadratikus alak előjeles „négyzetösszeg”:

Négyzetösszeg alak

F7.2.5. Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény és $b_1, \ldots, b_n$ B-ortogonális bázis.
Ekkor $\lambda_i = B(b_i, b_i)$ valós (hiszen $B(b_i, b_i) = \overline{B(b_i, b_i)}$).
Ha $\lambda_i > 0$, akkor legyen $c_i = b_i/\sqrt{\lambda_i}$.
Ha $\lambda_i < 0$, akkor legyen $c_i = b_i/\sqrt{-\lambda_i}$.
Ekkor $c_1, \ldots, c_n$ is B-ortogonális bázis, melyben B mátrixának főátlójában minden elem 0, 1, vagy -1.
Ebben a bázisban a B-hez tartozó kvadratikus alak előjeles „négyzetösszeg”: ha $v = x_1 c_1 + \ldots + x_n c_n$, akkor

Négyzetösszeg alak

F7.2.5. Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény és $b_1, \ldots, b_n$ B-ortogonális bázis.
Ekkor $\lambda_i = B(b_i, b_i)$ valós (hiszen $B(b_i, b_i) = \overline{B(b_i, b_i)}$).
Ha $\lambda_i > 0$, akkor legyen $c_i = b_i/\sqrt{\lambda_i}$.
Ha $\lambda_i < 0$, akkor legyen $c_i = b_i/\sqrt{-\lambda_i}$.
Ekkor $c_1, \ldots, c_n$ is B-ortogonális bázis, melyben B mátrixának főátlójában minden elem 0, 1, vagy -1.
Ebben a bázisban a B-hez tartozó kvadratikus alak előjeles „négyzetösszeg”: ha $v = x_1 c_1 + \ldots + x_n c_n$, akkor $Q(v) = B(v, v) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i |x_i|^2$,

Négyzetösszeg alak

F7.2.5. Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény és $b_1, \ldots, b_n$ B-ortogonális bázis.
Ekkor $\lambda_i = B(b_i, b_i)$ valós (hiszen $B(b_i, b_i) = \overline{B(b_i, b_i)}$).
Ha $\lambda_i > 0$, akkor legyen $c_i = b_i/\sqrt{\lambda_i}$.
Ha $\lambda_i < 0$, akkor legyen $c_i = b_i/\sqrt{-\lambda_i}$.
Ekkor $c_1, \ldots, c_n$ is B-ortogonális bázis, melyben B mátrixának főátlójában minden elem 0, 1, vagy -1.
Ebben a bázisban a B-hez tartozó kvadratikus alak előjeles „négyzetösszeg”: ha $v = x_1c_1 + \ldots + x_nc_n$, akkor $Q(v) = B(v, v) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i |x_i|^2$, ahol $\mu_i \in \{0, 1, -1\}$.

Négyzetösszeg alak

F7.2.5. Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény és $b_1, \ldots, b_n$ B-ortogonális bázis.
Ekkor $\lambda_i = B(b_i, b_i)$ valós (hiszen $B(b_i, b_i) = \overline{B(b_i, b_i)}$).
Ha $\lambda_i > 0$, akkor legyen $c_i = b_i/\sqrt{\lambda_i}$.
Ha $\lambda_i < 0$, akkor legyen $c_i = b_i/\sqrt{-\lambda_i}$.
Ekkor $c_1, \ldots, c_n$ is B-ortogonális bázis, melyben B mátrixának főátlójában minden elem 0, 1, vagy -1.
Ebben a bázisban a B-hez tartozó kvadratikus alak előjeles „négyzetösszeg”: ha $v = x_1c_1 + \ldots + x_nc_n$, akkor $Q(v) = B(v, v) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i |x_i|^2$, ahol $\mu_i \in \{0, 1, -1\}$.

Valóban: akár $\lambda_i > 0$, akár $\lambda_i < 0$,

Négyzetösszeg alak

F7.2.5. Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény és $b_1, \ldots, b_n$ B-ortogonális bázis.
Ekkor $\lambda_i = B(b_i, b_i)$ valós (hiszen $B(b_i, b_i) = \overline{B(b_i, b_i)}$).
Ha $\lambda_i > 0$, akkor legyen $c_i = b_i/\sqrt{\lambda_i}$.
Ha $\lambda_i < 0$, akkor legyen $c_i = b_i/\sqrt{-\lambda_i}$.
Ekkor $c_1, \ldots, c_n$ is B-ortogonális bázis, melyben B mátrixának főátlójában minden elem 0, 1, vagy -1.
Ebben a bázisban a B-hez tartozó kvadratikus alak előjeles „négyzetösszeg”: ha $v = x_1c_1 + \ldots + x_nc_n$, akkor $Q(v) = B(v, v) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i |x_i|^2$, ahol $\mu_i \in \{0, 1, -1\}$.

Valóban: akár $\lambda_i > 0$, akár $\lambda_i < 0$,

$$B(c_i, c_i) = \frac{B(b_i, b_i)}{\overline{\sqrt{|\lambda_i|}}\sqrt{|\lambda_i|}}$$

Négyzetösszeg alak

F7.2.5. Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény és $b_1, \ldots, b_n$ B-ortogonális bázis.
Ekkor $\lambda_i = B(b_i, b_i)$ valós (hiszen $B(b_i, b_i) = \overline{B(b_i, b_i)}$).
Ha $\lambda_i > 0$, akkor legyen $c_i = b_i/\sqrt{\lambda_i}$.
Ha $\lambda_i < 0$, akkor legyen $c_i = b_i/\sqrt{-\lambda_i}$.
Ekkor $c_1, \ldots, c_n$ is B-ortogonális bázis, melyben B mátrixának főátlójában minden elem 0, 1, vagy -1.
Ebben a bázisban a B-hez tartozó kvadratikus alak előjeles „négyzetösszeg": ha $v = x_1c_1 + \ldots + x_nc_n$, akkor $Q(v) = B(v, v) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i |x_i|^2$, ahol $\mu_i \in \{0, 1, -1\}$.

Valóban: akár $\lambda_i > 0$, akár $\lambda_i < 0$,

$$B(c_i, c_i) = \frac{B(b_i, b_i)}{\overline{\sqrt{|\lambda_i|}}\sqrt{|\lambda_i|}} = \frac{\lambda_i}{|\lambda_i|}$$

Négyzetösszeg alak

F7.2.5. Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény és $b_1, \ldots, b_n$ B-ortogonális bázis.
Ekkor $\lambda_i = B(b_i, b_i)$ valós (hiszen $B(b_i, b_i) = \overline{B(b_i, b_i)}$).
Ha $\lambda_i > 0$, akkor legyen $c_i = b_i / \sqrt{\lambda_i}$.
Ha $\lambda_i < 0$, akkor legyen $c_i = b_i / \sqrt{-\lambda_i}$.
Ekkor $c_1, \ldots, c_n$ is B-ortogonális bázis, melyben B mátrixának főátlójában minden elem 0, 1, vagy -1.
Ebben a bázisban a B-hez tartozó kvadratikus alak előjeles „négyzetösszeg”: ha $v = x_1 c_1 + \ldots + x_n c_n$, akkor $Q(v) = B(v, v) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i |x_i|^2$, ahol $\mu_i \in \{0, 1, -1\}$.

Valóban: akár $\lambda_i > 0$, akár $\lambda_i < 0$,

$$B(c_i, c_i) = \frac{B(b_i, b_i)}{\overline{\sqrt{|\lambda_i|}}\sqrt{|\lambda_i|}} = \frac{\lambda_i}{|\lambda_i|} = \pm 1.$$

□

A tehetetlenségi tétel

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény.

A tehetetlenségi tétel

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B-ortogonális bázist,

A tehetetlenségi tétel

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B-ortogonális bázist, az ebben felírt mátrix főátlójában szereplő pozitív, nulla és negatív elemek száma

A tehetetlenségi tétel

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B-ortogonális bázist, az ebben felírt mátrix főátlójában szereplő pozitív, nulla és negatív elemek száma csak B-től függ,

A tehetetlenségi tétel

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B-ortogonális bázist, az ebben felírt mátrix főátlójában szereplő pozitív, nulla és negatív elemek száma csak B-től függ, a bázistól nem.

A tehetetlenségi tétel

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B-ortogonális bázist, az ebben felírt mátrix főátlójában szereplő pozitív, nulla és negatív elemek száma csak B-től függ, a bázistól nem.

Bizonyítás

Elég belátni, hogy a pozitív elemek száma nem függ a bázistól.

A tehetetlenségi tétel

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B-ortogonális bázist, az ebben felírt mátrix főátlójában szereplő pozitív, nulla és negatív elemek száma csak B-től függ, a bázistól nem.

Bizonyítás

Elég belátni, hogy a pozitív elemek száma nem függ a bázistól. Ezt ugyanis $-B$-re alkalmazva kapjuk,

A tehetetlenségi tétel

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B-ortogonális bázist, az ebben felírt mátrix főátlójában szereplő pozitív, nulla és negatív elemek száma csak B-től függ, a bázistól nem.

Bizonyítás

Elég belátni, hogy a pozitív elemek száma nem függ a bázistól. Ezt ugyanis $-B$-re alkalmazva kapjuk, hogy a negatív elemek száma sem függ a bázistól.

A tehetetlenségi tétel

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B-ortogonális bázist, az ebben felírt mátrix főátlójában szereplő pozitív, nulla és negatív elemek száma csak B-től függ, a bázistól nem.

Bizonyítás

Elég belátni, hogy a pozitív elemek száma nem függ a bázistól.
Ezt ugyanis $-B$-re alkalmazva kapjuk, hogy
a negatív elemek száma sem függ a bázistól.
A nullák számát a főátlóban pedig úgy kapjuk,

A tehetetlenségi tétel

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B-ortogonális bázist, az ebben felírt mátrix főátlójában szereplő pozitív, nulla és negatív elemek száma csak B-től függ, a bázistól nem.

Bizonyítás

Elég belátni, hogy a pozitív elemek száma nem függ a bázistól.
Ezt ugyanis $-B$-re alkalmazva kapjuk, hogy
a negatív elemek száma sem függ a bázistól.
A nullák számát a főátlóban pedig úgy kapjuk, hogy a pozitív és a negatív elemek számát kivonjuk a tér dimenziójából,

A tehetetlenségi tétel

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B-ortogonális bázist, az ebben felírt mátrix főátlójában szereplő pozitív, nulla és negatív elemek száma csak B-től függ, a bázistól nem.

Bizonyítás

Elég belátni, hogy a pozitív elemek száma nem függ a bázistól. Ezt ugyanis $-B$-re alkalmazva kapjuk, hogy a negatív elemek száma sem függ a bázistól. A nullák számát a főátlóban pedig úgy kapjuk, hogy a pozitív és a negatív elemek számát kivonjuk a tér dimenziójából, tehát akkor a nullák száma sem függ a bázistól.

Lemma a tehetetlenségi tételhez

Lemma

Legyen $v_1, \ldots, v_k$ és $w_1, \ldots, w_\ell$ két független,

Lemma a tehetetlenségi tételhez

Lemma

Legyen $v_1, \ldots, v_k$ és $w_1, \ldots, w_\ell$ két független, B-ortogonális vektorrendszer.

Lemma a tehetetlenségi tételhez

Lemma

Legyen $v_1, \ldots, v_k$ és $w_1, \ldots, w_\ell$ két független, B-ortogonális vektorrendszer. Tegyük föl, hogy $B(v_i, v_i) > 0$

Lemma a tehetetlenségi tételhez

Lemma

Legyen $v_1, \ldots, v_k$ és $w_1, \ldots, w_\ell$ két független, B-ortogonális vektorrendszer. Tegyük föl, hogy $B(v_i, v_i) > 0$ és $B(w_j, w_j) \leq 0$

Lemma a tehetetlenségi tételhez

Lemma

Legyen $v_1, \dots, v_k$ és $w_1, \dots, w_\ell$ két független, B-ortogonális vektorrendszer. Tegyük föl, hogy $B(v_i, v_i) > 0$ és $B(w_j, w_j) \leq 0$ minden i, j-re.

Lemma a tehetetlenségi tételhez

Lemma

Legyen $v_1, \dots, v_k$ és $w_1, \dots, w_\ell$ két független, B-ortogonális vektorrendszer. Tegyük föl, hogy $B(v_i, v_i) > 0$ és $B(w_j, w_j) \leq 0$ minden i, j-re. Ekkor ezek a vektorok együtt is függetlenek.

Lemma a tehetetlenségi tételhez

Lemma

Legyen $v_1, \ldots, v_k$ és $w_1, \ldots, w_\ell$ két független, B-ortogonális vektorrendszer. Tegyük föl, hogy $B(v_i, v_i) > 0$ és $B(w_j, w_j) \leq 0$ minden i, j-re. Ekkor ezek a vektorok együtt is függetlenek.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $\sum x_i v_i + \sum y_j w_j = 0$

Lemma a tehetetlenségi tételhez

Lemma

Legyen $v_1, \ldots, v_k$ és $w_1, \ldots, w_\ell$ két független, B-ortogonális vektorrendszer. Tegyük föl, hogy $B(v_i, v_i) > 0$ és $B(w_j, w_j) \leq 0$ minden i, j-re. Ekkor ezek a vektorok együtt is függetlenek.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $\sum x_i v_i + \sum y_j w_j = 0$ (ahol x_i, y_j skalárok).

Lemma a tehetetlenségi tételhez

Lemma

Legyen $v_1, \ldots, v_k$ és $w_1, \ldots, w_\ell$ két független, B-ortogonális vektorrendszer. Tegyük föl, hogy $B(v_i, v_i) > 0$ és $B(w_j, w_j) \leq 0$ minden i, j-re. Ekkor ezek a vektorok együtt is függetlenek.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $\sum x_i v_i + \sum y_j w_j = 0$ (ahol x_i, y_j skalárok).
Legyen $v = \sum x_i v_i$

Lemma a tehetetlenségi tételhez

Lemma

Legyen $v_1, \ldots, v_k$ és $w_1, \ldots, w_\ell$ két független, B-ortogonális vektorrendszer. Tegyük föl, hogy $B(v_i, v_i) > 0$ és $B(w_j, w_j) \leq 0$ minden i, j-re. Ekkor ezek a vektorok együtt is függetlenek.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $\sum x_i v_i + \sum y_j w_j = 0$ (ahol x_i, y_j skalárok).
Legyen $v = \sum x_i v_i$ és $w = \sum y_j w_j$,

Lemma a tehetetlenségi tételhez

Lemma

Legyen $v_1, \ldots, v_k$ és $w_1, \ldots, w_\ell$ két független, B-ortogonális vektorrendszer. Tegyük föl, hogy $B(v_i, v_i) > 0$ és $B(w_j, w_j) \le 0$ minden i, j-re. Ekkor ezek a vektorok együtt is függetlenek.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $\sum x_i v_i + \sum y_j w_j = 0$ (ahol x_i, y_j skalárok).
Legyen $v = \sum x_i v_i$ és $w = \sum y_j w_j$, ekkor $v = -w$.

Lemma a tehetetlenségi tételhez

Lemma

Legyen $v_1, \ldots, v_k$ és $w_1, \ldots, w_\ell$ két független, B-ortogonális vektorrendszer. Tegyük föl, hogy $B(v_i, v_i) > 0$ és $B(w_j, w_j) \leq 0$ minden i, j-re. Ekkor ezek a vektorok együtt is függetlenek.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $\sum x_i v_i + \sum y_j w_j = 0$ (ahol x_i, y_j skalárok). Legyen $v = \sum x_i v_i$ és $w = \sum y_j w_j$, ekkor $v = -w$. Innen

$$B(v, v) = \sum B(v_i, v_i)|x_i|^2 \geq 0$$

Lemma a tehetetlenségi tételhez

Lemma

Legyen $v_1, \ldots, v_k$ és $w_1, \ldots, w_\ell$ két független, B-ortogonális vektorrendszer. Tegyük föl, hogy $B(v_i, v_i) > 0$ és $B(w_j, w_j) \leq 0$ minden i, j-re. Ekkor ezek a vektorok együtt is függetlenek.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $\sum x_i v_i + \sum y_j w_j = 0$ (ahol x_i, y_j skalárok). Legyen $v = \sum x_i v_i$ és $w = \sum y_j w_j$, ekkor $v = -w$. Innen

$$B(v, v) = \sum B(v_i, v_i)|x_i|^2 \geq 0$$

$$B(w, w) = \sum B(w_j, w_j)|y_i|^2 \leq 0\,.$$

Lemma a tehetetlenségi tételhez

Lemma

Legyen $v_1, \ldots, v_k$ és $w_1, \ldots, w_\ell$ két független, B-ortogonális vektorrendszer. Tegyük föl, hogy $B(v_i, v_i) > 0$ és $B(w_j, w_j) \leq 0$ minden i, j-re. Ekkor ezek a vektorok együtt is függetlenek.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $\sum x_i v_i + \sum y_j w_j = 0$ (ahol x_i, y_j skalárok). Legyen $v = \sum x_i v_i$ és $w = \sum y_j w_j$, ekkor $v = -w$. Innen

$$B(v, v) = \sum B(v_i, v_i)|x_i|^2 \geq 0$$

$$B(w, w) = \sum B(w_j, w_j)|y_i|^2 \leq 0\,.$$

De $B(v, v) = B(-w, -w) = B(w, w)$,

Lemma a tehetetlenségi tételhez

Lemma

Legyen $v_1, \ldots, v_k$ és $w_1, \ldots, w_\ell$ két független, B-ortogonális vektorrendszer. Tegyük föl, hogy $B(v_i, v_i) > 0$ és $B(w_j, w_j) \leq 0$ minden i, j-re. Ekkor ezek a vektorok együtt is függetlenek.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $\sum x_i v_i + \sum y_j w_j = 0$ (ahol x_i, y_j skalárok). Legyen $v = \sum x_i v_i$ és $w = \sum y_j w_j$, ekkor $v = -w$. Innen

$$B(v, v) = \sum B(v_i, v_i)|x_i|^2 \geq 0$$

$$B(w, w) = \sum B(w_j, w_j)|y_i|^2 \leq 0\,.$$

De $B(v, v) = B(-w, -w) = B(w, w)$, így mindkét összeg nulla.

Lemma a tehetetlenségi tételhez

Lemma

Legyen $v_1, \ldots, v_k$ és $w_1, \ldots, w_\ell$ két független, B-ortogonális vektorrendszer. Tegyük föl, hogy $B(v_i, v_i) > 0$ és $B(w_j, w_j) \leq 0$ minden i, j-re. Ekkor ezek a vektorok együtt is függetlenek.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $\sum x_i v_i + \sum y_j w_j = 0$ (ahol x_i, y_j skalárok). Legyen $v = \sum x_i v_i$ és $w = \sum y_j w_j$, ekkor $v = -w$. Innen

$$B(v, v) = \sum B(v_i, v_i)|x_i|^2 \geq 0$$

$$B(w, w) = \sum B(w_j, w_j)|y_i|^2 \leq 0\,.$$

De $B(v, v) = B(-w, -w) = B(w, w)$, így mindkét összeg nulla. Mivel $B(v_i, v_i) > 0$,

Lemma a tehetetlenségi tételhez

Lemma

Legyen $v_1, \ldots, v_k$ és $w_1, \ldots, w_\ell$ két független, B-ortogonális vektorrendszer. Tegyük föl, hogy $B(v_i, v_i) > 0$ és $B(w_j, w_j) \leq 0$ minden i, j-re. Ekkor ezek a vektorok együtt is függetlenek.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $\sum x_i v_i + \sum y_j w_j = 0$ (ahol x_i, y_j skalárok). Legyen $v = \sum x_i v_i$ és $w = \sum y_j w_j$, ekkor $v = -w$. Innen

$$B(v, v) = \sum B(v_i, v_i)|x_i|^2 \geq 0$$

$$B(w, w) = \sum B(w_j, w_j)|y_j|^2 \leq 0\,.$$

De $B(v, v) = B(-w, -w) = B(w, w)$, így mindkét összeg nulla. Mivel $B(v_i, v_i) > 0$, ez csak úgy lehet, ha $x_1 = \ldots = x_k = 0$.

Lemma a tehetetlenségi tételhez

Lemma

Legyen $v_1, \ldots, v_k$ és $w_1, \ldots, w_\ell$ két független, B-ortogonális vektorrendszer. Tegyük föl, hogy $B(v_i, v_i) > 0$ és $B(w_j, w_j) \leq 0$ minden i, j-re. Ekkor ezek a vektorok együtt is függetlenek.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $\sum x_i v_i + \sum y_j w_j = 0$ (ahol x_i, y_j skalárok). Legyen $v = \sum x_i v_i$ és $w = \sum y_j w_j$, ekkor $v = -w$. Innen

$$B(v, v) = \sum B(v_i, v_i)|x_i|^2 \geq 0$$

$$B(w, w) = \sum B(w_j, w_j)|y_i|^2 \leq 0\,.$$

De $B(v, v) = B(-w, -w) = B(w, w)$, így mindkét összeg nulla. Mivel $B(v_i, v_i) > 0$, ez csak úgy lehet, ha $x_1 = \ldots = x_k = 0$. Ezért $\sum y_j w_j = 0$,

Lemma a tehetetlenségi tételhez

Lemma

Legyen $v_1, \ldots, v_k$ és $w_1, \ldots, w_\ell$ két független, B-ortogonális vektorrendszer. Tegyük föl, hogy $B(v_i, v_i) > 0$ és $B(w_j, w_j) \leq 0$ minden i, j-re. Ekkor ezek a vektorok együtt is függetlenek.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $\sum x_i v_i + \sum y_j w_j = 0$ (ahol x_i, y_j skalárok). Legyen $v = \sum x_i v_i$ és $w = \sum y_j w_j$, ekkor $v = -w$. Innen

$$B(v, v) = \sum B(v_i, v_i)|x_i|^2 \geq 0$$

$$B(w, w) = \sum B(w_j, w_j)|y_j|^2 \leq 0\,.$$

De $B(v, v) = B(-w, -w) = B(w, w)$, így mindkét összeg nulla. Mivel $B(v_i, v_i) > 0$, ez csak úgy lehet, ha $x_1 = \ldots = x_k = 0$. Ezért $\sum y_j w_j = 0$, így a függetlenség miatt minden $y_j = 0$. $\square$

A tehetetlenségi tétel bizonyítása

Tegyük föl, hogy adott két B-ortogonális bázis.

A tehetetlenségi tétel bizonyítása

Tegyük föl, hogy adott két B-ortogonális bázis.
Legyen $n = \dim(V)$,

A tehetetlenségi tétel bizonyítása

Tegyük föl, hogy adott két B-ortogonális bázis.
Legyen $n = \dim(V)$, továbbá M_1 és M_2 a B mátrixa az első, illetve a második bázisban.

A tehetetlenségi tétel bizonyítása

Tegyük föl, hogy adott két B-ortogonális bázis.
Legyen $n = \dim(V)$, továbbá M_1 és M_2 a B mátrixa az első, illetve a második bázisban.
Jelölje k_1, illetve k_2 rendre az M_1, illetve M_2 főátlójában a pozitív elemek számát.

A tehetetlenségi tétel bizonyítása

Tegyük föl, hogy adott két B-ortogonális bázis.
Legyen $n = \dim(V)$, továbbá M_1 és M_2 a B mátrixa az első, illetve a második bázisban.
Jelölje k_1, illetve k_2 rendre az M_1, illetve M_2 főátlójában a pozitív elemek számát. Be kell látni, hogy $k_1 = k_2$.

A tehetetlenségi tétel bizonyítása

Tegyük föl, hogy adott két B-ortogonális bázis.
Legyen $n = \dim(V)$, továbbá M_1 és M_2 a B mátrixa az első, illetve a második bázisban.
Jelölje k_1, illetve k_2 rendre az M_1, illetve M_2 főátlójában a pozitív elemek számát. Be kell látni, hogy $k_1 = k_2$.
Az M_i főátlójában nyilván $n - k_i$ nempozitív elem van.

A tehetetlenségi tétel bizonyítása

Tegyük föl, hogy adott két B-ortogonális bázis.
Legyen $n = \dim(V)$, továbbá M_1 és M_2 a B mátrixa az első, illetve a második bázisban.
Jelölje k_1, illetve k_2 rendre az M_1, illetve M_2 főátlójában a pozitív elemek számát. Be kell látni, hogy $k_1 = k_2$.
Az M_i főátlójában nyilván $n - k_i$ nempozitív elem van.
Legyenek $v_1, \ldots, v_{k_1}$ az első bázisból azok a vektorok,

A tehetetlenségi tétel bizonyítása

Tegyük föl, hogy adott két B-ortogonális bázis.
Legyen $n = \dim(V)$, továbbá M_1 és M_2 a B mátrixa az első, illetve a második bázisban.
Jelölje k_1, illetve k_2 rendre az M_1, illetve M_2 főátlójában a pozitív elemek számát. Be kell látni, hogy $k_1 = k_2$.
Az M_i főátlójában nyilván $n - k_i$ nempozitív elem van.
Legyenek $v_1, \ldots, v_{k_1}$ az első bázisból azok a vektorok, melyekre $B(v_i, v_i) > 0$

A tehetetlenségi tétel bizonyítása

Tegyük föl, hogy adott két B-ortogonális bázis.
Legyen $n = \dim(V)$, továbbá M_1 és M_2 a B mátrixa az első, illetve a második bázisban.
Jelölje k_1, illetve k_2 rendre az M_1, illetve M_2 főátlójában a pozitív elemek számát. Be kell látni, hogy $k_1 = k_2$.
Az M_i főátlójában nyilván $n - k_i$ nempozitív elem van.
Legyenek $v_1, \ldots, v_{k_1}$ az első bázisból azok a vektorok, melyekre $B(v_i, v_i) > 0$ (ezek száma tehát k_1),

A tehetetlenségi tétel bizonyítása

Tegyük föl, hogy adott két B-ortogonális bázis.
Legyen $n = \dim(V)$, továbbá M_1 és M_2 a B mátrixa az első, illetve a második bázisban.
Jelölje k_1, illetve k_2 rendre az M_1, illetve M_2 főátlójában a pozitív elemek számát. Be kell látni, hogy $k_1 = k_2$.
Az M_i főátlójában nyilván $n - k_i$ nempozitív elem van.
Legyenek $v_1, \ldots, v_{k_1}$ az első bázisból azok a vektorok, melyekre $B(v_i, v_i) > 0$ (ezek száma tehát k_1),
továbbá $w_1, \ldots, w_{n-k_2}$ a második bázisból azok a vektorok,

A tehetetlenségi tétel bizonyítása

Tegyük föl, hogy adott két B-ortogonális bázis.
Legyen $n = \dim(V)$, továbbá M_1 és M_2 a B mátrixa az első, illetve a második bázisban.
Jelölje k_1, illetve k_2 rendre az M_1, illetve M_2 főátlójában a pozitív elemek számát. Be kell látni, hogy $k_1 = k_2$.
Az M_i főátlójában nyilván $n - k_i$ nempozitív elem van.
Legyenek $v_1, \ldots, v_{k_1}$ az első bázisból azok a vektorok, melyekre $B(v_i, v_i) > 0$ (ezek száma tehát k_1),
továbbá $w_1, \ldots, w_{n-k_2}$ a második bázisból azok a vektorok, melyekre $B(w_j, w_j) \leq 0$

A tehetetlenségi tétel bizonyítása

Tegyük föl, hogy adott két B-ortogonális bázis.
Legyen $n = \dim(V)$, továbbá M_1 és M_2 a B mátrixa az első, illetve a második bázisban.
Jelölje k_1, illetve k_2 rendre az M_1, illetve M_2 főátlójában a pozitív elemek számát. Be kell látni, hogy $k_1 = k_2$.
Az M_i főátlójában nyilván $n - k_i$ nempozitív elem van.
Legyenek $v_1, \ldots, v_{k_1}$ az első bázisból azok a vektorok, melyekre $B(v_i, v_i) > 0$ (ezek száma tehát k_1),
továbbá $w_1, \ldots, w_{n-k_2}$ a második bázisból azok a vektorok, melyekre $B(w_j, w_j) \leq 0$ (ezek száma $n - k_2$).

A tehetetlenségi tétel bizonyítása

Tegyük föl, hogy adott két B-ortogonális bázis.
Legyen $n = \dim(V)$, továbbá M_1 és M_2 a B mátrixa az első, illetve a második bázisban.
Jelölje k_1, illetve k_2 rendre az M_1, illetve M_2 főátlójában a pozitív elemek számát. Be kell látni, hogy $k_1 = k_2$.
Az M_i főátlójában nyilván $n - k_i$ nempozitív elem van.
Legyenek $v_1, \ldots, v_{k_1}$ az első bázisból azok a vektorok, melyekre $B(v_i, v_i) > 0$ (ezek száma tehát k_1),
továbbá $w_1, \ldots, w_{n-k_2}$ a második bázisból azok a vektorok, melyekre $B(w_j, w_j) \leq 0$ (ezek száma $n - k_2$).
A lemma miatt ezek együtt is függetlenek,

A tehetetlenségi tétel bizonyítása

Tegyük föl, hogy adott két B-ortogonális bázis.
Legyen $n = \dim(V)$, továbbá M_1 és M_2 a B mátrixa az első, illetve a második bázisban.
Jelölje k_1, illetve k_2 rendre az M_1, illetve M_2 főátlójában a pozitív elemek számát. Be kell látni, hogy $k_1 = k_2$.
Az M_i főátlójában nyilván $n - k_i$ nempozitív elem van.
Legyenek $v_1, \ldots, v_{k_1}$ az első bázisból azok a vektorok, melyekre $B(v_i, v_i) > 0$ (ezek száma tehát k_1),
továbbá $w_1, \ldots, w_{n-k_2}$ a második bázisból azok a vektorok, melyekre $B(w_j, w_j) \leq 0$ (ezek száma $n - k_2$).
A lemma miatt ezek együtt is függetlenek, így
$k_1 + (n - k_2) \leq \dim(V) = n$,

A tehetetlenségi tétel bizonyítása

Tegyük föl, hogy adott két B-ortogonális bázis.
Legyen $n = \dim(V)$, továbbá M_1 és M_2 a B mátrixa az első, illetve a második bázisban.
Jelölje k_1, illetve k_2 rendre az M_1, illetve M_2 főátlójában a pozitív elemek számát. Be kell látni, hogy $k_1 = k_2$.
Az M_i főátlójában nyilván $n - k_i$ nempozitív elem van.
Legyenek $v_1, \ldots, v_{k_1}$ az első bázisból azok a vektorok, melyekre $B(v_i, v_i) > 0$ (ezek száma tehát k_1),
továbbá $w_1, \ldots, w_{n-k_2}$ a második bázisból azok a vektorok, melyekre $B(w_j, w_j) \leq 0$ (ezek száma $n - k_2$).
A lemma miatt ezek együtt is függetlenek, így
$k_1 + (n - k_2) \leq \dim(V) = n$, ahonnan $k_1 \leq k_2$.

A tehetetlenségi tétel bizonyítása

Tegyük föl, hogy adott két B-ortogonális bázis.
Legyen $n = \dim(V)$, továbbá M_1 és M_2 a B mátrixa az első, illetve a második bázisban.
Jelölje k_1, illetve k_2 rendre az M_1, illetve M_2 főátlójában a pozitív elemek számát. Be kell látni, hogy $k_1 = k_2$.
Az M_i főátlójában nyilván $n - k_i$ nempozitív elem van.
Legyenek $v_1, \ldots, v_{k_1}$ az első bázisból azok a vektorok, melyekre $B(v_i, v_i) > 0$ (ezek száma tehát k_1),
továbbá $w_1, \ldots, w_{n-k_2}$ a második bázisból azok a vektorok, melyekre $B(w_j, w_j) \leq 0$ (ezek száma $n - k_2$).
A lemma miatt ezek együtt is függetlenek, így
$k_1 + (n - k_2) \leq \dim(V) = n$, ahonnan $k_1 \leq k_2$.
A két bázist megcserélve $k_2 \leq k_1$. $\square$

Kvadratikus alak karaktere

F7.3.2 Definíció, F7.3.3 Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény,

Kvadratikus alak karaktere

F7.3.2 Definíció, F7.3.3 Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, és Q a hozzá tartozó kvadratikus alak,

Kvadratikus alak karaktere

F7.3.2 Definíció, F7.3.3 Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, és Q a hozzá tartozó kvadratikus alak, továbbá M a B mátrixa egy B-ortogonális bázisban.

Kvadratikus alak karaktere

F7.3.2 Definíció, F7.3.3 Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, és Q a hozzá tartozó kvadratikus alak, továbbá M a B mátrixa egy B-ortogonális bázisban.

(1) Q pozitív definit,

Kvadratikus alak karaktere

F7.3.2 Definíció, F7.3.3 Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, és Q a hozzá tartozó kvadratikus alak, továbbá M a B mátrixa egy B-ortogonális bázisban.

(1) Q pozitív definit, ha $v \neq 0 \implies Q(v) > 0$.

Kvadratikus alak karaktere

F7.3.2 Definíció, F7.3.3 Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, és Q a hozzá tartozó kvadratikus alak, továbbá M a B mátrixa egy B-ortogonális bázisban.

(1) Q pozitív definit, ha $v \neq 0 \implies Q(v) > 0$.
(Az M mátrix főátlójában minden elem pozitív.)

Kvadratikus alak karaktere

F7.3.2 Definíció, F7.3.3 Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, és Q a hozzá tartozó kvadratikus alak, továbbá M a B mátrixa egy B-ortogonális bázisban.

(1) Q pozitív definit, ha $v \neq 0 \implies Q(v) > 0$.
(Az M mátrix főátlójában minden elem pozitív.)

(2) Q negatív definit,

Kvadratikus alak karaktere

F7.3.2 Definíció, F7.3.3 Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, és Q a hozzá tartozó kvadratikus alak, továbbá M a B mátrixa egy B-ortogonális bázisban.

(1) Q pozitív definit, ha $v \neq 0 \implies Q(v) > 0$.
(Az M mátrix főátlójában minden elem pozitív.)

(2) Q negatív definit, ha $v \neq 0 \implies Q(v) < 0$.

Kvadratikus alak karaktere

F7.3.2 Definíció, F7.3.3 Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, és Q a hozzá tartozó kvadratikus alak, továbbá M a B mátrixa egy B-ortogonális bázisban.

(1) Q pozitív definit, ha $v \neq 0 \implies Q(v) > 0$.
(Az M mátrix főátlójában minden elem pozitív.)

(2) Q negatív definit, ha $v \neq 0 \implies Q(v) < 0$.
(Az M mátrix főátlójában minden elem negatív.)

Kvadratikus alak karaktere

F7.3.2 Definíció, F7.3.3 Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, és Q a hozzá tartozó kvadratikus alak, továbbá M a B mátrixa egy B-ortogonális bázisban.

(1) Q pozitív definit, ha $v \neq 0 \implies Q(v) > 0$.
(Az M mátrix főátlójában minden elem pozitív.)

(2) Q negatív definit, ha $v \neq 0 \implies Q(v) < 0$.
(Az M mátrix főátlójában minden elem negatív.)

(3) Q pozitív szemidefinit,

Kvadratikus alak karaktere

F7.3.2 Definíció, F7.3.3 Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, és Q a hozzá tartozó kvadratikus alak, továbbá M a B mátrixa egy B-ortogonális bázisban.

(1) Q pozitív definit, ha $v \neq 0 \implies Q(v) > 0$.
(Az M mátrix főátlójában minden elem pozitív.)

(2) Q negatív definit, ha $v \neq 0 \implies Q(v) < 0$.
(Az M mátrix főátlójában minden elem negatív.)

(3) Q pozitív szemidefinit, ha $(\forall v) Q(v) \geq 0$.

Kvadratikus alak karaktere

F7.3.2 Definíció, F7.3.3 Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, és Q a hozzá tartozó kvadratikus alak, továbbá M a B mátrixa egy B-ortogonális bázisban.

(1) Q pozitív definit, ha $v \neq 0 \implies Q(v) > 0$.
(Az M mátrix főátlójában minden elem pozitív.)

(2) Q negatív definit, ha $v \neq 0 \implies Q(v) < 0$.
(Az M mátrix főátlójában minden elem negatív.)

(3) Q pozitív szemidefinit, ha $(\forall v) Q(v) \geq 0$.
(Az M mátrix főátlójában minden elem nemnegatív.)

Kvadratikus alak karaktere

F7.3.2 Definíció, F7.3.3 Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, és Q a hozzá tartozó kvadratikus alak, továbbá M a B mátrixa egy B-ortogonális bázisban.

(1) Q pozitív definit, ha $v \neq 0 \implies Q(v) > 0$.
(Az M mátrix főátlójában minden elem pozitív.)

(2) Q negatív definit, ha $v \neq 0 \implies Q(v) < 0$.
(Az M mátrix főátlójában minden elem negatív.)

(3) Q pozitív szemidefinit, ha $(\forall v) Q(v) \geq 0$.
(Az M mátrix főátlójában minden elem nemnegatív.)

(4) Q negatív szemidefinit,

Kvadratikus alak karaktere

F7.3.2 Definíció, F7.3.3 Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, és Q a hozzá tartozó kvadratikus alak, továbbá M a B mátrixa egy B-ortogonális bázisban.

(1) Q pozitív definit, ha $v \neq 0 \implies Q(v) > 0$.
(Az M mátrix főátlójában minden elem pozitív.)

(2) Q negatív definit, ha $v \neq 0 \implies Q(v) < 0$.
(Az M mátrix főátlójában minden elem negatív.)

(3) Q pozitív szemidefinit, ha $(\forall v) Q(v) \geq 0$.
(Az M mátrix főátlójában minden elem nemnegatív.)

(4) Q negatív szemidefinit, ha $(\forall v) Q(v) \leq 0$.

Kvadratikus alak karaktere

F7.3.2 Definíció, F7.3.3 Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, és Q a hozzá tartozó kvadratikus alak, továbbá M a B mátrixa egy B-ortogonális bázisban.

(1) Q pozitív definit, ha $v \neq 0 \implies Q(v) > 0$.
(Az M mátrix főátlójában minden elem pozitív.)

(2) Q negatív definit, ha $v \neq 0 \implies Q(v) < 0$.
(Az M mátrix főátlójában minden elem negatív.)

(3) Q pozitív szemidefinit, ha $(\forall v) Q(v) \geq 0$.
(Az M mátrix főátlójában minden elem nemnegatív.)

(4) Q negatív szemidefinit, ha $(\forall v) Q(v) \leq 0$.
(Az M mátrix főátlójában minden elem nempozitív.)

Kvadratikus alak karaktere

F7.3.2 Definíció, F7.3.3 Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, és Q a hozzá tartozó kvadratikus alak, továbbá M a B mátrixa egy B-ortogonális bázisban.

(1) Q pozitív definit, ha $v \neq 0 \implies Q(v) > 0$.
(Az M mátrix főátlójában minden elem pozitív.)

(2) Q negatív definit, ha $v \neq 0 \implies Q(v) < 0$.
(Az M mátrix főátlójában minden elem negatív.)

(3) Q pozitív szemidefinit, ha $(\forall v) Q(v) \geq 0$.
(Az M mátrix főátlójában minden elem nemnegatív.)

(4) Q negatív szemidefinit, ha $(\forall v) Q(v) \leq 0$.
(Az M mátrix főátlójában minden elem nempozitív.)

(5) Q indefinit,

Kvadratikus alak karaktere

F7.3.2 Definíció, F7.3.3 Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, és Q a hozzá tartozó kvadratikus alak, továbbá M a B mátrixa egy B-ortogonális bázisban.

(1) Q pozitív definit, ha $v \neq 0 \implies Q(v) > 0$.
(Az M mátrix főátlójában minden elem pozitív.)

(2) Q negatív definit, ha $v \neq 0 \implies Q(v) < 0$.
(Az M mátrix főátlójában minden elem negatív.)

(3) Q pozitív szemidefinit, ha $(\forall v) Q(v) \geq 0$.
(Az M mátrix főátlójában minden elem nemnegatív.)

(4) Q negatív szemidefinit, ha $(\forall v) Q(v) \leq 0$.
(Az M mátrix főátlójában minden elem nempozitív.)

(5) Q indefinit, ha pozitív és negatív értéket is felvesz.

Kvadratikus alak karaktere

F7.3.2 Definíció, F7.3.3 Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, és Q a hozzá tartozó kvadratikus alak, továbbá M a B mátrixa egy B-ortogonális bázisban.

(1) Q pozitív definit, ha $v \neq 0 \implies Q(v) > 0$.
(Az M mátrix főátlójában minden elem pozitív.)

(2) Q negatív definit, ha $v \neq 0 \implies Q(v) < 0$.
(Az M mátrix főátlójában minden elem negatív.)

(3) Q pozitív szemidefinit, ha $(\forall v) Q(v) \geq 0$.
(Az M mátrix főátlójában minden elem nemnegatív.)

(4) Q negatív szemidefinit, ha $(\forall v) Q(v) \leq 0$.
(Az M mátrix főátlójában minden elem nempozitív.)

(5) Q indefinit, ha pozitív és negatív értéket is felvesz.
(Az M mátrix főátlójában van pozitív és van negatív elem.)

Kvadratikus karakter és aldeterminánsok

F7.3.4 Tétel (NB)

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény,

Kvadratikus karakter és aldeterminánsok

F7.3.4 Tétel (NB)

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, Q a hozzá tartozó kvadratikus alak,

Kvadratikus karakter és aldeterminánsok

F7.3.4 Tétel (NB)

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, Q a hozzá tartozó kvadratikus alak, és M a B mátrixa egy nem feltétlenül B-ortogonális bázisban.

Kvadratikus karakter és aldeterminánsok

F7.3.4 Tétel (NB)

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, Q a hozzá tartozó kvadratikus alak, és M a B mátrixa egy nem feltétlenül B-ortogonális bázisban. Jelölje d_k az M mátrix első k sorából és első k oszlopából készített részmátrix determinánsát.

Kvadratikus karakter és aldeterminánsok

F7.3.4 Tétel (NB)

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, Q a hozzá tartozó kvadratikus alak, és M a B mátrixa egy nem feltétlenül B-ortogonális bázisban. Jelölje d_k az M mátrix első k sorából és első k oszlopából készített részmátrix determinánsát.

(1) A Q pontosan akkor pozitív definit,

Kvadratikus karakter és aldeterminánsok

F7.3.4 Tétel (NB)

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, Q a hozzá tartozó kvadratikus alak, és M a B mátrixa egy nem feltétlenül B-ortogonális bázisban. Jelölje d_k az M mátrix első k sorából és első k oszlopából készített részmátrix determinánsát.

(1) A Q pontosan akkor pozitív definit, ha minden $d_k > 0$.

Kvadratikus karakter és aldeterminánsok

F7.3.4 Tétel (NB)

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, Q a hozzá tartozó kvadratikus alak, és M a B mátrixa egy nem feltétlenül B-ortogonális bázisban. Jelölje d_k az M mátrix első k sorából és első k oszlopából készített részmátrix determinánsát.

(1) A Q pontosan akkor pozitív definit, ha minden $d_k > 0$.

(2) A Q pontosan akkor negatív definit, ha
$d_1 < 0$,

Kvadratikus karakter és aldeterminánsok

F7.3.4 Tétel (NB)

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, Q a hozzá tartozó kvadratikus alak, és M a B mátrixa egy nem feltétlenül B-ortogonális bázisban. Jelölje d_k az M mátrix első k sorából és első k oszlopából készített részmátrix determinánsát.

(1) A Q pontosan akkor pozitív definit, ha minden $d_k > 0$.

(2) A Q pontosan akkor negatív definit, ha
$d_1 < 0$, $d_2 > 0$,

Kvadratikus karakter és aldeterminánsok

F7.3.4 Tétel (NB)

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, Q a hozzá tartozó kvadratikus alak, és M a B mátrixa egy nem feltétlenül B-ortogonális bázisban. Jelölje d_k az M mátrix első k sorából és első k oszlopából készített részmátrix determinánsát.

(1) A Q pontosan akkor pozitív definit, ha minden $d_k > 0$.

(2) A Q pontosan akkor negatív definit, ha $d_1 < 0$, $d_2 > 0$, $d_3 < 0$,

Kvadratikus karakter és aldeterminánsok

F7.3.4 Tétel (NB)

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, Q a hozzá tartozó kvadratikus alak, és M a B mátrixa egy nem feltétlenül B-ortogonális bázisban. Jelölje d_k az M mátrix első k sorából és első k oszlopából készített részmátrix determinánsát.

(1) A Q pontosan akkor pozitív definit, ha minden $d_k > 0$.

(2) A Q pontosan akkor negatív definit, ha $d_1 < 0$, $d_2 > 0$, $d_3 < 0$, és így tovább,

Kvadratikus karakter és aldeterminánsok

F7.3.4 Tétel (NB)

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, Q a hozzá tartozó kvadratikus alak, és M a B mátrixa egy nem feltétlenül B-ortogonális bázisban. Jelölje d_k az M mátrix első k sorából és első k oszlopából készített részmátrix determinánsát.

(1) A Q pontosan akkor pozitív definit, ha minden $d_k > 0$.

(2) A Q pontosan akkor negatív definit, ha $d_1 < 0$, $d_2 > 0$, $d_3 < 0$, és így tovább, azaz $d_k > 0$ ha k páros

Kvadratikus karakter és aldeterminánsok

F7.3.4 Tétel (NB)

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, Q a hozzá tartozó kvadratikus alak, és M a B mátrixa egy nem feltétlenül B-ortogonális bázisban. Jelölje d_k az M mátrix első k sorából és első k oszlopából készített részmátrix determinánsát.

(1) A Q pontosan akkor pozitív definit, ha minden $d_k > 0$.

(2) A Q pontosan akkor negatív definit, ha $d_1 < 0$, $d_2 > 0$, $d_3 < 0$, és így tovább, azaz $d_k > 0$ ha k páros és $d_k < 0$ ha k páratlan.

Kvadratikus karakter és aldeterminánsok

F7.3.4 Tétel (NB)

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, Q a hozzá tartozó kvadratikus alak, és M a B mátrixa egy nem feltétlenül B-ortogonális bázisban. Jelölje d_k az M mátrix első k sorából és első k oszlopából készített részmátrix determinánsát.

(1) A Q pontosan akkor pozitív definit, ha minden $d_k > 0$.

(2) A Q pontosan akkor negatív definit, ha $d_1 < 0$, $d_2 > 0$, $d_3 < 0$, és így tovább, azaz $d_k > 0$ ha k páros és $d_k < 0$ ha k páratlan.

Ezt könnyű ellenőrizni, ha a bázis B-ortogonális (HF).

Kvadratikus karakter és aldeterminánsok

F7.3.4 Tétel (NB)

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, Q a hozzá tartozó kvadratikus alak, és M a B mátrixa egy nem feltétlenül B-ortogonális bázisban. Jelölje d_k az M mátrix első k sorából és első k oszlopából készített részmátrix determinánsát.

(1) A Q pontosan akkor pozitív definit, ha minden $d_k > 0$.

(2) A Q pontosan akkor negatív definit, ha $d_1 < 0$, $d_2 > 0$, $d_3 < 0$, és így tovább, azaz $d_k > 0$ ha k páros és $d_k < 0$ ha k páratlan.

Ezt könnyű ellenőrizni, ha a bázis B-ortogonális (HF). A kvadratikus karakter jelzőit B-re is alkalmazzuk.

Kvadratikus karakter és aldeterminánsok

F7.3.4 Tétel (NB)

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, Q a hozzá tartozó kvadratikus alak, és M a B mátrixa egy nem feltétlenül B-ortogonális bázisban. Jelölje d_k az M mátrix első k sorából és első k oszlopából készített részmátrix determinánsát.

(1) A Q pontosan akkor pozitív definit, ha minden $d_k > 0$.

(2) A Q pontosan akkor negatív definit, ha $d_1 < 0$, $d_2 > 0$, $d_3 < 0$, és így tovább, azaz $d_k > 0$ ha k páros és $d_k < 0$ ha k páratlan.

Ezt könnyű ellenőrizni, ha a bázis B-ortogonális (HF).
A kvadratikus karakter jelzőit B-re is alkalmazzuk.
A skaláris szorzatot tehát definiálhatjuk, mint pozitív definit

Kvadratikus karakter és aldeterminánsok

F7.3.4 Tétel (NB)

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, Q a hozzá tartozó kvadratikus alak, és M a B mátrixa egy nem feltétlenül B-ortogonális bázisban. Jelölje d_k az M mátrix első k sorából és első k oszlopából készített részmátrix determinánsát.

(1) A Q pontosan akkor pozitív definit, ha minden $d_k > 0$.

(2) A Q pontosan akkor negatív definit, ha $d_1 < 0$, $d_2 > 0$, $d_3 < 0$, és így tovább, azaz $d_k > 0$ ha k páros és $d_k < 0$ ha k páratlan.

Ezt könnyű ellenőrizni, ha a bázis B-ortogonális (HF).
A kvadratikus karakter jelzőit B-re is alkalmazzuk.
A skaláris szorzatot tehát definiálhatjuk, mint pozitív definit szimmetrikus, illetve Hermite-féle bilineáris függvényt.

Illusztráció másodrendű görbékkel

Tétel (Hajós: Bevezetés a geometriába, 47. §, NB).

Tekintsük az $ax^2 + by^2 + cxy = 1$ egyenletű görbét a síkon.

Illusztráció másodrendű görbékkel

Tétel (Hajós: Bevezetés a geometriába, 47. §, NB).

Tekintsük az $ax^2 + by^2 + cxy = 1$ egyenletű görbét a síkon. Ha a bal oldali kvadratikus alak

(1) pozitív definit,

Illusztráció másodrendű görbékkel

Tétel (Hajós: Bevezetés a geometriába, 47. §, NB).

Tekintsük az $ax^2 + by^2 + cxy = 1$ egyenletű görbét a síkon. Ha a bal oldali kvadratikus alak

(1) pozitív definit, akkor a görbe ellipszis.

Illusztráció másodrendű görbékkel

Tétel (Hajós: Bevezetés a geometriába, 47. §, NB).

Tekintsük az $ax^2 + by^2 + cxy = 1$ egyenletű görbét a síkon. Ha a bal oldali kvadratikus alak

(1) pozitív definit, akkor a görbe ellipszis.
Ez akkor teljesül, ha $a > 0$

Illusztráció másodrendű görbékkel

Tétel (Hajós: Bevezetés a geometriába, 47. §, NB).

Tekintsük az $ax^2 + by^2 + cxy = 1$ egyenletű görbét a síkon. Ha a bal oldali kvadratikus alak

(1) pozitív definit, akkor a görbe ellipszis.
Ez akkor teljesül, ha $a > 0$ és $c^2 < 4ab$.

Illusztráció másodrendű görbékkel

Tétel (Hajós: Bevezetés a geometriába, 47. §, NB).

Tekintsük az $ax^2 + by^2 + cxy = 1$ egyenletű görbét a síkon. Ha a bal oldali kvadratikus alak

(1) pozitív definit, akkor a görbe ellipszis.
Ez akkor teljesül, ha $a > 0$ és $c^2 < 4ab$.

(2) indefinit,

Illusztráció másodrendű görbékkel

Tétel (Hajós: Bevezetés a geometriába, 47. §, NB).

Tekintsük az $ax^2 + by^2 + cxy = 1$ egyenletű görbét a síkon. Ha a bal oldali kvadratikus alak

(1) pozitív definit, akkor a görbe ellipszis.
Ez akkor teljesül, ha $a > 0$ és $c^2 < 4ab$.

(2) indefinit, akkor a görbe hiperbola.

Illusztráció másodrendű görbékkel

Tétel (Hajós: Bevezetés a geometriába, 47. §, NB).

Tekintsük az $ax^2 + by^2 + cxy = 1$ egyenletű görbét a síkon. Ha a bal oldali kvadratikus alak

(1) pozitív definit, akkor a görbe ellipszis.
Ez akkor teljesül, ha $a > 0$ és $c^2 < 4ab$.

(2) indefinit, akkor a görbe hiperbola.
Ez akkor teljesül, ha $c^2 > 4ab$.

Illusztráció másodrendű görbékkel

Tétel (Hajós: Bevezetés a geometriába, 47. §, NB).

Tekintsük az $ax^2 + by^2 + cxy = 1$ egyenletű görbét a síkon.
Ha a bal oldali kvadratikus alak

(1) pozitív definit, akkor a görbe ellipszis.
Ez akkor teljesül, ha $a > 0$ és $c^2 < 4ab$.

(2) indefinit, akkor a görbe hiperbola.
Ez akkor teljesül, ha $c^2 > 4ab$.

Magyarázat: Legyen B a fenti kvadratikus alakhoz tartozó

szimmetrikus bilineáris függvény,

Illusztráció másodrendű görbékkel

Tétel (Hajós: Bevezetés a geometriába, 47. §, NB).

Tekintsük az $ax^2 + by^2 + cxy = 1$ egyenletű görbét a síkon.
Ha a bal oldali kvadratikus alak

(1) pozitív definit, akkor a görbe ellipszis.
Ez akkor teljesül, ha $a > 0$ és $c^2 < 4ab$.

(2) indefinit, akkor a görbe hiperbola.
Ez akkor teljesül, ha $c^2 > 4ab$.

Magyarázat: Legyen B a fenti kvadratikus alakhoz tartozó szimmetrikus bilineáris függvény, mátrixa $M = \begin{bmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{bmatrix}$.

Illusztráció másodrendű görbékkel

Tétel (Hajós: Bevezetés a geometriába, 47. §, NB).

Tekintsük az $ax^2 + by^2 + cxy = 1$ egyenletű görbét a síkon. Ha a bal oldali kvadratikus alak

(1) pozitív definit, akkor a görbe ellipszis.
Ez akkor teljesül, ha $a > 0$ és $c^2 < 4ab$.

(2) indefinit, akkor a görbe hiperbola.
Ez akkor teljesül, ha $c^2 > 4ab$.

Magyarázat: Legyen B a fenti kvadratikus alakhoz tartozó szimmetrikus bilineáris függvény, mátrixa $M = \begin{bmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{bmatrix}$.

Ennek determinánsa $ab - c^2/4$,

Illusztráció másodrendű görbékkel

Tétel (Hajós: Bevezetés a geometriába, 47. §, NB).

Tekintsük az $ax^2 + by^2 + cxy = 1$ egyenletű görbét a síkon. Ha a bal oldali kvadratikus alak

(1) pozitív definit, akkor a görbe ellipszis.
Ez akkor teljesül, ha $a > 0$ és $c^2 < 4ab$.

(2) indefinit, akkor a görbe hiperbola.
Ez akkor teljesül, ha $c^2 > 4ab$.

Magyarázat: Legyen B a fenti kvadratikus alakhoz tartozó szimmetrikus bilineáris függvény, mátrixa $M = \begin{bmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{bmatrix}$.

Ennek determinánsa $ab - c^2/4$, így karaktere leolvasható.

Illusztráció másodrendű görbékkel

Tétel (Hajós: Bevezetés a geometriába, 47. §, NB).

Tekintsük az $ax^2 + by^2 + cxy = 1$ egyenletű görbét a síkon. Ha a bal oldali kvadratikus alak

(1) pozitív definit, akkor a görbe ellipszis.
Ez akkor teljesül, ha $a > 0$ és $c^2 < 4ab$.

(2) indefinit, akkor a görbe hiperbola.
Ez akkor teljesül, ha $c^2 > 4ab$.

Magyarázat: Legyen B a fenti kvadratikus alakhoz tartozó szimmetrikus bilineáris függvény, mátrixa $M = \begin{bmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{bmatrix}$.
Ennek determinánsa $ab - c^2/4$, így karaktere leolvasható.
Diagonalizáljuk ezt ONB-ben,

Illusztráció másodrendű görbékkel

Tétel (Hajós: Bevezetés a geometriába, 47. §, NB).

Tekintsük az $ax^2 + by^2 + cxy = 1$ egyenletű görbét a síkon. Ha a bal oldali kvadratikus alak

(1) pozitív definit, akkor a görbe ellipszis.
Ez akkor teljesül, ha $a > 0$ és $c^2 < 4ab$.

(2) indefinit, akkor a görbe hiperbola.
Ez akkor teljesül, ha $c^2 > 4ab$.

Magyarázat: Legyen B a fenti kvadratikus alakhoz tartozó szimmetrikus bilineáris függvény, mátrixa $M = \begin{bmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{bmatrix}$.
Ennek determinánsa $ab - c^2/4$, így karaktere leolvasható. Diagonalizáljuk ezt ONB-ben, a főátló elemei legyenek u és v.

Illusztráció másodrendű görbékkel

Tétel (Hajós: Bevezetés a geometriába, 47. §, NB).

Tekintsük az $ax^2 + by^2 + cxy = 1$ egyenletű görbét a síkon. Ha a bal oldali kvadratikus alak

(1) pozitív definit, akkor a görbe ellipszis.
Ez akkor teljesül, ha $a > 0$ és $c^2 < 4ab$.

(2) indefinit, akkor a görbe hiperbola.
Ez akkor teljesül, ha $c^2 > 4ab$.

Magyarázat: Legyen B a fenti kvadratikus alakhoz tartozó szimmetrikus bilineáris függvény, mátrixa $M = \begin{bmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{bmatrix}$.
Ennek determinánsa $ab - c^2/4$, így karaktere leolvasható.
Diagonalizáljuk ezt ONB-ben, a főátló elemei legyenek u és v.
Az új koordinátarendszerben az egyenlet $ux^2 + vy^2 = 1$.