Algebra3, elemző szakirány

ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Előadó: Kiss Emil
ewkiss@cs.elte.hu

12. előadás

Önadjungált transzformációk

F8.5.4. Definíció

Legyen A lineáris transzformáció egy komplex euklideszi téren.

Önadjungált transzformációk

F8.5.4. Definíció

Legyen A lineáris transzformáció egy komplex euklideszi téren. Az A önadjungált, ha $A^* = A$.

Önadjungált transzformációk

F8.5.4. Definíció

Legyen A lineáris transzformáció egy komplex euklideszi téren. Az A önadjungált, ha $A^* = A$.

Emlékeztető: Unitér transzformáció: $A^* = A^{-1}$.

Önadjungált transzformációk

F8.5.4. Definíció

Legyen A lineáris transzformáció egy komplex euklideszi téren. Az A önadjungált, ha $A^* = A$.

Emlékeztető: Unitér transzformáció: $A^* = A^{-1}$.
Unitér $\iff$ normális,

Önadjungált transzformációk

F8.5.4. Definíció

Legyen A lineáris transzformáció egy komplex euklideszi téren. Az A önadjungált, ha $A^* = A$.

Emlékeztető: Unitér transzformáció: $A^* = A^{-1}$.
Unitér $\iff$ normális, és minden sajátérték abszolút értéke 1.

Önadjungált transzformációk

F8.5.4. Definíció

Legyen A lineáris transzformáció egy komplex euklideszi téren. Az A önadjungált, ha $A^* = A$.

Emlékeztető: Unitér transzformáció: $A^* = A^{-1}$.
Unitér $\iff$ normális, és minden sajátérték abszolút értéke 1.

F8.5.1. Feladat

Az A akkor és csak akkor önadjungált, ha normális,

Önadjungált transzformációk

F8.5.4. Definíció

Legyen A lineáris transzformáció egy komplex euklideszi téren. Az A önadjungált, ha $A^* = A$.

Emlékeztető: Unitér transzformáció: $A^* = A^{-1}$.
Unitér $\iff$ normális, és minden sajátérték abszolút értéke 1.

F8.5.1. Feladat

Az A akkor és csak akkor önadjungált, ha normális, és minden (komplex feletti) sajátértéke valós.

Önadjungált transzformációk

F8.5.4. Definíció

Legyen A lineáris transzformáció egy komplex euklideszi téren. Az A önadjungált, ha $A^* = A$.

Emlékeztető: Unitér transzformáció: $A^* = A^{-1}$.
Unitér $\iff$ normális, és minden sajátérték abszolút értéke 1.

F8.5.1. Feladat

Az A akkor és csak akkor önadjungált, ha normális, és minden (komplex feletti) sajátértéke valós.

Bizonyítás: Ha **b** ONB

Önadjungált transzformációk

F8.5.4. Definíció

Legyen A lineáris transzformáció egy komplex euklideszi téren.
Az A önadjungált, ha $A^* = A$.

Emlékeztető: Unitér transzformáció: $A^* = A^{-1}$.
Unitér $\iff$ normális, és minden sajátérték abszolút értéke 1.

F8.5.1. Feladat

Az A akkor és csak akkor önadjungált, ha normális,
és minden (komplex feletti) sajátértéke valós.

Bizonyítás: Ha $\mathbf{b}$ ONB és $[A]_{\mathbf{b}}$ diagonális,

Önadjungált transzformációk

F8.5.4. Definíció

Legyen A lineáris transzformáció egy komplex euklideszi téren. Az A önadjungált, ha $A^* = A$.

Emlékeztető: Unitér transzformáció: $A^* = A^{-1}$.
Unitér $\iff$ normális, és minden sajátérték abszolút értéke 1.

F8.5.1. Feladat

Az A akkor és csak akkor önadjungált, ha normális, és minden (komplex feletti) sajátértéke valós.

Bizonyítás: Ha $\mathbf{b}$ ONB és $[A]_\mathbf{b}$ diagonális, akkor $[A^*] = [A]$ azt jelenti, hogy minden λ sajátértékre $\overline{\lambda} = \lambda$,

Önadjungált transzformációk

F8.5.4. Definíció

Legyen A lineáris transzformáció egy komplex euklideszi téren. Az A önadjungált, ha $A^* = A$.

Emlékeztető: Unitér transzformáció: $A^* = A^{-1}$.
Unitér $\iff$ normális, és minden sajátérték abszolút értéke 1.

F8.5.1. Feladat

Az A akkor és csak akkor önadjungált, ha normális, és minden (komplex feletti) sajátértéke valós.

Bizonyítás: Ha $\mathbf{b}$ ONB és $[A]_{\mathbf{b}}$ diagonális, akkor $[A^*] = [A]$ azt jelenti, hogy minden λ sajátértékre $\overline{\lambda} = \lambda$, azaz λ valós

Önadjungált transzformációk

F8.5.4. Definíció

Legyen A lineáris transzformáció egy komplex euklideszi téren. Az A önadjungált, ha $A^* = A$.

Emlékeztető: Unitér transzformáció: $A^* = A^{-1}$.
Unitér $\iff$ normális, és minden sajátérték abszolút értéke 1.

F8.5.1. Feladat

Az A akkor és csak akkor önadjungált, ha normális, és minden (komplex feletti) sajátértéke valós.

Bizonyítás: Ha **b** ONB és $[A]_{\mathbf{b}}$ diagonális, akkor $[A^*] = [A]$ azt jelenti, hogy minden λ sajátértékre $\overline{\lambda} = \lambda$, azaz λ valós (hiszen a komplex sajátértékek a mátrix főátlójának elemei).

Önadjungált transzformációk

F8.5.4. Definíció

Legyen A lineáris transzformáció egy komplex euklideszi téren. Az A önadjungált, ha $A^* = A$.

Emlékeztető: Unitér transzformáció: $A^* = A^{-1}$.
Unitér $\iff$ normális, és minden sajátérték abszolút értéke 1.

F8.5.1. Feladat

Az A akkor és csak akkor önadjungált, ha normális, és minden (komplex feletti) sajátértéke valós.

Bizonyítás: Ha **b** ONB és $[A]_{\mathbf{b}}$ diagonális, akkor $[A^*] = [A]$ azt jelenti, hogy minden λ sajátértékre $\overline{\lambda} = \lambda$, azaz λ valós (hiszen a komplex sajátértékek a mátrix főátlójának elemei).
A felcserélhető önmagával

Önadjungált transzformációk

F8.5.4. Definíció

Legyen A lineáris transzformáció egy komplex euklideszi téren. Az A önadjungált, ha $A^* = A$.

Emlékeztető: Unitér transzformáció: $A^* = A^{-1}$.
Unitér $\iff$ normális, és minden sajátérték abszolút értéke 1.

F8.5.1. Feladat

Az A akkor és csak akkor önadjungált, ha normális, és minden (komplex feletti) sajátértéke valós.

Bizonyítás: Ha $\mathbf{b}$ ONB és $[A]_{\mathbf{b}}$ diagonális, akkor $[A^*] = [A]$ azt jelenti, hogy minden λ sajátértékre $\overline{\lambda} = \lambda$, azaz λ valós (hiszen a komplex sajátértékek a mátrix főátlójának elemei).
A felcserélhető önmagával így $A^* = A \implies A$ normális. $\square$

Szimmetrikus transzformációk

F8.6.2. Definíció

Legyen A lineáris transzformáció egy valós euklideszi téren.

Szimmetrikus transzformációk

F8.6.2. Definíció

Legyen A lineáris transzformáció egy valós euklideszi téren.
Az A szimmetrikus, ha $A^* = A$.

Szimmetrikus transzformációk

F8.6.2. Definíció

Legyen A lineáris transzformáció egy valós euklideszi téren. Az A szimmetrikus, ha $A^* = A$.

Ez azt jelenti, hogy minden ortonormált bázisban a mátrixa önmagának transzponáltja,

Szimmetrikus transzformációk

F8.6.2. Definíció

Legyen A lineáris transzformáció egy valós euklideszi téren.
Az A szimmetrikus, ha $A^* = A$.

Ez azt jelenti, hogy minden ortonormált bázisban a mátrixa önmagának transzponáltja, vagyis szimmetrikus mátrix.

Szimmetrikus transzformációk

F8.6.2. Definíció

Legyen A lineáris transzformáció egy valós euklideszi téren.
Az A szimmetrikus, ha $A^* = A$.

Ez azt jelenti, hogy minden ortonormált bázisban a mátrixa önmagának transzponáltja, vagyis szimmetrikus mátrix.

F8.6.2. Főtengelytétel

Az A akkor és csak akkor diagonalizálható (valós felett) ortonormált bázisban,

Szimmetrikus transzformációk

F8.6.2. Definíció

Legyen A lineáris transzformáció egy valós euklideszi téren. Az A szimmetrikus, ha $A^* = A$.

Ez azt jelenti, hogy minden ortonormált bázisban a mátrixa önmagának transzponáltja, vagyis szimmetrikus mátrix.

F8.6.2. Főtengelytétel

Az A akkor és csak akkor diagonalizálható (valós felett) ortonormált bázisban, ha szimmetrikus.

Szimmetrikus transzformációk

F8.6.2. Definíció

Legyen A lineáris transzformáció egy valós euklideszi téren. Az A szimmetrikus, ha $A^* = A$.

Ez azt jelenti, hogy minden ortonormált bázisban a mátrixa önmagának transzponáltja, vagyis szimmetrikus mátrix.

F8.6.2. Főtengelytétel

Az A akkor és csak akkor diagonalizálható (valós felett) ortonormált bázisban, ha szimmetrikus.

Bizonyítás

Ha $\mathbf{b}$ ONB és $[A]_{\mathbf{b}}$ diagonális,

Szimmetrikus transzformációk

F8.6.2. Definíció

Legyen A lineáris transzformáció egy valós euklideszi téren. Az A szimmetrikus, ha $A^* = A$.

Ez azt jelenti, hogy minden ortonormált bázisban a mátrixa önmagának transzponáltja, vagyis szimmetrikus mátrix.

F8.6.2. Főtengelytétel

Az A akkor és csak akkor diagonalizálható (valós felett) ortonormált bázisban, ha szimmetrikus.

Bizonyítás

Ha $\mathbf{b}$ ONB és $[A]_{\mathbf{b}}$ diagonális, akkor ez a mátrix szimmetrikus,

Szimmetrikus transzformációk

F8.6.2. Definíció

Legyen A lineáris transzformáció egy valós euklideszi téren. Az A szimmetrikus, ha $A^* = A$.

Ez azt jelenti, hogy minden ortonormált bázisban a mátrixa önmagának transzponáltja, vagyis szimmetrikus mátrix.

F8.6.2. Főtengelytétel

Az A akkor és csak akkor diagonalizálható (valós felett) ortonormált bázisban, ha szimmetrikus.

Bizonyítás

Ha $\mathbf{b}$ ONB és $[A]_{\mathbf{b}}$ diagonális, akkor ez a mátrix szimmetrikus, ezért A is szimmetrikus transzformáció.

A főtengelytétel bizonyítása

Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus,

A főtengelytétel bizonyítása

Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus, azaz $A^* = A$.

A főtengelytétel bizonyítása

Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus, azaz $A^* = A$.
Legyen **b** ONB és $M = [A]_{\mathbf{b}}$,

A főtengelytétel bizonyítása

Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus, azaz $A^* = A$.
Legyen $\mathbf{b}$ ONB és $M = [A]_{\mathbf{b}}$, ekkor M szimmetrikus mátrix.

A főtengelytétel bizonyítása

Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus, azaz $A^* = A$.
Legyen **b** ONB és $M = [A]_{\mathbf{b}}$, ekkor M szimmetrikus mátrix.
Mivel M valós mátrix,

A főtengelytétel bizonyítása

Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus, azaz $A^* = A$.
Legyen **b** ONB és $M = [A]_{\mathbf{b}}$, ekkor M szimmetrikus mátrix.
Mivel M valós mátrix, ezért önadjungált,

A főtengelytétel bizonyítása

Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus, azaz $A^* = A$. Legyen $\mathbf{b}$ ONB és $M = [A]_{\mathbf{b}}$, ekkor M szimmetrikus mátrix. Mivel M valós mátrix, ezért önadjungált, és így a most bizonyított tétel miatt a komplex sajátértékei mind valósak.

A főtengelytétel bizonyítása

Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus, azaz $A^* = A$.
Legyen **b** ONB és $M = [A]_{\mathbf{b}}$, ekkor M szimmetrikus mátrix.
Mivel M valós mátrix, ezért önadjungált, és így a most bizonyított tétel miatt a komplex sajátértékei mind valósak.
Tehát A karakterisztikus polinomjának gyökei valósak,

A főtengelytétel bizonyítása

Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus, azaz $A^* = A$.
Legyen **b** ONB és $M = [A]_{\mathbf{b}}$, ekkor M szimmetrikus mátrix.
Mivel M valós mátrix, ezért önadjungált, és így a most bizonyított tétel miatt a komplex sajátértékei mind valósak.
Tehát A karakterisztikus polinomjának gyökei valósak,
és így A-nak is van egy λ valós sajátértéke.

A főtengelytétel bizonyítása

Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus, azaz $A^* = A$.
Legyen $\mathbf{b}$ ONB és $M = [A]_{\mathbf{b}}$, ekkor M szimmetrikus mátrix.
Mivel M valós mátrix, ezért önadjungált, és így a most bizonyított tétel miatt a komplex sajátértékei mind valósak.
Tehát A karakterisztikus polinomjának gyökei valósak,
és így A-nak is van egy λ valós sajátértéke.
Ha v ehhez tartozó sajátvektor,

A főtengelytétel bizonyítása

Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus, azaz $A^* = A$.
Legyen $\mathbf{b}$ ONB és $M = [A]_{\mathbf{b}}$, ekkor M szimmetrikus mátrix.
Mivel M valós mátrix, ezért önadjungált, és így a most bizonyított tétel miatt a komplex sajátértékei mind valósak.
Tehát A karakterisztikus polinomjának gyökei valósak,
és így A-nak is van egy λ valós sajátértéke.
Ha v ehhez tartozó sajátvektor, és W az általa generált altér,

A főtengelytétel bizonyítása

Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus, azaz $A^* = A$.
Legyen $\mathbf{b}$ ONB és $M = [A]_{\mathbf{b}}$, ekkor M szimmetrikus mátrix.
Mivel M valós mátrix, ezért önadjungált, és így a most bizonyított tétel miatt a komplex sajátértékei mind valósak.
Tehát A karakterisztikus polinomjának gyökei valósak, és így A-nak is van egy λ valós sajátértéke.
Ha v ehhez tartozó sajátvektor, és W az általa generált altér, akkor W A-invariáns,

A főtengelytétel bizonyítása

Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus, azaz $A^* = A$.
Legyen **b** ONB és $M = [A]_{\mathbf{b}}$, ekkor M szimmetrikus mátrix.
Mivel M valós mátrix, ezért önadjungált, és így a most bizonyított tétel miatt a komplex sajátértékei mind valósak.
Tehát A karakterisztikus polinomjának gyökei valósak, és így A-nak is van egy λ valós sajátértéke.
Ha v ehhez tartozó sajátvektor, és W az általa generált altér, akkor W A-invariáns, ezért $W^{\perp}$ $A^* = A$-invariáns.

A főtengelytétel bizonyítása

Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus, azaz $A^* = A$.
Legyen **b** ONB és $M = [A]_{\mathbf{b}}$, ekkor M szimmetrikus mátrix.
Mivel M valós mátrix, ezért önadjungált, és így a most bizonyított tétel miatt a komplex sajátértékei mind valósak.
Tehát A karakterisztikus polinomjának gyökei valósak, és így A-nak is van egy λ valós sajátértéke.
Ha v ehhez tartozó sajátvektor, és W az általa generált altér, akkor W A-invariáns, ezért $W^\perp$ $A^* = A$-invariáns.
Ezért ugyanaz az indukció működik,

A főtengelytétel bizonyítása

Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus, azaz $A^* = A$.
Legyen $\mathbf{b}$ ONB és $M = [A]_{\mathbf{b}}$, ekkor M szimmetrikus mátrix.
Mivel M valós mátrix, ezért önadjungált, és így a most bizonyított tétel miatt a komplex sajátértékei mind valósak.
Tehát A karakterisztikus polinomjának gyökei valósak, és így A-nak is van egy λ valós sajátértéke.
Ha v ehhez tartozó sajátvektor, és W az általa generált altér, akkor W A-invariáns, ezért $W^{\perp}$ $A^* = A$-invariáns.
Ezért ugyanaz az indukció működik, mint a normális transzformációk esetében. $\square$

A főtengelytétel bizonyítása

Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus, azaz $A^* = A$.
Legyen **b** ONB és $M = [A]_{\mathbf{b}}$, ekkor M szimmetrikus mátrix.
Mivel M valós mátrix, ezért önadjungált, és így a most bizonyított tétel miatt a komplex sajátértékei mind valósak.
Tehát A karakterisztikus polinomjának gyökei valósak,
és így A-nak is van egy λ valós sajátértéke.
Ha v ehhez tartozó sajátvektor, és W az általa generált altér, akkor W A-invariáns, ezért $W^\perp$ $A^* = A$-invariáns.
Ezért ugyanaz az indukció működik, mint a normális transzformációk esetében. □

Megjegyzés: Az $Mv = \lambda v$ lineáris egyenletrendszer,

A főtengelytétel bizonyítása

Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus, azaz $A^* = A$.
Legyen **b** ONB és $M = [A]_{\mathbf{b}}$, ekkor M szimmetrikus mátrix.
Mivel M valós mátrix, ezért önadjungált, és így a most bizonyított tétel miatt a komplex sajátértékei mind valósak.
Tehát A karakterisztikus polinomjának gyökei valósak,
és így A-nak is van egy λ valós sajátértéke.
Ha v ehhez tartozó sajátvektor, és W az általa generált altér,
akkor W A-invariáns, ezért $W^\perp$ $A^* = A$-invariáns.
Ezért ugyanaz az indukció működik, mint a normális transzformációk esetében. $\square$

Megjegyzés: Az $Mv = \lambda v$ lineáris egyenletrendszer,
aminek megoldása a λ-hoz tartozó sajátvektorokat adja.

A főtengelytétel bizonyítása

Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus, azaz $A^* = A$.
Legyen $\mathbf{b}$ ONB és $M = [A]_\mathbf{b}$, ekkor M szimmetrikus mátrix.
Mivel M valós mátrix, ezért önadjungált, és így a most bizonyított tétel miatt a komplex sajátértékei mind valósak.
Tehát A karakterisztikus polinomjának gyökei valósak, és így A-nak is van egy λ valós sajátértéke.
Ha v ehhez tartozó sajátvektor, és W az általa generált altér, akkor W A-invariáns, ezért $W^\perp$ $A^* = A$-invariáns.
Ezért ugyanaz az indukció működik, mint a normális transzformációk esetében. □

Megjegyzés: Az $Mv = \lambda v$ lineáris egyenletrendszer, aminek megoldása a λ-hoz tartozó sajátvektorokat adja.
Azt azonban be kell látni, hogy van „elegendő” ortonormált valós sajátvektor.

A főtengelytétel bizonyítása

Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus, azaz $A^* = A$.
Legyen **b** ONB és $M = [A]_{\mathbf{b}}$, ekkor M szimmetrikus mátrix.
Mivel M valós mátrix, ezért önadjungált, és így a most bizonyított tétel miatt a komplex sajátértékei mind valósak.
Tehát A karakterisztikus polinomjának gyökei valósak, és így A-nak is van egy λ valós sajátértéke.
Ha v ehhez tartozó sajátvektor, és W az általa generált altér, akkor W A-invariáns, ezért $W^{\perp}$ $A^* = A$-invariáns.
Ezért ugyanaz az indukció működik, mint a normális transzformációk esetében. $\square$

Megjegyzés: Az $Mv = \lambda v$ lineáris egyenletrendszer, aminek megoldása a λ-hoz tartozó sajátvektorokat adja. Azt azonban be kell látni, hogy van „elegendő” ortonormált valós sajátvektor. Ez a fenti bizonyítás vége.

A főtengelytétel elnevezés magyarázata

Miért nevezzük az előbbi eredményt főtengelytételnek?

A főtengelytétel elnevezés magyarázata

Miért nevezzük az előbbi eredményt főtengelytételnek?

Tekintsük az $x^2 + 2y^2 = 1$ egyenletű ellipszist a síkon.

A főtengelytétel elnevezés magyarázata

Miért nevezzük az előbbi eredményt főtengelytételnek?

Tekintsük az $x^2 + 2y^2 = 1$ egyenletű ellipszist a síkon.
A két tengely a két koordinátatengely,

A főtengelytétel elnevezés magyarázata

Miért nevezzük az előbbi eredményt főtengelytételnek?

Tekintsük az $x^2 + 2y^2 = 1$ egyenletű ellipszist a síkon.
A két tengely a két koordinátatengely, így merőlegesek.

A főtengelytétel elnevezés magyarázata

Miért nevezzük az előbbi eredményt főtengelytételnek?

Tekintsük az $x^2 + 2y^2 = 1$ egyenletű ellipszist a síkon.
A két tengely a két koordinátatengely, így merőlegesek.
A fenti egyenletet átírhatjuk skaláris szorzat segítségével.

A főtengelytétel elnevezés magyarázata

Miért nevezzük az előbbi eredményt főtengelytételnek?

Tekintsük az $x^2 + 2y^2 = 1$ egyenletű ellipszist a síkon.
A két tengely a két koordinátatengely, így merőlegesek.
A fenti egyenletet átírhatjuk skaláris szorzat segítségével.

Legyen $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$

A főtengelytétel elnevezés magyarázata

Miért nevezzük az előbbi eredményt főtengelytételnek?

Tekintsük az $x^2 + 2y^2 = 1$ egyenletű ellipszist a síkon.
A két tengely a két koordinátatengely, így merőlegesek.
A fenti egyenletet átírhatjuk skaláris szorzat segítségével.

Legyen $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$,

A főtengelytétel elnevezés magyarázata

Miért nevezzük az előbbi eredményt főtengelytételnek?

Tekintsük az $x^2 + 2y^2 = 1$ egyenletű ellipszist a síkon.
A két tengely a két koordinátatengely, így merőlegesek.
A fenti egyenletet átírhatjuk skaláris szorzat segítségével.

Legyen $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, ekkor $Mv = \begin{bmatrix} x \\ 2y \\ -1 \end{bmatrix}$,

A főtengelytétel elnevezés magyarázata

Miért nevezzük az előbbi eredményt főtengelytételnek?

Tekintsük az $x^2 + 2y^2 = 1$ egyenletű ellipszist a síkon.
A két tengely a két koordinátatengely, így merőlegesek.
A fenti egyenletet átírhatjuk skaláris szorzat segítségével.

Legyen $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, ekkor $Mv = \begin{bmatrix} x \\ 2y \\ -1 \end{bmatrix}$,

és így $0 = x^2 + 2y^2 - 1 = \langle v, Mv \rangle$.

A főtengelytétel elnevezés magyarázata

Miért nevezzük az előbbi eredményt főtengelytételnek?

Tekintsük az $x^2 + 2y^2 = 1$ egyenletű ellipszist a síkon.
A két tengely a két koordinátatengely, így merőlegesek.
A fenti egyenletet átírhatjuk skaláris szorzat segítségével.

Legyen $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, ekkor $Mv = \begin{bmatrix} x \\ 2y \\ -1 \end{bmatrix}$,

és így $0 = x^2 + 2y^2 - 1 = \langle v, Mv \rangle$.
A két tengelyirány éppen M két sajátvektorának felel meg.

A főtengelytétel elnevezés magyarázata

Miért nevezzük az előbbi eredményt főtengelytételnek?

Tekintsük az $x^2 + 2y^2 = 1$ egyenletű ellipszist a síkon.
A két tengely a két koordinátatengely, így merőlegesek.
A fenti egyenletet átírhatjuk skaláris szorzat segítségével.

Legyen $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, ekkor $Mv = \begin{bmatrix} x \\ 2y \\ -1 \end{bmatrix}$,

és így $0 = x^2 + 2y^2 - 1 = \langle v, Mv \rangle$.
A két tengelyirány éppen M két sajátvektorának felel meg.
Hasonlóan felírhatunk minden másodfokú síkgörbét,

A főtengelytétel elnevezés magyarázata

Miért nevezzük az előbbi eredményt főtengelytételnek?

Tekintsük az $x^2 + 2y^2 = 1$ egyenletű ellipszist a síkon.
A két tengely a két koordinátatengely, így merőlegesek.
A fenti egyenletet átírhatjuk skaláris szorzat segítségével.

Legyen $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, ekkor $Mv = \begin{bmatrix} x \\ 2y \\ -1 \end{bmatrix}$,

és így $0 = x^2 + 2y^2 - 1 = \langle v, Mv \rangle$.
A két tengelyirány éppen M két sajátvektorának felel meg.
Hasonlóan felírhatunk minden másodfokú síkgörbét,
és a tengelyeket a mátrix sajátvektoraiként kapjuk.

A főtengelytétel elnevezés magyarázata

Miért nevezzük az előbbi eredményt főtengelytételnek?

Tekintsük az $x^2 + 2y^2 = 1$ egyenletű ellipszist a síkon.
A két tengely a két koordinátatengely, így merőlegesek.
A fenti egyenletet átírhatjuk skaláris szorzat segítségével.

Legyen $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, ekkor $Mv = \begin{bmatrix} x \\ 2y \\ -1 \end{bmatrix}$,

és így $0 = x^2 + 2y^2 - 1 = \langle v, Mv \rangle$.
A két tengelyirány éppen M két sajátvektorának felel meg.
Hasonlóan felírhatunk minden másodfokú síkgörbét,
és a tengelyeket a mátrix sajátvektoraiként kapjuk.
Merőlegesek, mert a mátrixot szimmetrikusnak választhatjuk!

A főtengelytétel elnevezés magyarázata

Miért nevezzük az előbbi eredményt főtengelytételnek?

Tekintsük az $x^2 + 2y^2 = 1$ egyenletű ellipszist a síkon.
A két tengely a két koordinátatengely, így merőlegesek.
A fenti egyenletet átírhatjuk skaláris szorzat segítségével.

Legyen $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, ekkor $Mv = \begin{bmatrix} x \\ 2y \\ -1 \end{bmatrix}$,

és így $0 = x^2 + 2y^2 - 1 = \langle v, Mv \rangle$.
A két tengelyirány éppen M két sajátvektorának felel meg.
Hasonlóan felírhatunk minden másodfokú síkgörbét,
és a tengelyeket a mátrix sajátvektoraiként kapjuk.
Merőlegesek, mert a mátrixot szimmetrikusnak választhatjuk!
Jobb az $x^2 + 2y^2 = z^2$ egyenletet nézni:

A főtengelytétel elnevezés magyarázata

Miért nevezzük az előbbi eredményt főtengelytételnek?

Tekintsük az $x^2 + 2y^2 = 1$ egyenletű ellipszist a síkon.
A két tengely a két koordinátatengely, így merőlegesek.
A fenti egyenletet átírhatjuk skaláris szorzat segítségével.

Legyen $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, ekkor $Mv = \begin{bmatrix} x \\ 2y \\ -1 \end{bmatrix}$,

és így $0 = x^2 + 2y^2 - 1 = \langle v, Mv \rangle$.
A két tengelyirány éppen M két sajátvektorának felel meg.
Hasonlóan felírhatunk minden másodfokú síkgörbét,
és a tengelyeket a mátrix sajátvektoraiként kapjuk.
Merőlegesek, mert a mátrixot szimmetrikusnak választhatjuk!
Jobb az $x^2 + 2y^2 = z^2$ egyenletet nézni: ez egy kúp.

A főtengelytétel elnevezés magyarázata

Miért nevezzük az előbbi eredményt főtengelytételnek?

Tekintsük az $x^2 + 2y^2 = 1$ egyenletű ellipszist a síkon.
A két tengely a két koordinátatengely, így merőlegesek.
A fenti egyenletet átírhatjuk skaláris szorzat segítségével.

Legyen $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, ekkor $Mv = \begin{bmatrix} x \\ 2y \\ -1 \end{bmatrix}$,

és így $0 = x^2 + 2y^2 - 1 = \langle v, Mv \rangle$.
A két tengelyirány éppen M két sajátvektorának felel meg.
Hasonlóan felírhatunk minden másodfokú síkgörbét,
és a tengelyeket a mátrix sajátvektoraiként kapjuk.
Merőlegesek, mert a mátrixot szimmetrikusnak választhatjuk!
Jobb az $x^2 + 2y^2 = z^2$ egyenletet nézni: ez egy kúp.
Az ellipszist ebből a $z = 1$ sík metszi ki.

Valós kvadratikus alak

F7.3.1. Definíció

Kvadratikus alak: homogén másodfokú polinom.

Valós kvadratikus alak

F7.3.1. Definíció

Kvadratikus alak: homogén másodfokú polinom.

$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} r_{ij}x_ix_j$, ahol $r_{ij} \in \mathbb{R}$.

Valós kvadratikus alak

F7.3.1. Definíció

Kvadratikus alak: homogén másodfokú polinom.
$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} r_{ij} x_i x_j$, ahol $r_{ij} \in \mathbb{R}$.

Példa: $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 + 7x_3^2$.

Valós kvadratikus alak

F7.3.1. Definíció

Kvadratikus alak: homogén másodfokú polinom.
$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} r_{ij} x_i x_j$, ahol $r_{ij} \in \mathbb{R}$.

Példa: $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 + 7x_3^2$.

Legyen $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

Valós kvadratikus alak

F7.3.1. Definíció

Kvadratikus alak: homogén másodfokú polinom.
$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} r_{ij} x_i x_j$, ahol $r_{ij} \in \mathbb{R}$.

Példa: $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 + 7x_3^2$.

Legyen $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$,

Valós kvadratikus alak

F7.3.1. Definíció

Kvadratikus alak: homogén másodfokú polinom.
$Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j} r_{ij} x_i x_j$, ahol $r_{ij} \in \mathbb{R}$.

Példa: $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 + 7x_3^2$.

Legyen $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, ekkor $Q = \langle v, Mv \rangle$.

Valós kvadratikus alak

F7.3.1. Definíció

Kvadratikus alak: homogén másodfokú polinom.
$Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j} r_{ij} x_i x_j$, ahol $r_{ij} \in \mathbb{R}$.

Példa: $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 + 7x_3^2$.

Legyen $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, ekkor $Q = \langle v, Mv \rangle$.

De Q felírható szimmetrikus mátrixszal is:

Valós kvadratikus alak

F7.3.1. Definíció

Kvadratikus alak: homogén másodfokú polinom.
$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} r_{ij} x_i x_j$, ahol $r_{ij} \in \mathbb{R}$.

Példa: $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 + 7x_3^2$.

Legyen $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, ekkor $Q = \langle v, Mv \rangle$.

De Q felírható szimmetrikus mátrixszal is:

Legyen $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

Valós kvadratikus alak

F7.3.1. Definíció

Kvadratikus alak: homogén másodfokú polinom.
$Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j} r_{ij} x_i x_j$, ahol $r_{ij} \in \mathbb{R}$.

Példa: $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 + 7x_3^2$.

Legyen $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, ekkor $Q = \langle v, Mv \rangle$.

De Q felírható szimmetrikus mátrixszal is:

Legyen $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$,

Valós kvadratikus alak

F7.3.1. Definíció

Kvadratikus alak: homogén másodfokú polinom.

$Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j} r_{ij} x_i x_j$, ahol $r_{ij} \in \mathbb{R}$.

Példa: $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 + 7x_3^2$.

Legyen $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, ekkor $Q = \langle v, Mv \rangle$.

De Q felírható szimmetrikus mátrixszal is:

Legyen $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$, ekkor $Q = \langle v, Mv \rangle$.

Valós kvadratikus alak

F7.3.1. Definíció

Kvadratikus alak: homogén másodfokú polinom.
$Q(x_1,\dots,x_n)=\sum\limits_{i,j} r_{ij}x_ix_j$, ahol $r_{ij}\in\mathbb{R}$.

Példa: $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+4x_2x_3+7x_3^2$.

Legyen $v=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ és $M=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&2&4\\0&0&7\end{bmatrix}$, ekkor $Q=\langle v,Mv\rangle$.

De Q felírható szimmetrikus mátrixszal is:

Legyen $v=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ és $M=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&2\\0&2&7\end{bmatrix}$, ekkor $Q=\langle v,Mv\rangle$.

Felírás mátrixszorzással:

Valós kvadratikus alak

F7.3.1. Definíció

Kvadratikus alak: homogén másodfokú polinom.
$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} r_{ij}x_ix_j$, ahol $r_{ij} \in \mathbb{R}$.

Példa: $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 + 7x_3^2$.

Legyen $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, ekkor $Q = \langle v, Mv \rangle$.

De Q felírható szimmetrikus mátrixszal is:

Legyen $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$, ekkor $Q = \langle v, Mv \rangle$.

Felírás mátrixszorzással: $Q = v^T M v$ (HF).

Kvadratikus alak mátrixos alakja

Legyen $M = ((\lambda_{ij})) \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

Kvadratikus alak mátrixos alakja

Legyen $M = ((\lambda_{ij})) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$

Kvadratikus alak mátrixos alakja

Legyen $M = ((\lambda_{ij})) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$.

Kvadratikus alak mátrixos alakja

Legyen $M = ((\lambda_{ij})) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$. Ekkor

$\langle v, Mw \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} x_i y_j = v^T M w$,

Kvadratikus alak mátrixos alakja

Legyen $M = ((\lambda_{ij})) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$. Ekkor

$\langle v, Mw\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} x_i y_j = v^T Mw$, így

$\langle v, Mv\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} x_i x_j = v^T Mv$ (HF).

Kvadratikus alak mátrixos alakja

Legyen $M = ((\lambda_{ij})) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$. Ekkor

$\langle v, Mw\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} x_i y_j = v^T M w$, így

$\langle v, Mv\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} x_i x_j = v^T M v$ (HF).

Megjegyzés: Mivel $x_i x_j = x_j x_i$,

Kvadratikus alak mátrixos alakja

Legyen $M = ((\lambda_{ij})) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$. Ekkor
$\langle v, Mw\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} x_i y_j = v^T M w$, így
$\langle v, Mv\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} x_i x_j = v^T M v$ (HF).

Megjegyzés: Mivel $x_i x_j = x_j x_i$, ezért a $\sum \lambda_{ij} x_i x_j$ polinomból nem lehet egyértelműen visszakapni az M mátrixot,

Kvadratikus alak mátrixos alakja

Legyen $M = ((\lambda_{ij})) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$. Ekkor
$\langle v, Mw\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i y_j = v^T Mw$, így
$\langle v, Mv\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i x_j = v^T Mv$ (HF).

Megjegyzés: Mivel $x_i x_j = x_j x_i$, ezért a $\sum \lambda_{ij} x_i x_j$ polinomból nem lehet egyértelműen visszakapni az M mátrixot, hanem csak $\lambda_{ij} + \lambda_{ji}$ van meghatározva ($i \neq j$ esetén).

Kvadratikus alak mátrixos alakja

Legyen $M = ((\lambda_{ij})) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$. Ekkor

$\langle v, Mw\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i y_j = v^T M w$, így
$\langle v, Mv\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i x_j = v^T M v$ (HF).

Megjegyzés: Mivel $x_i x_j = x_j x_i$, ezért a $\sum \lambda_{ij} x_i x_j$ polinomból nem lehet egyértelműen visszakapni az M mátrixot, hanem csak $\lambda_{ij} + \lambda_{ji}$ van meghatározva ($i \neq j$ esetén).
Ha $x_i x_j = x_j x_i$ együtthatója a polinomban összevonva r_{ij},

Kvadratikus alak mátrixos alakja

Legyen $M = ((\lambda_{ij})) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$. Ekkor

$\langle v, Mw\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i y_j = v^T Mw$, így

$\langle v, Mv\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i x_j = v^T Mv$ (HF).

Megjegyzés: Mivel $x_i x_j = x_j x_i$, ezért a $\sum \lambda_{ij} x_i x_j$ polinomból nem lehet egyértelműen visszakapni az M mátrixot, hanem csak $\lambda_{ij} + \lambda_{ji}$ van meghatározva ($i \neq j$ esetén). Ha $x_i x_j = x_j x_i$ együtthatója a polinomban összevonva r_{ij}, akkor legyen $\lambda_{ij} = \lambda_{ji} = r_{ij}/2$.

Kvadratikus alak mátrixos alakja

Legyen $M = ((\lambda_{ij})) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$. Ekkor

$\langle v, Mw\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} x_i y_j = v^T Mw$, így

$\langle v, Mv\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} x_i x_j = v^T Mv$ (HF).

Megjegyzés: Mivel $x_i x_j = x_j x_i$, ezért a $\sum \lambda_{ij} x_i x_j$ polinomból nem lehet egyértelműen visszakapni az M mátrixot, hanem csak $\lambda_{ij} + \lambda_{ji}$ van meghatározva ($i \neq j$ esetén). Ha $x_i x_j = x_j x_i$ együtthatója a polinomban összevonva r_{ij}, akkor legyen $\lambda_{ij} = \lambda_{ji} = r_{ij}/2$. Ezzel beláttuk:

Kvadratikus alak mátrixos alakja

Legyen $M = ((\lambda_{ij})) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$. Ekkor
$\langle v, Mw\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i y_j = v^T M w$, így
$\langle v, Mv\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i x_j = v^T M v$ (HF).

Megjegyzés: Mivel $x_i x_j = x_j x_i$, ezért a $\sum \lambda_{ij} x_i x_j$ polinomból nem lehet egyértelműen visszakapni az M mátrixot, hanem csak $\lambda_{ij} + \lambda_{ji}$ van meghatározva ($i \neq j$ esetén). Ha $x_i x_j = x_j x_i$ együtthatója a polinomban összevonva r_{ij}, akkor legyen $\lambda_{ij} = \lambda_{ji} = r_{ij}/2$. Ezzel beláttuk:

Minden (valós) kvadratikus alak egyértelműen felírható $\langle v, Mv\rangle = v^T M v$ alakban, ahol M szimmetrikus mátrix.

Algebrai tulajdonságok

Legyen $M = ((\lambda_{ij})) \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

Algebrai tulajdonságok

Legyen $M = ((\lambda_{ij})) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$

Algebrai tulajdonságok

Legyen $M = ((\lambda_{ij})) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$,

Algebrai tulajdonságok

Legyen $M = ((\lambda_{ij})) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$,

továbbá $B(v, w) = \langle v, Mw\rangle = v^T Mw = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i y_j$.

Algebrai tulajdonságok

Legyen $M = ((\lambda_{ij})) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$,

továbbá $B(v, w) = \langle v, Mw\rangle = v^T Mw = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i y_j$.

Ekkor tetszőleges $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén (HF):

Algebrai tulajdonságok

Legyen $M = ((\lambda_{ij})) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{bmatrix}$,

továbbá $B(v, w) = \langle v, Mw\rangle = v^T Mw = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i y_j$.

Ekkor tetszőleges $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén (HF):

(1) $B(u + v, w) = B(u, w) + B(v, w)$.

Algebrai tulajdonságok

Legyen $M = ((\lambda_{ij})) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$,

továbbá $B(v, w) = \langle v, Mw\rangle = v^T Mw = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} x_i y_j$.

Ekkor tetszőleges $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén (HF):

(1) $B(u + v, w) = B(u, w) + B(v, w)$.

(2) $B(\lambda v, w) = \lambda B(v, w)$.

Algebrai tulajdonságok

Legyen $M = ((\lambda_{ij})) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$,

továbbá $B(v, w) = \langle v, Mw \rangle = v^T Mw = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i y_j$.

Ekkor tetszőleges $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén (HF):

(1) $B(u + v, w) = B(u, w) + B(v, w)$.

(2) $B(\lambda v, w) = \lambda B(v, w)$.

(3) $B(w, u + v) = B(w, u) + B(w, v)$.

Algebrai tulajdonságok

Legyen $M = ((\lambda_{ij})) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$,

továbbá $B(v, w) = \langle v, Mw \rangle = v^T M w = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i y_j$.

Ekkor tetszőleges $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén (HF):

(1) $B(u + v, w) = B(u, w) + B(v, w)$.

(2) $B(\lambda v, w) = \lambda B(v, w)$.

(3) $B(w, u + v) = B(w, u) + B(w, v)$.

(4) $B(w, \lambda v) = \lambda B(w, v)$.

Algebrai tulajdonságok

Legyen $M = ((\lambda_{ij})) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$,

továbbá $B(v, w) = \langle v, Mw\rangle = v^T Mw = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i y_j$.

Ekkor tetszőleges $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén (HF):

(1) $B(u + v, w) = B(u, w) + B(v, w)$.

(2) $B(\lambda v, w) = \lambda B(v, w)$.

(3) $B(w, u + v) = B(w, u) + B(w, v)$.

(4) $B(w, \lambda v) = \lambda B(w, v)$.

(5) Ha M szimmetrikus mátrix, akkor $B(v, w) = B(w, v)$

Algebrai tulajdonságok

Legyen $M = ((\lambda_{ij})) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$,

továbbá $B(v, w) = \langle v, Mw\rangle = v^T Mw = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i y_j$.

Ekkor tetszőleges $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén (HF):

(1) $B(u + v, w) = B(u, w) + B(v, w)$.

(2) $B(\lambda v, w) = \lambda B(v, w)$.

(3) $B(w, u + v) = B(w, u) + B(w, v)$.

(4) $B(w, \lambda v) = \lambda B(w, v)$.

(5) Ha M szimmetrikus mátrix, akkor $B(v, w) = B(w, v)$ (azaz B szimmetrikus).

Algebrai tulajdonságok

Legyen $M = ((\lambda_{ij})) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$,

továbbá $B(v, w) = \langle v, Mw\rangle = v^T Mw = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} x_i y_j$.

Ekkor tetszőleges $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén (HF):

(1) $B(u + v, w) = B(u, w) + B(v, w)$.

(2) $B(\lambda v, w) = \lambda B(v, w)$.

(3) $B(w, u + v) = B(w, u) + B(w, v)$.

(4) $B(w, \lambda v) = \lambda B(w, v)$.

(5) Ha M szimmetrikus mátrix, akkor $B(v, w) = B(w, v)$ (azaz B szimmetrikus).

Ez tehát a valós skaláris szorzat egy általánosítása.

Valós bilineáris függvény

F7.1.1. Definíció

Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ fölött

Valós bilineáris függvény

F7.1.1. Definíció

Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ fölött és B kétváltozós,

Valós bilineáris függvény

F7.1.1. Definíció

Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ fölött és B kétváltozós, V-n értelmezett,

Valós bilineáris függvény

F7.1.1. Definíció

Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ fölött és B kétváltozós, V-n értelmezett, $\mathbb{R}$-be képező függvény.

Valós bilineáris függvény

F7.1.1. Definíció

Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ fölött és B kétváltozós, V-n értelmezett, $\mathbb{R}$-be képező függvény. A B függvény bilineáris,

Valós bilineáris függvény

F7.1.1. Definíció

Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ fölött és B kétváltozós, V-n értelmezett, $\mathbb{R}$-be képező függvény. A B függvény bilineáris, ha mindkét változóban lineáris

Valós bilineáris függvény

F7.1.1. Definíció

Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ fölött és B kétváltozós, V-n értelmezett, $\mathbb{R}$-be képező függvény. A B függvény **bilineáris**,
ha mindkét változóban lineáris (az iménti $(1) - (4)$ tulajdonság).

Valós bilineáris függvény

F7.1.1. Definíció

Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ fölött és B kétváltozós, V-n értelmezett, $\mathbb{R}$-be képező függvény. A B függvény bilineáris,
ha mindkét változóban lineáris (az iménti $(1) - (4)$ tulajdonság).
A B szimmetrikus,

Valós bilineáris függvény

F7.1.1. Definíció

Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ fölött és B kétváltozós, V-n értelmezett, $\mathbb{R}$-be képező függvény. A B függvény bilineáris,
ha mindkét változóban lineáris (az iménti $(1) - (4)$ tulajdonság).
A B szimmetrikus, ha $B(v, w) = B(w, v)$ minden v, w-re.

Valós bilineáris függvény

F7.1.1. Definíció

Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ fölött és B kétváltozós, V-n értelmezett, $\mathbb{R}$-be képező függvény. A B függvény bilineáris,
ha mindkét változóban lineáris (az iménti $(1)-(4)$ tulajdonság).
A B szimmetrikus, ha $B(v, w) = B(w, v)$ minden v, w-re.
$Q(v) = B(v, v)$ a B-hez tartozó kvadratikus alak

Valós bilineáris függvény

F7.1.1. Definíció

Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ fölött és B kétváltozós, V-n értelmezett, $\mathbb{R}$-be képező függvény. A B függvény **bilineáris**,
ha mindkét változóban lineáris (az iménti $(1) - (4)$ tulajdonság).
A B **szimmetrikus**, ha $B(v, w) = B(w, v)$ minden v, w-re.
$Q(v) = B(v, v)$ a B-hez tartozó **kvadratikus alak** ($Q : V \to \mathbb{R}$).

Valós bilineáris függvény

F7.1.1. Definíció

Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ fölött és B kétváltozós, V-n értelmezett, $\mathbb{R}$-be képező függvény. A B függvény bilineáris,
ha mindkét változóban lineáris (az iménti $(1)-(4)$ tulajdonság).
A B szimmetrikus, ha $B(v,w)=B(w,v)$ minden v, w-re.
$Q(v)=B(v,v)$ a B-hez tartozó kvadratikus alak ($Q:V\to\mathbb{R}$).

Állítás (HF)

Legyen $b_1,\ldots,b_n$ bázis V-ben,

Valós bilineáris függvény

F7.1.1. Definíció

Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ fölött és B kétváltozós, V-n értelmezett, $\mathbb{R}$-be képező függvény. A B függvény bilineáris, ha mindkét változóban lineáris (az iménti $(1) - (4)$ tulajdonság).
A B szimmetrikus, ha $B(v, w) = B(w, v)$ minden v, w-re.
$Q(v) = B(v, v)$ a B-hez tartozó kvadratikus alak ($Q : V \to \mathbb{R}$).

Állítás (HF)

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben,
$v = x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n$

Valós bilineáris függvény

F7.1.1. Definíció

Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ fölött és B kétváltozós, V-n értelmezett, $\mathbb{R}$-be képező függvény. A B függvény bilineáris,
ha mindkét változóban lineáris (az iménti $(1) - (4)$ tulajdonság).
A B szimmetrikus, ha $B(v, w) = B(w, v)$ minden v, w-re.
$Q(v) = B(v, v)$ a B-hez tartozó kvadratikus alak ($Q : V \to \mathbb{R}$).

Állítás (HF)

Legyen $b_1, \dots, b_n$ bázis V-ben,
$v = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n$ és $w = y_1 b_1 + \dots + y_n b_n$.

Valós bilineáris függvény

F7.1.1. Definíció

Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ fölött és B kétváltozós, V-n értelmezett, $\mathbb{R}$-be képező függvény. A B függvény bilineáris, ha mindkét változóban lineáris (az iménti $(1) - (4)$ tulajdonság).
A B szimmetrikus, ha $B(v, w) = B(w, v)$ minden v, w-re.
$Q(v) = B(v, v)$ a B-hez tartozó kvadratikus alak ($Q : V \to \mathbb{R}$).

Állítás (HF)

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben,
$v = x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n$ és $w = y_1 b_1 + \ldots + y_n b_n$.
Ekkor $B(v, w) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} x_i y_j$,

Valós bilineáris függvény

F7.1.1. Definíció

Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ fölött és B kétváltozós, V-n értelmezett, $\mathbb{R}$-be képező függvény. A B függvény bilineáris,
ha mindkét változóban lineáris (az iménti $(1) - (4)$ tulajdonság).
A B szimmetrikus, ha $B(v, w) = B(w, v)$ minden v, w-re.
$Q(v) = B(v, v)$ a B-hez tartozó kvadratikus alak ($Q : V \to \mathbb{R}$).

Állítás (HF)

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben,
$v = x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n$ és $w = y_1 b_1 + \ldots + y_n b_n$.
Ekkor $B(v, w) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} x_i y_j$, ahol $\lambda_{ij} = B(b_i, b_j)$,

Valós bilineáris függvény

F7.1.1. Definíció

Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ fölött és B kétváltozós, V-n értelmezett, $\mathbb{R}$-be képező függvény. A B függvény bilineáris, ha mindkét változóban lineáris (az iménti $(1)-(4)$ tulajdonság).
A B szimmetrikus, ha $B(v, w) = B(w, v)$ minden v, w-re.
$Q(v) = B(v, v)$ a B-hez tartozó kvadratikus alak ($Q : V \to \mathbb{R}$).

Állítás (HF)

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben,
$v = x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n$ és $w = y_1 b_1 + \ldots + y_n b_n$.
Ekkor $B(v, w) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} x_i y_j$, ahol $\lambda_{ij} = B(b_i, b_j)$,
továbbá $Q(v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} x_i x_j$.

Valós bilineáris függvény

F7.1.1. Definíció

Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ fölött és B kétváltozós, V-n értelmezett, $\mathbb{R}$-be képező függvény. A B függvény bilineáris, ha mindkét változóban lineáris (az iménti $(1)-(4)$ tulajdonság).
A B szimmetrikus, ha $B(v,w)=B(w,v)$ minden v,w-re.
$Q(v)=B(v,v)$ a B-hez tartozó kvadratikus alak ($Q:V\to\mathbb{R}$).

Állítás (HF)

Legyen $b_1,\ldots,b_n$ bázis V-ben,
$v=x_1b_1+\ldots+x_nb_n$ és $w=y_1b_1+\ldots+y_nb_n$.
Ekkor $B(v,w)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\lambda_{ij}x_iy_j$, ahol $\lambda_{ij}=B(b_i,b_j)$,
továbbá $Q(v)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\lambda_{ij}x_ix_j$.
A B pontosan akkor szimmetrikus,

Valós bilineáris függvény

F7.1.1. Definíció

Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ fölött és B kétváltozós, V-n értelmezett, $\mathbb{R}$-be képező függvény. A B függvény bilineáris, ha mindkét változóban lineáris (az iménti $(1)-(4)$ tulajdonság).
A B szimmetrikus, ha $B(v, w) = B(w, v)$ minden v, w-re.
$Q(v) = B(v, v)$ a B-hez tartozó kvadratikus alak ($Q : V \to \mathbb{R}$).

Állítás (HF)

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben,
$v = x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n$ és $w = y_1 b_1 + \ldots + y_n b_n$.
Ekkor $B(v, w) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} x_i y_j$, ahol $\lambda_{ij} = B(b_i, b_j)$,
továbbá $Q(v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} x_i x_j$.
A B pontosan akkor szimmetrikus, ha $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$ minden i, j-re.

Bilineáris függvény mátrixa

F7.1.3. Definíció

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben.

Bilineáris függvény mátrixa

F7.1.3. Definíció

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben. Ekkor a B bilineáris függvény **mátrixa** ebben a bázisban $[B]_{\mathbf{b}} = \big(\big(B(b_i, b_j)\big)\big)$.

Bilineáris függvény mátrixa

F7.1.3. Definíció

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben. Ekkor a B bilineáris függvény mátrixa ebben a bázisban $[B]_{\mathbf{b}} = \big(\big(B(b_i, b_j)\big)\big)$.

F7.1.4. Tétel

B-t a mátrixa egyértelműen meghatározza.

Bilineáris függvény mátrixa

F7.1.3. Definíció

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben. Ekkor a B bilineáris függvény **mátrixa** ebben a bázisban $[B]_{\mathbf{b}} = \big(\big(B(b_i, b_j)\big)\big)$.

F7.1.4. Tétel

B-t a mátrixa egyértelműen meghatározza.
Megfordítva, minden M mátrixhoz tartozik bilineáris függvény,

Bilineáris függvény mátrixa

F7.1.3. Definíció

Legyen $b_1, \dots, b_n$ bázis V-ben. Ekkor a B bilineáris függvény mátrixa ebben a bázisban $[B]_{\mathbf{b}} = \big(\big(B(b_i, b_j)\big)\big)$.

F7.1.4. Tétel

B-t a mátrixa egyértelműen meghatározza.
Megfordítva, minden M mátrixhoz tartozik bilineáris függvény, amit $v = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n$

Bilineáris függvény mátrixa

F7.1.3. Definíció

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben. Ekkor a B bilineáris függvény **mátrixa** ebben a bázisban $[B]_{\mathbf{b}} = \big(\big(B(b_i, b_j)\big)\big)$.

F7.1.4. Tétel

B-t a mátrixa egyértelműen meghatározza.
Megfordítva, minden M mátrixhoz tartozik bilineáris függvény, amit $v = x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n$ és $w = y_1 b_1 + \ldots + y_n b_n$ esetén

Bilineáris függvény mátrixa

F7.1.3. Definíció

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben. Ekkor a B bilineáris függvény mátrixa ebben a bázisban $[B]_{\mathbf{b}} = \big(\big(B(b_i, b_j)\big)\big)$.

F7.1.4. Tétel

B-t a mátrixa egyértelműen meghatározza.
Megfordítva, minden M mátrixhoz tartozik bilineáris függvény, amit $v = x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n$ és $w = y_1 b_1 + \ldots + y_n b_n$ esetén $B(v, w) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} x_i y_j$ definiál,

Bilineáris függvény mátrixa

F7.1.3. Definíció

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben. Ekkor a B bilineáris függvény **mátrixa** ebben a bázisban $[B]_{\mathbf{b}} = \big(\big(B(b_i, b_j)\big)\big)$.

F7.1.4. Tétel

B-t a mátrixa egyértelműen meghatározza.
Megfordítva, minden M mátrixhoz tartozik bilineáris függvény, amit $v = x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n$ és $w = y_1 b_1 + \ldots + y_n b_n$ esetén $B(v, w) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} x_i y_j$ definiál, ahol $M = ((\lambda_{ij}))$. $\square$

Bilineáris függvény mátrixa

F7.1.3. Definíció

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben. Ekkor a B bilineáris függvény **mátrixa** ebben a bázisban $[B]_{\mathbf{b}} = \big(\big(B(b_i, b_j)\big)\big)$.

F7.1.4. Tétel

B-t a mátrixa egyértelműen meghatározza.
Megfordítva, minden M mátrixhoz tartozik bilineáris függvény, amit $v = x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n$ és $w = y_1 b_1 + \ldots + y_n b_n$ esetén $B(v, w) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} x_i y_j$ definiál, ahol $M = ((\lambda_{ij}))$. $\square$

A lineáris leképezések előírhatósági tételére hasonlít (F5.3.1).

Bilineáris függvény mátrixa

F7.1.3. Definíció

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben. Ekkor a B bilineáris függvény mátrixa ebben a bázisban $[B]_{\mathbf{b}} = \big((B(b_i, b_j))\big)$.

F7.1.4. Tétel

B-t a mátrixa egyértelműen meghatározza.
Megfordítva, minden M mátrixhoz tartozik bilineáris függvény, amit $v = x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n$ és $w = y_1 b_1 + \ldots + y_n b_n$ esetén $B(v, w) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} x_i y_j$ definiál, ahol $M = ((\lambda_{ij}))$. □

A lineáris leképezések előírhatósági tételére hasonlít (F5.3.1).
A $Q(v) = B(v, v) = \sum \lambda_{ij} x_i x_j$ „absztrakt” kvadratikus alak több bilineáris függvényből is származtatható,

Bilineáris függvény mátrixa

F7.1.3. Definíció

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben. Ekkor a B bilineáris függvény **mátrixa** ebben a bázisban $[B]_{\mathbf{b}} = \big(\big(B(b_i, b_j)\big)\big)$.

F7.1.4. Tétel

B-t a mátrixa egyértelműen meghatározza.
Megfordítva, minden M mátrixhoz tartozik bilineáris függvény, amit $v = x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n$ és $w = y_1 b_1 + \ldots + y_n b_n$ esetén $B(v, w) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} x_i y_j$ definiál, ahol $M = ((\lambda_{ij}))$. □

A lineáris leképezések előírhatósági tételére hasonlít (F5.3.1).
A $Q(v) = B(v, v) = \sum \lambda_{ij} x_i x_j$ „absztrakt” kvadratikus alak több bilineáris függvényből is származtatható, és ezek között pontosan **egy** lesz szimmetrikus.

Bilineáris és lineáris függvény

Következmény

Legyen V valós euklideszi tér,

Bilineáris és lineáris függvény

Következmény

Legyen V valós euklideszi tér, $\mathbf{b} = b_1, \ldots, b_n$ ONB,

Bilineáris és lineáris függvény

Következmény

Legyen V valós euklideszi tér, $\mathbf{b} = b_1, \ldots, b_n$ ONB,
B bilineáris függvény V-n,

Bilineáris és lineáris függvény

Következmény

Legyen V valós euklideszi tér, $\mathbf{b} = b_1, \dots, b_n$ ONB,
B bilineáris függvény V-n, $[B]_{\mathbf{b}} = M$,

Bilineáris és lineáris függvény

Következmény

Legyen V valós euklideszi tér, $\mathbf{b} = b_1, \ldots, b_n$ ONB,
B bilineáris függvény V-n, $[B]_{\mathbf{b}} = M$,
és A az a lineáris transzformáció V-n, melyre $[A]_{\mathbf{b}} = M$.

Bilineáris és lineáris függvény

Következmény

Legyen V valós euklideszi tér, $\mathbf{b} = b_1, \ldots, b_n$ ONB,
B bilineáris függvény V-n, $[B]_{\mathbf{b}} = M$,
és A az a lineáris transzformáció V-n, melyre $[A]_{\mathbf{b}} = M$.
Ekkor tetszőleges $v, w \in V$ esetén $B(v, w) = \langle v, A(w) \rangle$.

Bilineáris és lineáris függvény

Következmény

Legyen V valós euklideszi tér, $\mathbf{b} = b_1, \ldots, b_n$ ONB,
B bilineáris függvény V-n, $[B]_{\mathbf{b}} = M$,
és A az a lineáris transzformáció V-n, melyre $[A]_{\mathbf{b}} = M$.
Ekkor tetszőleges $v, w \in V$ esetén $B(v, w) = \langle v, A(w) \rangle$.
Ez a kapcsolat kölcsönösen egyértelmű
a bilineáris függvények

Bilineáris és lineáris függvény

Következmény

Legyen V valós euklideszi tér, $\mathbf{b} = b_1, \ldots, b_n$ ONB,
B bilineáris függvény V-n, $[B]_\mathbf{b} = M$,
és A az a lineáris transzformáció V-n, melyre $[A]_\mathbf{b} = M$.
Ekkor tetszőleges $v, w \in V$ esetén $B(v, w) = \langle v, A(w) \rangle$.
Ez a kapcsolat kölcsönösen egyértelmű
a bilineáris függvények és V lineáris transzformációi között.

Bilineáris és lineáris függvény

Következmény

Legyen V valós euklideszi tér, $\mathbf{b} = b_1, \ldots, b_n$ ONB,
B bilineáris függvény V-n, $[B]_{\mathbf{b}} = M$,
és A az a lineáris transzformáció V-n, melyre $[A]_{\mathbf{b}} = M$.
Ekkor tetszőleges $v, w \in V$ esetén $B(v, w) = \langle v, A(w) \rangle$.
Ez a kapcsolat kölcsönösen egyértelmű
a bilineáris függvények és V lineáris transzformációi között.
B akkor és csak akkor szimmetrikus,

Bilineáris és lineáris függvény

Következmény

Legyen V valós euklideszi tér, $\mathbf{b} = b_1, \ldots, b_n$ ONB,
B bilineáris függvény V-n, $[B]_{\mathbf{b}} = M$,
és A az a lineáris transzformáció V-n, melyre $[A]_{\mathbf{b}} = M$.
Ekkor tetszőleges $v, w \in V$ esetén $B(v, w) = \langle v, A(w) \rangle$.
Ez a kapcsolat kölcsönösen egyértelmű
a bilineáris függvények és V lineáris transzformációi között.
B akkor és csak akkor szimmetrikus, ha M szimmetrikus,

Bilineáris és lineáris függvény

Következmény

Legyen V valós euklideszi tér, $\mathbf{b} = b_1, \ldots, b_n$ ONB,
B bilineáris függvény V-n, $[B]_{\mathbf{b}} = M$,
és A az a lineáris transzformáció V-n, melyre $[A]_{\mathbf{b}} = M$.
Ekkor tetszőleges $v, w \in V$ esetén $B(v, w) = \langle v, A(w) \rangle$.
Ez a kapcsolat kölcsönösen egyértelmű
a bilineáris függvények és V lineáris transzformációi között.
B akkor és csak akkor szimmetrikus, ha M szimmetrikus,
akkor és csak akkor, ha A szimmetrikus.

Bilineáris és lineáris függvény

Következmény

Legyen V valós euklideszi tér, $\mathbf{b} = b_1, \ldots, b_n$ ONB,
B bilineáris függvény V-n, $[B]_{\mathbf{b}} = M$,
és A az a lineáris transzformáció V-n, melyre $[A]_{\mathbf{b}} = M$.
Ekkor tetszőleges $v, w \in V$ esetén $B(v, w) = \langle v, A(w) \rangle$.
Ez a kapcsolat kölcsönösen egyértelmű
a bilineáris függvények és V lineáris transzformációi között.
B akkor és csak akkor szimmetrikus, ha M szimmetrikus,
akkor és csak akkor, ha A szimmetrikus.

Bizonyítás

Ha $M = ((\lambda_{ij}))$, akkor $\langle b_i, A(b_j) \rangle = \lambda_{ij}$,

Bilineáris és lineáris függvény

Következmény

Legyen V valós euklideszi tér, $\mathbf{b} = b_1, \ldots, b_n$ ONB,
B bilineáris függvény V-n, $[B]_\mathbf{b} = M$,
és A az a lineáris transzformáció V-n, melyre $[A]_\mathbf{b} = M$.
Ekkor tetszőleges $v, w \in V$ esetén $B(v, w) = \langle v, A(w) \rangle$.
Ez a kapcsolat kölcsönösen egyértelmű
a bilineáris függvények és V lineáris transzformációi között.
B akkor és csak akkor szimmetrikus, ha M szimmetrikus,
akkor és csak akkor, ha A szimmetrikus.

Bizonyítás

Ha $M = ((\lambda_{ij}))$, akkor $\langle b_i, A(b_j) \rangle = \lambda_{ij}$, mert $\mathbf{b}$ ONB.

Bilineáris és lineáris függvény

Következmény

Legyen V valós euklideszi tér, $\mathbf{b} = b_1, \ldots, b_n$ ONB,
B bilineáris függvény V-n, $[B]_\mathbf{b} = M$,
és A az a lineáris transzformáció V-n, melyre $[A]_\mathbf{b} = M$.
Ekkor tetszőleges $v, w \in V$ esetén $B(v, w) = \langle v, A(w) \rangle$.
Ez a kapcsolat kölcsönösen egyértelmű
a bilineáris függvények és V lineáris transzformációi között.
B akkor és csak akkor szimmetrikus, ha M szimmetrikus,
akkor és csak akkor, ha A szimmetrikus.

Bizonyítás

Ha $M = ((\lambda_{ij}))$, akkor $\langle b_i, A(b_j) \rangle = \lambda_{ij}$, mert $\mathbf{b}$ ONB.
Legyen $v = x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n$

Bilineáris és lineáris függvény

Következmény

Legyen V valós euklideszi tér, $\mathbf{b} = b_1, \ldots, b_n$ ONB,
B bilineáris függvény V-n, $[B]_\mathbf{b} = M$,
és A az a lineáris transzformáció V-n, melyre $[A]_\mathbf{b} = M$.
Ekkor tetszőleges $v, w \in V$ esetén $B(v, w) = \langle v, A(w) \rangle$.
Ez a kapcsolat kölcsönösen egyértelmű
a bilineáris függvények és V lineáris transzformációi között.
B akkor és csak akkor szimmetrikus, ha M szimmetrikus,
akkor és csak akkor, ha A szimmetrikus.

Bizonyítás

Ha $M = ((\lambda_{ij}))$, akkor $\langle b_i, A(b_j) \rangle = \lambda_{ij}$, mert $\mathbf{b}$ ONB.
Legyen $v = x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n$ és $w = y_1 b_1 + \ldots + y_n b_n$.

Bilineáris és lineáris függvény

Következmény

Legyen V valós euklideszi tér, $\mathbf{b} = b_1, \ldots, b_n$ ONB,
B bilineáris függvény V-n, $[B]_\mathbf{b} = M$,
és A az a lineáris transzformáció V-n, melyre $[A]_\mathbf{b} = M$.
Ekkor tetszőleges $v, w \in V$ esetén $B(v, w) = \langle v, A(w) \rangle$.
Ez a kapcsolat kölcsönösen egyértelmű
a bilineáris függvények és V lineáris transzformációi között.
B akkor és csak akkor szimmetrikus, ha M szimmetrikus,
akkor és csak akkor, ha A szimmetrikus.

Bizonyítás

Ha $M = ((\lambda_{ij}))$, akkor $\langle b_i, A(b_j) \rangle = \lambda_{ij}$, mert $\mathbf{b}$ ONB.
Legyen $v = x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n$ és $w = y_1 b_1 + \ldots + y_n b_n$.
Ekkor $B(v, w) = \langle v, A(w) \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i y_j$. $\square$

Komplex bilineáris függvény

Változások a valóshoz képest (F7.4. szakasz)

A bilineáris függvény definíciójában $B(\lambda v, w) = \overline{\lambda} B(v, w)$.

Komplex bilineáris függvény

Változások a valóshoz képest (F7.4. szakasz)

A bilineáris függvény definíciójában $B(\lambda v, w) = \overline{\lambda} B(v, w)$.
Emiatt $B(v, w) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} \overline{x_i} y_j$

Komplex bilineáris függvény

Változások a valóshoz képest (F7.4. szakasz)

A bilineáris függvény definíciójában $B(\lambda v, w) = \overline{\lambda} B(v, w)$.
Emiatt $B(v, w) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} \overline{x_i} y_j$ és $Q(v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} \overline{x_i} x_j$.

Komplex bilineáris függvény

Változások a valóshoz képest (F7.4. szakasz)

A bilineáris függvény definíciójában $B(\lambda v, w) = \overline{\lambda} B(v, w)$.
Emiatt $B(v, w) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} \overline{x_i} y_j$ és $Q(v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} \overline{x_i} x_j$.
Itt $\overline{x_i} x_j \neq \overline{x_j} x_i$,

Komplex bilineáris függvény

Változások a valóshoz képest (F7.4. szakasz)

A bilineáris függvény definíciójában $B(\lambda v, w) = \overline{\lambda} B(v, w)$.
Emiatt $B(v, w) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} \overline{x_i} y_j$ és $Q(v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} \overline{x_i} x_j$.
Itt $\overline{x_i} x_j \neq \overline{x_j} x_i$, ezért a λ_{ij} együtthatót már a kvadratikus alak is egyértelműen meghatározza.

Komplex bilineáris függvény

Változások a valóshoz képest (F7.4. szakasz)

A bilineáris függvény definíciójában $B(\lambda v, w) = \overline{\lambda} B(v, w)$.
Emiatt $B(v, w) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} \overline{x_i} y_j$ és $Q(v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} \overline{x_i} x_j$.
Itt $\overline{x_i} x_j \neq \overline{x_j} x_i$, ezért a λ_{ij} együtthatót már a kvadratikus alak is egyértelműen meghatározza. Vagyis minden kvadratikus alak pontosan egy bilineáris függvényből származik.

Komplex bilineáris függvény

Változások a valóshoz képest (F7.4. szakasz)

A bilineáris függvény definíciójában $B(\lambda v, w) = \overline{\lambda} B(v, w)$. Emiatt $B(v, w) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} \overline{x_i} y_j$ és $Q(v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} \overline{x_i} x_j$. Itt $\overline{x_i} x_j \neq \overline{x_j} x_i$, ezért a λ_{ij} együtthatót már a kvadratikus alak is egyértelműen meghatározza. Vagyis minden kvadratikus alak pontosan egy bilineáris függvényből származik.

F7.1.4. Tétel (HF, NB)

Komplex felett a B bilineáris függvényhez tartozó $B(v, v)$ kvadratikus alak értékkészlete akkor és csak akkor valós, ha B Hermite-féle:

Komplex bilineáris függvény

Változások a valóshoz képest (F7.4. szakasz)

A bilineáris függvény definíciójában $B(\lambda v, w) = \overline{\lambda} B(v, w)$.
Emiatt $B(v, w) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} \overline{x_i} y_j$ és $Q(v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} \overline{x_i} x_j$.
Itt $\overline{x_i} x_j \neq \overline{x_j} x_i$, ezért a λ_{ij} együtthatót már a kvadratikus alak is egyértelműen meghatározza. Vagyis minden kvadratikus alak pontosan egy bilineáris függvényből származik.

F7.1.4. Tétel (HF, NB)

Komplex felett a B bilineáris függvényhez tartozó $B(v, v)$ kvadratikus alak értékkészlete akkor és csak akkor valós, ha B Hermite-féle: minden $v, w \in V$-re $B(v, w) = \overline{B(w, v)}$.

Komplex bilineáris függvény

Változások a valóshoz képest (F7.4. szakasz)

A bilineáris függvény definíciójában $B(\lambda v, w) = \overline{\lambda} B(v, w)$. Emiatt $B(v, w) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} \overline{x_i} y_j$ és $Q(v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} \overline{x_i} x_j$. Itt $\overline{x_i} x_j \neq \overline{x_j} x_i$, ezért a λ_{ij} együtthatót már a kvadratikus alak is egyértelműen meghatározza. Vagyis minden kvadratikus alak pontosan egy bilineáris függvényből származik.

F7.1.4. Tétel (HF, NB)

Komplex felett a B bilineáris függvényhez tartozó $B(v, v)$ kvadratikus alak értékkészlete akkor és csak akkor valós, ha B Hermite-féle: minden $v, w \in V$-re $B(v, w) = \overline{B(w, v)}$. Ezek pontosan azok, amelyek mátrixa önadjungált,

Komplex bilineáris függvény

Változások a valóshoz képest (F7.4. szakasz)

A bilineáris függvény definíciójában $B(\lambda v, w) = \overline{\lambda} B(v, w)$.
Emiatt $B(v, w) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} \overline{x_i} y_j$ és $Q(v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} \overline{x_i} x_j$.
Itt $\overline{x_i} x_j \neq \overline{x_j} x_i$, ezért a λ_{ij} együtthatót már a kvadratikus alak is egyértelműen meghatározza. Vagyis minden kvadratikus alak pontosan egy bilineáris függvényből származik.

F7.1.4. Tétel (HF, NB)

Komplex felett a B bilineáris függvényhez tartozó $B(v, v)$ kvadratikus alak értékkészlete akkor és csak akkor valós, ha B Hermite-féle: minden $v, w \in V$-re $B(v, w) = \overline{B(w, v)}$.
Ezek pontosan azok, amelyek mátrixa önadjungált, vagyis $B(v, w) = \langle v, A(w) \rangle$,

Komplex bilineáris függvény

Változások a valóshoz képest (F7.4. szakasz)

A bilineáris függvény definíciójában $B(\lambda v, w) = \overline{\lambda} B(v, w)$.
Emiatt $B(v, w) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} \overline{x_i} y_j$ és $Q(v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} \overline{x_i} x_j$.
Itt $\overline{x_i} x_j \neq \overline{x_j} x_i$, ezért a λ_{ij} együtthatót már a kvadratikus alak is egyértelműen meghatározza. Vagyis minden kvadratikus alak pontosan egy bilineáris függvényből származik.

F7.1.4. Tétel (HF, NB)

Komplex felett a B bilineáris függvényhez tartozó $B(v, v)$ kvadratikus alak értékkészlete akkor és csak akkor valós, ha B Hermite-féle: minden $v, w \in V$-re $B(v, w) = \overline{B(w, v)}$.
Ezek pontosan azok, amelyek mátrixa önadjungált, vagyis $B(v, w) = \langle v, A(w) \rangle$, ahol A önadjungált transzformáció.