

Algebra3, elemző szakirány

ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Előadó: Kiss Emil
ewkiss@cs.elte.hu

12. előadás

Transzformáció mátrixa

Rövidítés: **ONB** =

Transzformáció mátrixa

Rövidítés: **ONB** = OrtoNormált Bázis.

Transzformáció mátrixa

Rövidítés: **ONB** = OrtoNormált Bázis.

Állítás

Legyen V euklideszi tér,

Transzformáció mátrixa

Rövidítés: **ONB** = OrtoNormált Bázis.

Állítás

Legyen V euklideszi tér, b_1, \dots, b_n ONB

Transzformáció mátrixa

Rövidítés: **ONB** = OrtoNormált Bázis.

Állítás

Legyen V euklideszi tér, b_1, \dots, b_n ONB és $A \in \text{Hom}(V)$.

Transzformáció mátrixa

Rövidítés: **ONB** = OrtoNormált Bázis.

Állítás

Legyen V euklideszi tér, b_1, \dots, b_n ONB és $A \in \text{Hom}(V)$.
Ekkor A mátrixa a b_1, \dots, b_n bázisban

Transzformáció mátrixa

Rövidítés: **ONB** = OrtoNormált Bázis.

Állítás

Legyen V euklideszi tér, b_1, \dots, b_n ONB és $A \in \text{Hom}(V)$.
Ekkor A mátrixa a b_1, \dots, b_n bázisban $[A]_{\mathbf{b}} = ((\langle b_i, A(b_j) \rangle))$

Transzformáció mátrixa

Rövidítés: **ONB** = OrtoNormált Bázis.

Állítás

Legyen V euklideszi tér, b_1, \dots, b_n ONB és $A \in \text{Hom}(V)$.
Ekkor A mátrixa a b_1, \dots, b_n bázisban $[A]_{\mathbf{b}} = ((\langle b_i, A(b_j) \rangle))$
(vagyis az i -edik sor j -edik eleme $\langle b_i, A(b_j) \rangle$).

Transzformáció mátrixa

Rövidítés: **ONB** = OrtoNormált Bázis.

Állítás

Legyen V euklideszi tér, b_1, \dots, b_n ONB és $A \in \text{Hom}(V)$.
Ekkor A mátrixa a b_1, \dots, b_n bázisban $[A]_{\mathbf{b}} = ((\langle b_i, A(b_j) \rangle))$
(vagyis az i -edik sor j -edik eleme $\langle b_i, A(b_j) \rangle$).

Bizonyítás

Ha az A mátrixában az i -edik sor j -edik eleme λ_{ij} ,

Transzformáció mátrixa

Rövidítés: **ONB** = OrtoNormált Bázis.

Állítás

Legyen V euklideszi tér, b_1, \dots, b_n ONB és $A \in \text{Hom}(V)$.
Ekkor A mátrixa a b_1, \dots, b_n bázisban $[A]_{\mathbf{b}} = ((\langle b_i, A(b_j) \rangle))$
(vagyis az i -edik sor j -edik eleme $\langle b_i, A(b_j) \rangle$).

Bizonyítás

Ha az A mátrixában az i -edik sor j -edik eleme λ_{ij} ,
akkor $A(b_j) = \lambda_{1j}b_1 + \dots + \lambda_{nj}b_n$.

Transzformáció mátrixa

Rövidítés: **ONB** = OrtoNormált Bázis.

Állítás

Legyen V euklideszi tér, b_1, \dots, b_n ONB és $A \in \text{Hom}(V)$.
Ekkor A mátrixa a b_1, \dots, b_n bázisban $[A]_{\mathbf{b}} = ((\langle b_i, A(b_j) \rangle))$
(vagyis az i -edik sor j -edik eleme $\langle b_i, A(b_j) \rangle$).

Bizonyítás

Ha az A mátrixában az i -edik sor j -edik eleme λ_{ij} ,
akkor $A(b_j) = \lambda_{1j}b_1 + \dots + \lambda_{nj}b_n$.

Tudjuk, hogy $A(b_j)$ -nek az i -edik koordinátája $\langle b_i, A(b_j) \rangle$. □

Transzformáció mátrixa

Rövidítés: **ONB** = OrtoNormált Bázis.

Állítás

Legyen V euklideszi tér, b_1, \dots, b_n ONB és $A \in \text{Hom}(V)$.
Ekkor A mátrixa a b_1, \dots, b_n bázisban $[A]_{\mathbf{b}} = ((\langle b_i, A(b_j) \rangle))$
(vagyis az i -edik sor j -edik eleme $\langle b_i, A(b_j) \rangle$).

Bizonyítás

Ha az A mátrixában az i -edik sor j -edik eleme λ_{ij} ,
akkor $A(b_j) = \lambda_{1j}b_1 + \dots + \lambda_{nj}b_n$.

Tudjuk, hogy $A(b_j)$ -nek az i -edik koordinátája $\langle b_i, A(b_j) \rangle$. □

Megjegyzés: a fenti komplex fölött is igaz,

Transzformáció mátrixa

Rövidítés: **ONB** = OrtoNormált Bázis.

Állítás

Legyen V euklideszi tér, b_1, \dots, b_n ONB és $A \in \text{Hom}(V)$.
Ekkor A mátrixa a b_1, \dots, b_n bázisban $[A]_{\mathbf{b}} = ((\langle b_i, A(b_j) \rangle))$
(vagyis az i -edik sor j -edik eleme $\langle b_i, A(b_j) \rangle$).

Bizonyítás

Ha az A mátrixában az i -edik sor j -edik eleme λ_{ij} ,
akkor $A(b_j) = \lambda_{1j}b_1 + \dots + \lambda_{nj}b_n$.

Tudjuk, hogy $A(b_j)$ -nek az i -edik koordinátája $\langle b_i, A(b_j) \rangle$. □

Megjegyzés: a fenti komplex fölött is igaz, $\langle b_i, A(b_j) \rangle = \lambda_{ij}$,

Transzformáció mátrixa

Rövidítés: **ONB** = OrtoNormált Bázis.

Állítás

Legyen V euklideszi tér, b_1, \dots, b_n ONB és $A \in \text{Hom}(V)$.
Ekkor A mátrixa a b_1, \dots, b_n bázisban $[A]_{\mathbf{b}} = ((\langle b_i, A(b_j) \rangle))$
(vagyis az i -edik sor j -edik eleme $\langle b_i, A(b_j) \rangle$).

Bizonyítás

Ha az A mátrixában az i -edik sor j -edik eleme λ_{ij} ,
akkor $A(b_j) = \lambda_{1j}b_1 + \dots + \lambda_{nj}b_n$.

Tudjuk, hogy $A(b_j)$ -nek az i -edik koordinátája $\langle b_i, A(b_j) \rangle$. □

Megjegyzés: a fenti komplex fölött is igaz, $\langle b_i, A(b_j) \rangle = \lambda_{ij}$,
mert a skaláris szorzat a **második** tényezőben lineáris.

Transzformáció mátrixa

Rövidítés: **ONB** = OrtoNormált Bázis.

Állítás

Legyen V euklideszi tér, b_1, \dots, b_n ONB és $A \in \text{Hom}(V)$.
Ekkor A mátrixa a b_1, \dots, b_n bázisban $[A]_{\mathbf{b}} = ((\langle b_i, A(b_j) \rangle))$
(vagyis az i -edik sor j -edik eleme $\langle b_i, A(b_j) \rangle$).

Bizonyítás

Ha az A mátrixában az i -edik sor j -edik eleme λ_{ij} ,
akkor $A(b_j) = \lambda_{1j}b_1 + \dots + \lambda_{nj}b_n$.

Tudjuk, hogy $A(b_j)$ -nek az i -edik koordinátája $\langle b_i, A(b_j) \rangle$. □

Megjegyzés: a fenti komplex fölött is igaz, $\langle b_i, A(b_j) \rangle = \lambda_{ij}$,
mert a skaláris szorzat a **második** tényezőben lineáris.

Itt azonban fontos a tényezők sorrendje a skaláris szorzatban!

Transzponált konjugált

Freud, 8.4.1. és 8.4.2. Tétel

Legyen V euklideszi tér,

Transzponált konjugált

Freud, 8.4.1. és 8.4.2. Tétel

Legyen V euklideszi tér, b_1, \dots, b_n ONB

Transzponált konjugált

Freud, 8.4.1. és 8.4.2. Tétel

Legyen V euklideszi tér, b_1, \dots, b_n ONB és $A, B \in \text{Hom}(V)$.

Transzponált konjugált

Freud, 8.4.1. és 8.4.2. Tétel

Legyen V euklideszi tér, b_1, \dots, b_n ONB és $A, B \in \text{Hom}(V)$.
Ekkor $[A]_{\mathbf{b}}$ és $[B]_{\mathbf{b}}$ pontosan akkor egymás transzponált konjugáltjai,

Transzponált konjugált

Freud, 8.4.1. és 8.4.2. Tétel

Legyen V euklideszi tér, b_1, \dots, b_n ONB és $A, B \in \text{Hom}(V)$.
Ekkor $[A]_b$ és $[B]_b$ pontosan akkor egymás transzponált konjugáltjai, ha $\langle B(v), w \rangle = \langle v, A(w) \rangle$

Transzponált konjugált

Freud, 8.4.1. és 8.4.2. Tétel

Legyen V euklideszi tér, b_1, \dots, b_n ONB és $A, B \in \text{Hom}(V)$.
Ekkor $[A]_{\mathbf{b}}$ és $[B]_{\mathbf{b}}$ pontosan akkor egymás transzponált konjugáltjai, ha $\langle B(v), w \rangle = \langle v, A(w) \rangle$ minden $v, w \in V$ -re.

Transzponált konjugált

Freud, 8.4.1. és 8.4.2. Tétel

Legyen V euklideszi tér, b_1, \dots, b_n ONB és $A, B \in \text{Hom}(V)$.
Ekkor $[A]_{\mathbf{b}}$ és $[B]_{\mathbf{b}}$ pontosan akkor egymás transzponált konjugáltjai, ha $\langle B(v), w \rangle = \langle v, A(w) \rangle$ minden $v, w \in V$ -re.

Az (egyértelműen meghatározott) B az A **adjungáltja**,

Transzponált konjugált

Freud, 8.4.1. és 8.4.2. Tétel

Legyen V euklideszi tér, b_1, \dots, b_n ONB és $A, B \in \text{Hom}(V)$.
Ekkor $[A]_{\mathbf{b}}$ és $[B]_{\mathbf{b}}$ pontosan akkor egymás transzponált konjugáltjai, ha $\langle B(v), w \rangle = \langle v, A(w) \rangle$ minden $v, w \in V$ -re.

Az (egyértelműen meghatározott) B az A **adjungáltja**, jele A^* .

Transzponált konjugált

Freud, 8.4.1. és 8.4.2. Tétel

Legyen V euklideszi tér, b_1, \dots, b_n ONB és $A, B \in \text{Hom}(V)$.
Ekkor $[A]_b$ és $[B]_b$ pontosan akkor egymás transzponált konjugáltjai, ha $\langle B(v), w \rangle = \langle v, A(w) \rangle$ minden $v, w \in V$ -re.

Az (egyértelműen meghatározott) B az A **adjungáltja**, jele A^* .
Az M mátrix adjungáltja a transzponált konjugáltja,

Transzponált konjugált

Freud, 8.4.1. és 8.4.2. Tétel

Legyen V euklideszi tér, b_1, \dots, b_n ONB és $A, B \in \text{Hom}(V)$.
Ekkor $[A]_b$ és $[B]_b$ pontosan akkor egymás transzponált konjugáltjai, ha $\langle B(v), w \rangle = \langle v, A(w) \rangle$ minden $v, w \in V$ -re.

Az (egyértelműen meghatározott) B az A **adjungáltja**, jele A^* .
Az M mátrix adjungáltja a transzponált konjugáltja, jele M^* .

Transzponált konjugált

Freud, 8.4.1. és 8.4.2. Tétel

Legyen V euklideszi tér, b_1, \dots, b_n ONB és $A, B \in \text{Hom}(V)$.
Ekkor $[A]_b$ és $[B]_b$ pontosan akkor egymás transzponált konjugáltjai, ha $\langle B(v), w \rangle = \langle v, A(w) \rangle$ minden $v, w \in V$ -re.

Az (egyértelműen meghatározott) B az A **adjungáltja**, jele A^* .

Az M mátrix adjungáltja a transzponált konjugáltja, jele M^* .

Megjegyzés: valós fölött a konjugálás persze fölösleges.

Transzponált konjugált

Freud, 8.4.1. és 8.4.2. Tétel

Legyen V euklideszi tér, b_1, \dots, b_n ONB és $A, B \in \text{Hom}(V)$.
Ekkor $[A]_b$ és $[B]_b$ pontosan akkor egymás transzponált konjugáltjai, ha $\langle B(v), w \rangle = \langle v, A(w) \rangle$ minden $v, w \in V$ -re.

Az (egyértelműen meghatározott) B az A **adjungáltja**, jele A^* .
Az M mátrix adjungáltja a transzponált konjugáltja, jele M^* .

Megjegyzés: valós fölött a konjugálás persze fölösleges.

Bizonyítás

A v és w vektorokat a b_1, \dots, b_n bázisban felírva látszik,

Transzponált konjugált

Freud, 8.4.1. és 8.4.2. Tétel

Legyen V euklideszi tér, b_1, \dots, b_n ONB és $A, B \in \text{Hom}(V)$.
Ekkor $[A]_b$ és $[B]_b$ pontosan akkor egymás transzponált konjugáltjai, ha $\langle B(v), w \rangle = \langle v, A(w) \rangle$ minden $v, w \in V$ -re.

Az (egyértelműen meghatározott) B az A **adjungáltja**, jele A^* .
Az M mátrix adjungáltja a transzponált konjugáltja, jele M^* .

Megjegyzés: valós fölött a konjugálás persze fölösleges.

Bizonyítás

A v és w vektorokat a b_1, \dots, b_n bázisban felírva látszik, hogy a $\langle B(v), w \rangle = \langle v, A(w) \rangle$ egyenlőséget elég akkor megkövetelni,

Transzponált konjugált

Freud, 8.4.1. és 8.4.2. Tétel

Legyen V euklideszi tér, b_1, \dots, b_n ONB és $A, B \in \text{Hom}(V)$.
Ekkor $[A]_b$ és $[B]_b$ pontosan akkor egymás transzponált konjugáltjai, ha $\langle B(v), w \rangle = \langle v, A(w) \rangle$ minden $v, w \in V$ -re.

Az (egyértelműen meghatározott) B az A **adjungáltja**, jele A^* .
Az M mátrix adjungáltja a transzponált konjugáltja, jele M^* .

Megjegyzés: valós fölött a konjugálás persze fölösleges.

Bizonyítás

A v és w vektorokat a b_1, \dots, b_n bázisban felírva látszik, hogy a $\langle B(v), w \rangle = \langle v, A(w) \rangle$ egyenlőséget elég akkor megkövetelni, ha v és w is bázisvektor

Transzponált konjugált

Freud, 8.4.1. és 8.4.2. Tétel

Legyen V euklideszi tér, b_1, \dots, b_n ONB és $A, B \in \text{Hom}(V)$. Ekkor $[A]_b$ és $[B]_b$ pontosan akkor egymás transzponált konjugáltjai, ha $\langle B(v), w \rangle = \langle v, A(w) \rangle$ minden $v, w \in V$ -re.

Az (egyértelműen meghatározott) B az A **adjungáltja**, jele A^* . Az M mátrix adjungáltja a transzponált konjugáltja, jele M^* .

Megjegyzés: valós fölött a konjugálás persze fölösleges.

Bizonyítás

A v és w vektorokat a b_1, \dots, b_n bázisban felírva látszik, hogy a $\langle B(v), w \rangle = \langle v, A(w) \rangle$ egyenlőséget elég akkor megkövetelni, ha v és w is bázisvektor (HF).

Transzponált konjugált

Freud, 8.4.1. és 8.4.2. Tétel

Legyen V euklideszi tér, b_1, \dots, b_n ONB és $A, B \in \text{Hom}(V)$.
Ekkor $[A]_b$ és $[B]_b$ pontosan akkor egymás transzponált konjugáltjai, ha $\langle B(v), w \rangle = \langle v, A(w) \rangle$ minden $v, w \in V$ -re.

Az (egyértelműen meghatározott) B az A **adjungáltja**, jele A^* .
Az M mátrix adjungáltja a transzponált konjugáltja, jele M^* .

Megjegyzés: valós fölött a konjugálás persze fölösleges.

Bizonyítás

A v és w vektorokat a b_1, \dots, b_n bázisban felírva látszik, hogy a $\langle B(v), w \rangle = \langle v, A(w) \rangle$ egyenlőséget elég akkor megkövetelni, ha v és w is bázisvektor (HF).

Mivel $\langle B(b_i), b_j \rangle = \langle b_j, B(b_i) \rangle$,

Transzponált konjugált

Freud, 8.4.1. és 8.4.2. Tétel

Legyen V euklideszi tér, b_1, \dots, b_n ONB és $A, B \in \text{Hom}(V)$. Ekkor $[A]_b$ és $[B]_b$ pontosan akkor egymás transzponált konjugáltjai, ha $\langle B(v), w \rangle = \langle v, A(w) \rangle$ minden $v, w \in V$ -re.

Az (egyértelműen meghatározott) B az A **adjungáltja**, jele A^* . Az M mátrix adjungáltja a transzponált konjugáltja, jele M^* .

Megjegyzés: valós fölött a konjugálás persze fölösleges.

Bizonyítás

A v és w vektorokat a b_1, \dots, b_n bázisban felírva látszik, hogy a $\langle B(v), w \rangle = \langle v, A(w) \rangle$ egyenlőséget elég akkor megkövetelni, ha v és w is bázisvektor (**HF**). Mivel $\langle B(b_i), b_j \rangle = \langle b_j, B(b_i) \rangle$, és ez a $[B]_b$ transzponált konjugáltjában az i -edik sor j -edik eleme,

Transzponált konjugált

Freud, 8.4.1. és 8.4.2. Tétel

Legyen V euklideszi tér, b_1, \dots, b_n ONB és $A, B \in \text{Hom}(V)$. Ekkor $[A]_b$ és $[B]_b$ pontosan akkor egymás transzponált konjugáltjai, ha $\langle B(v), w \rangle = \langle v, A(w) \rangle$ minden $v, w \in V$ -re.

Az (egyértelműen meghatározott) B az A **adjungáltja**, jele A^* . Az M mátrix adjungáltja a transzponált konjugáltja, jele M^* .

Megjegyzés: valós fölött a konjugálás persze fölösleges.

Bizonyítás

A v és w vektorokat a b_1, \dots, b_n bázisban felírva látszik, hogy a $\langle B(v), w \rangle = \langle v, A(w) \rangle$ egyenlőséget elég akkor megkövetelni, ha v és w is bázisvektor (**HF**). Mivel $\langle B(b_i), b_j \rangle = \langle b_j, B(b_i) \rangle$, és ez a $[B]_b$ transzponált konjugáltjában az i -edik sor j -edik eleme, az állítás igaz. □

Invariáns altér

Freud, 6.4.1. Definíció

A $W \leq V$ altér az $A \in \text{Hom}(V)$ transzformációnak **invariáns altere**,

Invariáns altér

Freud, 6.4.1. Definíció

A $W \leq V$ altér az $A \in \text{Hom}(V)$ transzformációnak **invariáns altère**, ha minden $w \in W$ esetén

Invariáns altér

Freud, 6.4.1. Definíció

A $W \leq V$ altér az $A \in \text{Hom}(V)$ transzformációnak **invariáns altère**, ha minden $w \in W$ esetén $A(w) \in W$.

Invariáns altér

Freud, 6.4.1. Definíció

A $W \leq V$ altér az $A \in \text{Hom}(V)$ transzformációnak **invariáns altère**, ha minden $w \in W$ esetén $A(w) \in W$.

Azaz A nem tud W -ből vektort kivinni.

Invariáns altér

Freud, 6.4.1. Definíció

A $W \leq V$ altér az $A \in \text{Hom}(V)$ transzformációnak **invariáns altère**, ha minden $w \in W$ esetén $A(w) \in W$.

Azaz A nem tud W -ből vektort kivinni.

Freud, 8.4.3. Tétel

Ha $W \leq V$ A -invariáns,

Invariáns altér

Freud, 6.4.1. Definíció

A $W \leq V$ altér az $A \in \text{Hom}(V)$ transzformációnak **invariáns altère**, ha minden $w \in W$ esetén $A(w) \in W$.

Azaz A nem tud W -ből vektort kivinni.

Freud, 8.4.3. Tétel

Ha $W \leq V$ A -invariáns, akkor W^\perp A^* -invariáns.

Invariáns altér

Freud, 6.4.1. Definíció

A $W \leq V$ altér az $A \in \text{Hom}(V)$ transzformációnak **invariáns altère**, ha minden $w \in W$ esetén $A(w) \in W$.

Azaz A nem tud W -ből vektort kivinni.

Freud, 8.4.3. Tétel

Ha $W \leq V$ A -invariáns, akkor W^\perp A^* -invariáns.

Bizonyítás

Legyen $v \in W^\perp$,

Invariáns altér

Freud, 6.4.1. Definíció

A $W \leq V$ altér az $A \in \text{Hom}(V)$ transzformációnak **invariáns altère**, ha minden $w \in W$ esetén $A(w) \in W$.

Azaz A nem tud W -ből vektort kivinni.

Freud, 8.4.3. Tétel

Ha $W \leq V$ **A -invariáns**, akkor W^\perp **A^* -invariáns**.

Bizonyítás

Legyen $v \in W^\perp$, be kell látni, hogy $A^*(v) \in W^\perp$.

Invariáns altér

Freud, 6.4.1. Definíció

A $W \leq V$ altér az $A \in \text{Hom}(V)$ transzformációnak **invariáns altère**, ha minden $w \in W$ esetén $A(w) \in W$.

Azaz A nem tud W -ből vektort kivinni.

Freud, 8.4.3. Tétel

Ha $W \leq V$ A -invariáns, akkor W^\perp A^* -invariáns.

Bizonyítás

Legyen $v \in W^\perp$, be kell látni, hogy $A^*(v) \in W^\perp$.

Ez azt jelenti, hogy $A^*(v)$ merőleges minden W -belire,

Invariáns altér

Freud, 6.4.1. Definíció

A $W \leq V$ altér az $A \in \text{Hom}(V)$ transzformációnak **invariáns altère**, ha minden $w \in W$ esetén $A(w) \in W$.

Azaz A nem tud W -ből vektort kivinni.

Freud, 8.4.3. Tétel

Ha $W \leq V$ **A -invariáns**, akkor W^\perp **A^* -invariáns**.

Bizonyítás

Legyen $v \in W^\perp$, be kell látni, hogy $A^*(v) \in W^\perp$.

Ez azt jelenti, hogy $A^*(v)$ merőleges minden W -belire, azaz tetszőleges $w \in W$ -re $\langle w, A^*(v) \rangle = 0$.

Invariáns altér

Freud, 6.4.1. Definíció

A $W \leq V$ altér az $A \in \text{Hom}(V)$ transzformációnak **invariáns altère**, ha minden $w \in W$ esetén $A(w) \in W$.

Azaz A nem tud W -ből vektort kivinni.

Freud, 8.4.3. Tétel

Ha $W \leq V$ **A -invariáns**, akkor W^\perp **A^* -invariáns**.

Bizonyítás

Legyen $v \in W^\perp$, be kell látni, hogy $A^*(v) \in W^\perp$.

Ez azt jelenti, hogy $A^*(v)$ merőleges minden W -belire, azaz tetszőleges $w \in W$ -re $\langle w, A^*(v) \rangle = 0$. Ez igaz, mert $\langle w, A^*(v) \rangle = \langle A(w), v \rangle = 0$,

Invariáns altér

Freud, 6.4.1. Definíció

A $W \leq V$ altér az $A \in \text{Hom}(V)$ transzformációnak **invariáns altère**, ha minden $w \in W$ esetén $A(w) \in W$.

Azaz A nem tud W -ből vektort kivinni.

Freud, 8.4.3. Tétel

Ha $W \leq V$ **A -invariáns**, akkor W^\perp **A^* -invariáns**.

Bizonyítás

Legyen $v \in W^\perp$, be kell látni, hogy $A^*(v) \in W^\perp$.

Ez azt jelenti, hogy $A^*(v)$ merőleges minden W -belire, azaz tetszőleges $w \in W$ -re $\langle w, A^*(v) \rangle = 0$. Ez igaz, mert $\langle w, A^*(v) \rangle = \langle A(w), v \rangle = 0$, hiszen $A(w) \in W$

Invariáns altér

Freud, 6.4.1. Definíció

A $W \leq V$ altér az $A \in \text{Hom}(V)$ transzformációnak **invariáns altère**, ha minden $w \in W$ esetén $A(w) \in W$.

Azaz A nem tud W -ből vektort kivinni.

Freud, 8.4.3. Tétel

Ha $W \leq V$ **A -invariáns**, akkor W^\perp **A^* -invariáns**.

Bizonyítás

Legyen $v \in W^\perp$, be kell látni, hogy $A^*(v) \in W^\perp$.

Ez azt jelenti, hogy $A^*(v)$ merőleges minden W -belire, azaz tetszőleges $w \in W$ -re $\langle w, A^*(v) \rangle = 0$. Ez igaz, mert $\langle w, A^*(v) \rangle = \langle A(w), v \rangle = 0$, hiszen $A(w) \in W$ és $v \in W^\perp$. □

Mátrixok blokkfelbontása

Kiss, 7.6.1. Állítás, HF

Legyen b_1, \dots, b_n bázis a V vektortérben,

Mátrixok blokkfelbontása

Kiss, 7.6.1. Állítás, HF

Legyen b_1, \dots, b_n bázis a V vektortérben,
 U a b_1, \dots, b_m által generált altér.

Mátrixok blokkfelbontása

Kiss, 7.6.1. Állítás, HF

Legyen b_1, \dots, b_n bázis a V vektortérben,

U a b_1, \dots, b_m és W a b_{m+1}, \dots, b_n által generált altér.

Mátrixok blokkfelbontása

Kiss, 7.6.1. Állítás, HF

Legyen b_1, \dots, b_n bázis a V vektortérben,

U a b_1, \dots, b_m és W a b_{m+1}, \dots, b_n által generált altér.

Ekkor $V = U \oplus W$.

Mátrixok blokkfelbontása

Kiss, 7.6.1. Állítás, HF

Legyen b_1, \dots, b_n bázis a V vektortérben,
 U a b_1, \dots, b_m és W a b_{m+1}, \dots, b_n által generált altér.
Ekkor $V = U \oplus W$. Legyen $A \in \text{Hom}(V)$.

Mátrixok blokkfelbontása

Kiss, 7.6.1. Állítás, HF

Legyen b_1, \dots, b_n bázis a V vektortérben,

U a b_1, \dots, b_m és W a b_{m+1}, \dots, b_n által generált altér.

Ekkor $V = U \oplus W$. Legyen $A \in \text{Hom}(V)$.

Az U és W alterek pontosan akkor A -invariánsak,

Mátrixok blokkfelbontása

Kiss, 7.6.1. Állítás, HF

Legyen b_1, \dots, b_n bázis a V vektortérben,

U a b_1, \dots, b_m és W a b_{m+1}, \dots, b_n által generált altér.

Ekkor $V = U \oplus W$. Legyen $A \in \text{Hom}(V)$.

Az U és W alterek pontosan akkor A -invariánsak, ha

$$[A]_{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} K & O_1 \\ O_2 & L \end{bmatrix},$$

Mátrixok blokkfelbontása

Kiss, 7.6.1. Állítás, HF

Legyen b_1, \dots, b_n bázis a V vektortérben,

U a b_1, \dots, b_m és W a b_{m+1}, \dots, b_n által generált altér.

Ekkor $V = U \oplus W$. Legyen $A \in \text{Hom}(V)$.

Az U és W alterek pontosan akkor A -invariánsak, ha

$$[A]_{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} K & O_1 \\ O_2 & L \end{bmatrix},$$

ahol a K blokk $m \times m$ -es,

Mátrixok blokkfelbontása

Kiss, 7.6.1. Állítás, HF

Legyen b_1, \dots, b_n bázis a V vektortérben,

U a b_1, \dots, b_m és W a b_{m+1}, \dots, b_n által generált altér.

Ekkor $V = U \oplus W$. Legyen $A \in \text{Hom}(V)$.

Az U és W alterek pontosan akkor A -invariánsak, ha

$$[A]_{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} K & O_1 \\ O_2 & L \end{bmatrix},$$

ahol a K blokk $m \times m$ -es, az L blokk $(n - m) \times (n - m)$ -es,

Mátrixok blokkfelbontása

Kiss, 7.6.1. Állítás, HF

Legyen b_1, \dots, b_n bázis a V vektortérben,

U a b_1, \dots, b_m és W a b_{m+1}, \dots, b_n által generált altér.

Ekkor $V = U \oplus W$. Legyen $A \in \text{Hom}(V)$.

Az U és W alterek pontosan akkor A -invariánsak, ha

$$[A]_{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} K & O_1 \\ O_2 & L \end{bmatrix},$$

ahol a K blokk $m \times m$ -es, az L blokk $(n - m) \times (n - m)$ -es, az O_1 és O_2 mátrixok pedig csupa nullából állnak.

Mátrixok blokkfelbontása

Kiss, 7.6.1. Állítás, HF

Legyen b_1, \dots, b_n bázis a V vektortérben,
 U a b_1, \dots, b_m és W a b_{m+1}, \dots, b_n által generált altér.
Ekkor $V = U \oplus W$. Legyen $A \in \text{Hom}(V)$.
Az U és W alterek pontosan akkor A -invariánsak, ha

$$[A]_{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} K & O_1 \\ O_2 & L \end{bmatrix},$$

ahol a K blokk $m \times m$ -es, az L blokk $(n - m) \times (n - m)$ -es,
az O_1 és O_2 mátrixok pedig csupa nullából állnak.

Ilyenkor az A leképezés megszorítható U -ra,

Mátrixok blokkfelbontása

Kiss, 7.6.1. Állítás, HF

Legyen b_1, \dots, b_n bázis a V vektortérben,

U a b_1, \dots, b_m és W a b_{m+1}, \dots, b_n által generált altér.

Ekkor $V = U \oplus W$. Legyen $A \in \text{Hom}(V)$.

Az U és W alterek pontosan akkor A -invariánsak, ha

$$[A]_{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} K & O_1 \\ O_2 & L \end{bmatrix},$$

ahol a K blokk $m \times m$ -es, az L blokk $(n - m) \times (n - m)$ -es, az O_1 és O_2 mátrixok pedig csupa nullából állnak.

Ilyenkor az A leképezés megszorítható U -ra,

és a megszorítás mátrixa a b_1, \dots, b_m bázisban K .

Mátrixok blokkfelbontása

Kiss, 7.6.1. Állítás, HF

Legyen b_1, \dots, b_n bázis a V vektortérben,
 U a b_1, \dots, b_m és W a b_{m+1}, \dots, b_n által generált altér.
Ekkor $V = U \oplus W$. Legyen $A \in \text{Hom}(V)$.
Az U és W alterek pontosan akkor A -invariánsak, ha

$$[A]_{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} K & O_1 \\ O_2 & L \end{bmatrix},$$

ahol a K blokk $m \times m$ -es, az L blokk $(n - m) \times (n - m)$ -es,
az O_1 és O_2 mátrixok pedig csupa nullából állnak.

Ilyenkor az A leképezés megszorítható U -ra,
és a megszorítás mátrixa a b_1, \dots, b_m bázisban K .
Hasonlóan A megszorítható W -re,

Mátrixok blokkfelbontása

Kiss, 7.6.1. Állítás, HF

Legyen b_1, \dots, b_n bázis a V vektortérben,

U a b_1, \dots, b_m és W a b_{m+1}, \dots, b_n által generált altér.

Ekkor $V = U \oplus W$. Legyen $A \in \text{Hom}(V)$.

Az U és W alterek pontosan akkor A -invariánsak, ha

$$[A]_{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} K & O_1 \\ O_2 & L \end{bmatrix},$$

ahol a K blokk $m \times m$ -es, az L blokk $(n - m) \times (n - m)$ -es, az O_1 és O_2 mátrixok pedig csupa nullából állnak.

Ilyenkor az A leképezés megszorítható U -ra,

és a megszorítás mátrixa a b_1, \dots, b_m bázisban K .

Hasonlóan A megszorítható W -re, és ennek mátrixa L .

Szép alak ortonormált bázisban

Emlékeztető (F6.6.4 Tétel): Komplex fölött minden transzformáció mátrixa alkalmas bázisban **Jordan-alakú**.

Szép alak ortonormált bázisban

Emlékeztető (F6.6.4 Tétel): Komplex fölött minden transzformáció mátrixa alkalmas bázisban **Jordan-alakú**. Ez **speciális** felső háromszögmátrix.

Szép alak ortonormált bázisban

Emlékeztető (F6.6.4 Tétel): Komplex fölött minden transzformáció mátrixa alkalmas bázisban **Jordan-alakú**. Ez **speciális** felső háromszögmátrix.

F8.5.15. Feladat (gyakorlaton bizonyítjuk)

Komplex fölött minden transzformáció mátrixa alkalmas **ortonormált** bázisban felső háromszögmátrix.

Szép alak ortonormált bázisban

Emlékeztető (F6.6.4 Tétel): Komplex fölött minden transzformáció mátrixa alkalmas bázisban **Jordan-alakú**. Ez **speciális** felső háromszögmátrix.

F8.5.15. Feladat (gyakorlaton bizonyítjuk)

Komplex fölött minden transzformáció mátrixa alkalmas **ortonormált** bázisban felső háromszögmátrix.

Emlékeztető (F6.6.1 Feladat): Komplex fölött az $A \in \text{Hom}(V)$ pontosan akkor diagonalizálható

Szép alak ortonormált bázisban

Emlékeztető (F6.6.4 Tétel): Komplex fölött minden transzformáció mátrixa alkalmas bázisban **Jordan-alakú**. Ez **speciális** felső háromszögmátrix.

F8.5.15. Feladat (gyakorlaton bizonyítjuk)

Komplex fölött minden transzformáció mátrixa alkalmas **ortonormált** bázisban felső háromszögmátrix.

Emlékeztető (F6.6.1 Feladat): Komplex fölött az $A \in \text{Hom}(V)$ pontosan akkor diagonalizálható (a bázisra nincs megkötés),

Szép alak ortonormált bázisban

Emlékeztető (F6.6.4 Tétel): Komplex fölött minden transzformáció mátrixa alkalmas bázisban **Jordan-alakú**. Ez **speciális** felső háromszögmátrix.

F8.5.15. Feladat (gyakorlaton bizonyítjuk)

Komplex fölött minden transzformáció mátrixa alkalmas **ortonormált** bázisban felső háromszögmátrix.

Emlékeztető (F6.6.1 Feladat): Komplex fölött az $A \in \text{Hom}(V)$ pontosan akkor diagonalizálható (a bázisra nincs megkötés), ha a minimálpolinomjának minden gyöke egyszeres.

Szép alak ortonormált bázisban

Emlékeztető (F6.6.4 Tétel): Komplex fölött minden transzformáció mátrixa alkalmas bázisban **Jordan-alakú**. Ez **speciális** felső háromszögmátrix.

F8.5.15. Feladat (gyakorlaton bizonyítjuk)

Komplex fölött minden transzformáció mátrixa alkalmas **ortonormált** bázisban felső háromszögmátrix.

Emlékeztető (F6.6.1 Feladat): Komplex fölött az $A \in \text{Hom}(V)$ pontosan akkor diagonalizálható (a bázisra nincs megkötés), ha a minimálpolinomjának minden gyöke egyszeres.

F8.5.2. Tétel

Komplex fölött az $A \in \text{Hom}(V)$ pontosan akkor diagonalizálható **ortonormált** bázisban,

Szép alak ortonormált bázisban

Emlékeztető (F6.6.4 Tétel): Komplex fölött minden transzformáció mátrixa alkalmas bázisban **Jordan-alakú**. Ez **speciális** felső háromszögmátrix.

F8.5.15. Feladat (gyakorlaton bizonyítjuk)

Komplex fölött minden transzformáció mátrixa alkalmas **ortonormált** bázisban felső háromszögmátrix.

Emlékeztető (F6.6.1 Feladat): Komplex fölött az $A \in \text{Hom}(V)$ pontosan akkor diagonalizálható (a bázisra nincs megkötés), ha a minimálpolinomjának minden gyöke egyszeres.

F8.5.2. Tétel

Komplex fölött az $A \in \text{Hom}(V)$ pontosan akkor diagonalizálható **ortonormált** bázisban, ha $AA^* = A^*A$

Szép alak ortonormált bázisban

Emlékeztető (F6.6.4 Tétel): Komplex fölött minden transzformáció mátrixa alkalmas bázisban **Jordan-alakú**. Ez **speciális** felső háromszögmátrix.

F8.5.15. Feladat (gyakorlaton bizonyítjuk)

Komplex fölött minden transzformáció mátrixa alkalmas **ortonormált** bázisban felső háromszögmátrix.

Emlékeztető (F6.6.1 Feladat): Komplex fölött az $A \in \text{Hom}(V)$ pontosan akkor diagonalizálható (a bázisra nincs megkötés), ha a minimálpolinomjának minden gyöke egyszeres.

F8.5.2. Tétel

Komplex fölött az $A \in \text{Hom}(V)$ pontosan akkor diagonalizálható **ortonormált** bázisban, ha $AA^* = A^*A$ (**normális** transzformáció).

Normális transzformációk: bizonyítás

Ha $[A]_{\mathbf{b}}$ diagonális,

Normális transzformációk: bizonyítás

Ha $[A]_{\mathbf{b}}$ diagonális, akkor a transzponált konjugáltja is.

Normális transzformációk: bizonyítás

Ha $[A]_{\mathbf{b}}$ diagonális, akkor a transzponált konjugáltja is.
Diagonális mátrixok felcserélhetők,

Normális transzformációk: bizonyítás

Ha $[A]_{\mathbf{b}}$ diagonális, akkor a transzponált konjugáltja is.
Diagonális mátrixok felcserélhetők, így A és A^* is.

Normális transzformációk: bizonyítás

Ha $[A]_{\mathbf{b}}$ diagonális, akkor a transzponált konjugáltja is.
Diagonális mátrixok felcserélhetők, így A és A^* is.
Megfordítva: Indukció $\dim(V)$ szerint.

Normális transzformációk: bizonyítás

Ha $[A]_{\mathbf{b}}$ diagonális, akkor a transzponált konjugáltja is.

Diagonális mátrixok felcserélhetők, így A és A^* is.

Megfordítva: Indukció $\dim(V)$ szerint. Egy dimenzióban igaz.

Normális transzformációk: bizonyítás

Ha $[A]_{\mathbf{b}}$ diagonális, akkor a transzponált konjugáltja is.

Diagonális mátrixok felcserélhetők, így A és A^* is.

Megfordítva: Indukció $\dim(V)$ szerint. Egy dimenzióban igaz.

Legyen λ sajátértéke A^* -nak

Normális transzformációk: bizonyítás

Ha $[A]_{\mathbf{b}}$ diagonális, akkor a transzponált konjugáltja is.

Diagonális mátrixok felcserélhetők, így A és A^* is.

Megfordítva: Indukció $\dim(V)$ szerint. Egy dimenzióban igaz.

Legyen λ sajátértéke A^* -nak (komplex fölött létezik),

Normális transzformációk: bizonyítás

Ha $[A]_{\mathbf{b}}$ diagonális, akkor a transzponált konjugáltja is.

Diagonális mátrixok felcserélhetők, így A és A^* is.

Megfordítva: Indukció $\dim(V)$ szerint. Egy dimenzióban igaz.

Legyen λ sajátértéke A^* -nak (komplex fölött létezik),

és U a hozzá tartozó sajátaltér:

Normális transzformációk: bizonyítás

Ha $[A]_{\mathbf{b}}$ diagonális, akkor a transzponált konjugáltja is.

Diagonális mátrixok felcserélhetők, így A és A^* is.

Megfordítva: Indukció $\dim(V)$ szerint. Egy dimenzióban igaz.

Legyen λ sajátértéke A^* -nak (komplex fölött létezik),

és U a hozzá tartozó sajátaltér: $u \in U \iff A^*(u) = \lambda u$.

Normális transzformációk: bizonyítás

Ha $[A]_{\mathfrak{b}}$ diagonális, akkor a transzponált konjugáltja is.

Diagonális mátrixok felcserélhetők, így A és A^* is.

Megfordítva: Indukció $\dim(V)$ szerint. Egy dimenzióban igaz.

Legyen λ sajátértéke A^* -nak (komplex fölött létezik),

és U a hozzá tartozó sajátaltér: $u \in U \iff A^*(u) = \lambda u$.

Belátjuk, hogy az U altér A -invariáns,

Normális transzformációk: bizonyítás

Ha $[A]_{\mathfrak{b}}$ diagonális, akkor a transzponált konjugáltja is.

Diagonális mátrixok felcserélhetők, így A és A^* is.

Megfordítva: Indukció $\dim(V)$ szerint. Egy dimenzióban igaz.

Legyen λ sajátértéke A^* -nak (komplex fölött létezik),

és U a hozzá tartozó sajátaltér: $u \in U \iff A^*(u) = \lambda u$.

Belátjuk, hogy az U altér A -invariáns, legyen $u \in U$.

Normális transzformációk: bizonyítás

Ha $[A]_{\mathbf{b}}$ diagonális, akkor a transzponált konjugáltja is.

Diagonális mátrixok felcserélhetők, így A és A^* is.

Megfordítva: Indukció $\dim(V)$ szerint. Egy dimenzióban igaz.

Legyen λ sajátértéke A^* -nak (komplex fölött létezik),

és U a hozzá tartozó sajátaltér: $u \in U \iff A^*(u) = \lambda u$.

Belátjuk, hogy az U altér A -invariáns, legyen $u \in U$.

Ekkor $A^*A(u) = AA^*(u)$

Normális transzformációk: bizonyítás

Ha $[A]_{\mathbf{b}}$ diagonális, akkor a transzponált konjugáltja is.

Diagonális mátrixok felcserélhetők, így A és A^* is.

Megfordítva: Indukció $\dim(V)$ szerint. Egy dimenzióban igaz.

Legyen λ sajátértéke A^* -nak (komplex fölött létezik),

és U a hozzá tartozó sajátaltér: $u \in U \iff A^*(u) = \lambda u$.

Belátjuk, hogy az U altér A -invariáns, legyen $u \in U$.

Ekkor $A^*A(u) = AA^*(u) = A(\lambda u)$

Normális transzformációk: bizonyítás

Ha $[A]_{\mathbf{b}}$ diagonális, akkor a transzponált konjugáltja is.

Diagonális mátrixok felcserélhetők, így A és A^* is.

Megfordítva: Indukció $\dim(V)$ szerint. Egy dimenzióban igaz.

Legyen λ sajátértéke A^* -nak (komplex fölött létezik),

és U a hozzá tartozó sajátaltér: $u \in U \iff A^*(u) = \lambda u$.

Belátjuk, hogy az U altér A -invariáns, legyen $u \in U$.

Ekkor $A^*A(u) = AA^*(u) = A(\lambda u) = \lambda A(u)$.

Normális transzformációk: bizonyítás

Ha $[A]_{\mathbf{b}}$ diagonális, akkor a transzponált konjugáltja is.

Diagonális mátrixok felcserélhetők, így A és A^* is.

Megfordítva: Indukció $\dim(V)$ szerint. Egy dimenzióban igaz.

Legyen λ sajátértéke A^* -nak (komplex fölött létezik),

és U a hozzá tartozó sajátaltér: $u \in U \iff A^*(u) = \lambda u$.

Belátjuk, hogy az U altér A -invariáns, legyen $u \in U$.

Ekkor $A^*A(u) = AA^*(u) = A(\lambda u) = \lambda A(u)$. Vagyis $A(u) \in U$.

Normális transzformációk: bizonyítás

Ha $[A]_{\mathbf{b}}$ diagonális, akkor a transzponált konjugáltja is.

Diagonális mátrixok felcserélhetők, így A és A^* is.

Megfordítva: Indukció $\dim(V)$ szerint. Egy dimenzióban igaz.

Legyen λ sajátértéke A^* -nak (komplex fölött létezik),

és U a hozzá tartozó sajátaltér: $u \in U \iff A^*(u) = \lambda u$.

Belátjuk, hogy az U altér A -invariáns, legyen $u \in U$.

Ekkor $A^*A(u) = AA^*(u) = A(\lambda u) = \lambda A(u)$. Vagyis $A(u) \in U$.

Így A -nak van egy w sajátvektora U -ban.

Normális transzformációk: bizonyítás

Ha $[A]_{\mathbf{b}}$ diagonális, akkor a transzponált konjugáltja is.

Diagonális mátrixok felcserélhetők, így A és A^* is.

Megfordítva: Indukció $\dim(V)$ szerint. Egy dimenzióban igaz.

Legyen λ sajátértéke A^* -nak (komplex fölött létezik),

és U a hozzá tartozó sajátaltér: $u \in U \iff A^*(u) = \lambda u$.

Belátjuk, hogy az U altér A -invariáns, legyen $u \in U$.

Ekkor $A^*A(u) = AA^*(u) = A(\lambda u) = \lambda A(u)$. Vagyis $A(u) \in U$.

Így A -nak van egy w sajátvektora U -ban.

Tehát a w által generált W altér A -invariáns.

Normális transzformációk: bizonyítás

Ha $[A]_{\mathbf{b}}$ diagonális, akkor a transzponált konjugáltja is.

Diagonális mátrixok felcserélhetők, így A és A^* is.

Megfordítva: Indukció $\dim(V)$ szerint. Egy dimenzióban igaz.

Legyen λ sajátértéke A^* -nak (komplex fölött létezik),

és U a hozzá tartozó sajátaltér: $u \in U \iff A^*(u) = \lambda u$.

Belátjuk, hogy az U altér A -invariáns, legyen $u \in U$.

Ekkor $A^*A(u) = AA^*(u) = A(\lambda u) = \lambda A(u)$. Vagyis $A(u) \in U$.

Így A -nak van egy w sajátvektora U -ban.

Tehát a w által generált W altér A - és A^* -invariáns.

Normális transzformációk: bizonyítás

Ha $[A]_b$ diagonális, akkor a transzponált konjugáltja is.

Diagonális mátrixok felcserélhetők, így A és A^* is.

Megfordítva: Indukció $\dim(V)$ szerint. Egy dimenzióban igaz.

Legyen λ sajátértéke A^* -nak (komplex fölött létezik),

és U a hozzá tartozó sajátaltér: $u \in U \iff A^*(u) = \lambda u$.

Belátjuk, hogy az U altér A -invariáns, legyen $u \in U$.

Ekkor $A^*A(u) = AA^*(u) = A(\lambda u) = \lambda A(u)$. Vagyis $A(u) \in U$.

Így A -nak van egy w sajátvektora U -ban.

Tehát a w által generált W altér A - és A^* -invariáns.

Emiatt W^\perp is A - és $(A^*)^* = A$ -invariáns.

Normális transzformációk: bizonyítás

Ha $[A]_b$ diagonális, akkor a transzponált konjugáltja is.

Diagonális mátrixok felcserélhetők, így A és A^* is.

Megfordítva: Indukció $\dim(V)$ szerint. Egy dimenzióban igaz.

Legyen λ sajátértéke A^* -nak (komplex fölött létezik),

és U a hozzá tartozó sajátaltér: $u \in U \iff A^*(u) = \lambda u$.

Belátjuk, hogy az U altér A -invariáns, legyen $u \in U$.

Ekkor $A^*A(u) = AA^*(u) = A(\lambda u) = \lambda A(u)$. Vagyis $A(u) \in U$.

Így A -nak van egy w sajátvektora U -ban.

Tehát a w által generált W altér A - és A^* -invariáns.

Emiatt W^\perp is A - és $(A^*)^* = A$ -invariáns.

A és A^* az W^\perp altéren is adjungáltak

Normális transzformációk: bizonyítás

Ha $[A]_b$ diagonális, akkor a transzponált konjugáltja is.

Diagonális mátrixok felcserélhetők, így A és A^* is.

Megfordítva: Indukció $\dim(V)$ szerint. Egy dimenzióban igaz.

Legyen λ sajátértéke A^* -nak (komplex fölött létezik),

és U a hozzá tartozó sajátaltér: $u \in U \iff A^*(u) = \lambda u$.

Belátjuk, hogy az U altér A -invariáns, legyen $u \in U$.

Ekkor $A^*A(u) = AA^*(u) = A(\lambda u) = \lambda A(u)$. Vagyis $A(u) \in U$.

Így A -nak van egy w sajátvektora U -ban.

Tehát a w által generált W altér A - és A^* -invariáns.

Emiatt W^\perp is A - és $(A^*)^* = A$ -invariáns.

A és A^* az W^\perp altéren is adjungáltak és felcserélhetők

Normális transzformációk: bizonyítás

Ha $[A]_{\mathbf{b}}$ diagonális, akkor a transzponált konjugáltja is.

Diagonális mátrixok felcserélhetők, így A és A^* is.

Megfordítva: Indukció $\dim(V)$ szerint. Egy dimenzióban igaz.

Legyen λ sajátértéke A^* -nak (komplex fölött létezik),

és U a hozzá tartozó sajátaltér: $u \in U \iff A^*(u) = \lambda u$.

Belátjuk, hogy az U altér A -invariáns, legyen $u \in U$.

Ekkor $A^*A(u) = AA^*(u) = A(\lambda u) = \lambda A(u)$. Vagyis $A(u) \in U$.

Így A -nak van egy w sajátvektora U -ban.

Tehát a w által generált W altér A - és A^* -invariáns.

Emiatt W^\perp is A - és $(A^*)^* = A$ -invariáns.

A és A^* az W^\perp altéren is adjungáltak és felcserélhetők (HF).

Normális transzformációk: bizonyítás

Ha $[A]_b$ diagonális, akkor a transzponált konjugáltja is.

Diagonális mátrixok felcserélhetők, így A és A^* is.

Megfordítva: Indukció $\dim(V)$ szerint. Egy dimenzióban igaz.

Legyen λ sajátértéke A^* -nak (komplex fölött létezik),

és U a hozzá tartozó sajátaltér: $u \in U \iff A^*(u) = \lambda u$.

Belátjuk, hogy az U altér A -invariáns, legyen $u \in U$.

Ekkor $A^*A(u) = AA^*(u) = A(\lambda u) = \lambda A(u)$. Vagyis $A(u) \in U$.

Így A -nak van egy w sajátvektora U -ban.

Tehát a w által generált W altér A - és A^* -invariáns.

Emiatt W^\perp is A - és $(A^*)^* = A$ -invariáns.

A és A^* az W^\perp altéren is adjungáltak és felcserélhetők (HF).

Az indukciós feltevés miatt van W^\perp -ban b_2, \dots, b_n ONB

Normális transzformációk: bizonyítás

Ha $[A]_b$ diagonális, akkor a transzponált konjugáltja is.

Diagonális mátrixok felcserélhetők, így A és A^* is.

Megfordítva: Indukció $\dim(V)$ szerint. Egy dimenzióban igaz.

Legyen λ sajátértéke A^* -nak (komplex fölött létezik),

és U a hozzá tartozó sajátaltér: $u \in U \iff A^*(u) = \lambda u$.

Belátjuk, hogy az U altér A -invariáns, legyen $u \in U$.

Ekkor $A^*A(u) = AA^*(u) = A(\lambda u) = \lambda A(u)$. Vagyis $A(u) \in U$.

Így A -nak van egy w sajátvektora U -ban.

Tehát a w által generált W altér A - és A^* -invariáns.

Emiatt W^\perp is A - és $(A^*)^* = A$ -invariáns.

A és A^* az W^\perp altéren is adjungáltak és felcserélhetők (HF).

Az indukciós feltevés miatt van W^\perp -ban b_2, \dots, b_n ONB

melyben A mátrixa diagonális.

Normális transzformációk: bizonyítás

Ha $[A]_b$ diagonális, akkor a transzponált konjugáltja is.

Diagonális mátrixok felcserélhetők, így A és A^* is.

Megfordítva: Indukció $\dim(V)$ szerint. Egy dimenzióban igaz.

Legyen λ sajátértéke A^* -nak (komplex fölött létezik),

és U a hozzá tartozó sajátaltér: $u \in U \iff A^*(u) = \lambda u$.

Belátjuk, hogy az U altér A -invariáns, legyen $u \in U$.

Ekkor $A^*A(u) = AA^*(u) = A(\lambda u) = \lambda A(u)$. Vagyis $A(u) \in U$.

Így A -nak van egy w sajátvektora U -ban.

Tehát a w által generált W altér A - és A^* -invariáns.

Emiatt W^\perp is A - és $(A^*)^* = A$ -invariáns.

A és A^* az W^\perp altéren is adjungáltak és felcserélhetők (HF).

Az indukciós feltevés miatt van W^\perp -ban b_2, \dots, b_n ONB

melyben A mátrixa diagonális. Legyen $b_1 = w/\|w\|$.

Normális transzformációk: bizonyítás

Ha $[A]_b$ diagonális, akkor a transzponált konjugáltja is.

Diagonális mátrixok felcserélhetők, így A és A^* is.

Megfordítva: Indukció $\dim(V)$ szerint. Egy dimenzióban igaz.

Legyen λ sajátértéke A^* -nak (komplex fölött létezik),

és U a hozzá tartozó sajátaltér: $u \in U \iff A^*(u) = \lambda u$.

Belátjuk, hogy az U altér A -invariáns, legyen $u \in U$.

Ekkor $A^*A(u) = AA^*(u) = A(\lambda u) = \lambda A(u)$. Vagyis $A(u) \in U$.

Így A -nak van egy w sajátvektora U -ban.

Tehát a w által generált W altér A - és A^* -invariáns.

Emiatt W^\perp is A - és $(A^*)^* = A$ -invariáns.

A és A^* az W^\perp altéren is adjungáltak és felcserélhetők (HF).

Az indukciós feltevés miatt van W^\perp -ban b_2, \dots, b_n ONB

melyben A mátrixa diagonális. Legyen $b_1 = w/\|w\|$.

Ekkor b_1, \dots, b_n megfelelő ONB. □

Normális transzformációk: sajátalterek

F8.5.8. Feladat

Legyen $A \in \text{Hom } V$ normális transzformáció.

Normális transzformációk: sajátalterek

F8.5.8. Feladat

Legyen $A \in \text{Hom } V$ normális transzformáció.
Ekkor A sajátalterei páronként merőlegesek,

Normális transzformációk: sajátalterek

F8.5.8. Feladat

Legyen $A \in \text{Hom } V$ normális transzformáció.
Ekkor A sajátalterei páronként merőlegesek,
és V ezeknek a direkt összege.

Normális transzformációk: sajátalterek

F8.5.8. Feladat

Legyen $A \in \text{Hom } V$ normális transzformáció.
Ekkor A sajátalterei páronként merőlegesek,
és V ezeknek a direkt összege. Ugyanezek A^* sajátalterei is,

Normális transzformációk: sajátalterek

F8.5.8. Feladat

Legyen $A \in \text{Hom } V$ normális transzformáció.

Ekkor A sajátalterei páronként merőlegesek,

és V ezeknek a direkt összege. Ugyanezek A^* sajátalterei is,
és a sajátértékek az A megfelelő sajátértékeinek konjugáltjai.

Normális transzformációk: sajátalterek

F8.5.8. Feladat

Legyen $A \in \text{Hom } V$ normális transzformáció.
Ekkor A sajátalterei páronként merőlegesek,
és V ezeknek a direkt összege. Ugyanezek A^* sajátalterei is,
és a sajátértékek az A megfelelő sajátértékeinek konjugáltjai.

Bizonyításvázlat

Legyen b_1, \dots, b_n ONB, melyben A mátrixa diagonális.

Normális transzformációk: sajátalterek

F8.5.8. Feladat

Legyen $A \in \text{Hom } V$ normális transzformáció.
Ekkor A sajátalterei páronként merőlegesek,
és V ezeknek a direkt összege. Ugyanezek A^* sajátalterei is,
és a sajátértékek az A megfelelő sajátértékeinek konjugáltjai.

Bizonyításvázlat

Legyen b_1, \dots, b_n ONB, melyben A mátrixa diagonális.
Ekkor mindegyik b_j sajátvektor:

Normális transzformációk: sajátalterek

F8.5.8. Feladat

Legyen $A \in \text{Hom } V$ normális transzformáció.
Ekkor A sajátalterei páronként merőlegesek,
és V ezeknek a direkt összege. Ugyanezek A^* sajátalterei is,
és a sajátértékek az A megfelelő sajátértékeinek konjugáltjai.

Bizonyításvázlat

Legyen b_1, \dots, b_n ONB, melyben A mátrixa diagonális.
Ekkor mindegyik b_j sajátvektor: $A(b_j) = \lambda_j b_j$.

Normális transzformációk: sajátalterek

F8.5.8. Feladat

Legyen $A \in \text{Hom } V$ normális transzformáció.
Ekkor A sajátalterei páronként merőlegesek,
és V ezeknek a direkt összege. Ugyanezek A^* sajátalterei is,
és a sajátértékek az A megfelelő sajátértékeinek konjugáltjai.

Bizonyításvázlat

Legyen b_1, \dots, b_n ONB, melyben A mátrixa diagonális.
Ekkor mindegyik b_j sajátvektor: $A(b_j) = \lambda_j b_j$. A $\lambda = \lambda_j$ -hez
tartozó sajátalteret azok a b_k -k generálják,

Normális transzformációk: sajátalterek

F8.5.8. Feladat

Legyen $A \in \text{Hom } V$ normális transzformáció.
Ekkor A sajátalterei páronként merőlegesek,
és V ezeknek a direkt összege. Ugyanezek A^* sajátalterei is,
és a sajátértékek az A megfelelő sajátértékeinek konjugáltjai.

Bizonyításvázlat

Legyen b_1, \dots, b_n ONB, melyben A mátrixa diagonális.
Ekkor mindegyik b_j sajátvektor: $A(b_j) = \lambda_j b_j$. A $\lambda = \lambda_j$ -hez
tartozó sajátalteret azok a b_k -k generálják, amelyekre $\lambda_k = \lambda$.

Normális transzformációk: sajátalterek

F8.5.8. Feladat

Legyen $A \in \text{Hom } V$ normális transzformáció.
Ekkor A sajátalterei páronként merőlegesek,
és V ezeknek a direkt összege. Ugyanezek A^* sajátalterei is,
és a sajátértékek az A megfelelő sajátértékeinek konjugáltjai.

Bizonyításvázlat

Legyen b_1, \dots, b_n ONB, melyben A mátrixa diagonális.
Ekkor mindegyik b_j sajátvektor: $A(b_j) = \lambda_j b_j$. A $\lambda = \lambda_j$ -hez
tartozó sajátalteret azok a b_k -k generálják, amelyekre $\lambda_k = \lambda$.
Mert HF: $v = \mu_1 b_1 + \dots + \mu_n b_n$ -re $A(v) = \lambda v \iff$

Normális transzformációk: sajátalterek

F8.5.8. Feladat

Legyen $A \in \text{Hom } V$ normális transzformáció.

Ekkor A sajátalterei páronként merőlegesek,

és V ezeknek a direkt összege. Ugyanezek A^* sajátalterei is, és a sajátértékek az A megfelelő sajátértékeinek konjugáltjai.

Bizonyításvázlat

Legyen b_1, \dots, b_n ONB, melyben A mátrixa diagonális.

Ekkor mindegyik b_j sajátvektor: $A(b_j) = \lambda_j b_j$. A $\lambda = \lambda_j$ -hez tartozó sajátalteret azok a b_k -k generálják, amelyekre $\lambda_k = \lambda$.

Mert HF: $v = \mu_1 b_1 + \dots + \mu_n b_n$ -re $A(v) = \lambda v \iff \mu_k = 0$ minden k -ra, melyre $\lambda_k \neq \lambda$.

Normális transzformációk: sajátalterek

F8.5.8. Feladat

Legyen $A \in \text{Hom } V$ normális transzformáció.
Ekkor A sajátalterei páronként merőlegesek,
és V ezeknek a direkt összege. Ugyanezek A^* sajátalterei is,
és a sajátértékek az A megfelelő sajátértékeinek konjugáltjai.

Bizonyításvázlat

Legyen b_1, \dots, b_n ONB, melyben A mátrixa diagonális.
Ekkor mindegyik b_j sajátvektor: $A(b_j) = \lambda_j b_j$. A $\lambda = \lambda_j$ -hez
tartozó sajátalteret azok a b_k -k generálják, amelyekre $\lambda_k = \lambda$.
Mert HF: $v = \mu_1 b_1 + \dots + \mu_n b_n$ -re $A(v) = \lambda v \iff \mu_k = 0$
minden k -ra, melyre $\lambda_k \neq \lambda$. Így e sajátalterek merőlegesek.

Normális transzformációk: sajátalterek

F8.5.8. Feladat

Legyen $A \in \text{Hom } V$ normális transzformáció.
Ekkor A sajátalterei páronként merőlegesek,
és V ezeknek a direkt összege. Ugyanezek A^* sajátalterei is,
és a sajátértékek az A megfelelő sajátértékeinek konjugáltjai.

Bizonyításvázlat

Legyen b_1, \dots, b_n ONB, melyben A mátrixa diagonális.
Ekkor mindegyik b_j sajátvektor: $A(b_j) = \lambda_j b_j$. A $\lambda = \lambda_j$ -hez
tartozó sajátalteret azok a b_k -k generálják, amelyekre $\lambda_k = \lambda$.
Mert HF: $v = \mu_1 b_1 + \dots + \mu_n b_n$ -re $A(v) = \lambda v \iff \mu_k = 0$
minden k -ra, melyre $\lambda_k \neq \lambda$. Így e sajátalterek merőlegesek.
Az A^* mátrixa az $[A]_{\mathfrak{b}}$ transzponált konjugáltja,

Normális transzformációk: sajátalterek

F8.5.8. Feladat

Legyen $A \in \text{Hom } V$ normális transzformáció.
Ekkor A sajátalterei páronként merőlegesek,
és V ezeknek a direkt összege. Ugyanezek A^* sajátalterei is,
és a sajátértékek az A megfelelő sajátértékeinek konjugáltjai.

Bizonyításvázlat

Legyen b_1, \dots, b_n ONB, melyben A mátrixa diagonális.
Ekkor mindegyik b_j sajátvektor: $A(b_j) = \lambda_j b_j$. A $\lambda = \lambda_j$ -hez
tartozó sajátalteret azok a b_k -k generálják, amelyekre $\lambda_k = \lambda$.
Mert HF: $v = \mu_1 b_1 + \dots + \mu_n b_n$ -re $A(v) = \lambda v \iff \mu_k = 0$
minden k -ra, melyre $\lambda_k \neq \lambda$. Így e sajátalterek merőlegesek.
Az A^* mátrixa az $[A]_{\mathbf{b}}$ transzponált konjugáltja,
ezért mindez A^* -ra is igaz,

Normális transzformációk: sajátalterek

F8.5.8. Feladat

Legyen $A \in \text{Hom } V$ normális transzformáció.
Ekkor A sajátalterei páronként merőlegesek,
és V ezeknek a direkt összege. Ugyanezek A^* sajátalterei is,
és a sajátértékek az A megfelelő sajátértékeinek konjugáltjai.

Bizonyításvázlat

Legyen b_1, \dots, b_n ONB, melyben A mátrixa diagonális.
Ekkor mindegyik b_j sajátvektor: $A(b_j) = \lambda_j b_j$. A $\lambda = \lambda_j$ -hez
tartozó sajátalteret azok a b_k -k generálják, amelyekre $\lambda_k = \lambda$.
Mert HF: $v = \mu_1 b_1 + \dots + \mu_n b_n$ -re $A(v) = \lambda v \iff \mu_k = 0$
minden k -ra, melyre $\lambda_k \neq \lambda$. Így e sajátalterek merőlegesek.
Az A^* mátrixa az $[A]_{\mathbf{b}}$ transzponált konjugáltja,
ezért mindez A^* -ra is igaz, csak λ_j helyett $\overline{\lambda_j}$ szerepel. □

Egybevágósági transzformációk

F8.5.6. Tétel

V euklideszi tér,

Egybevágósági transzformációk

F8.5.6. Tétel

V euklideszi tér, $A \in \text{Hom}(V)$.

Egybevágósági transzformációk

F8.5.6. Tétel

V euklideszi tér, $A \in \text{Hom}(V)$. Ekvivalensek:

Egybevágósági transzformációk

F8.5.6. Tétel

V euklideszi tér, $A \in \text{Hom}(V)$. Ekvivalensek:

(1) A^* inverze A -nak.

Egybevágósági transzformációk

F8.5.6. Tétel

V euklideszi tér, $A \in \text{Hom}(V)$. Ekvivalensek:

- (1) A^* inverze A -nak.
- (2) A **skalárszorzzattartó**,

Egybevágósági transzformációk

F8.5.6. Tétel

V euklideszi tér, $A \in \text{Hom}(V)$. Ekvivalensek:

- (1) A^* inverze A -nak.
- (2) A **skalárszorlattartó**, azaz $(\forall u, v) \langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle$.

Egybevágósági transzformációk

F8.5.6. Tétel

V euklideszi tér, $A \in \text{Hom}(V)$. Ekvivalensek:

- (1) A^* inverze A -nak.
- (2) A **skalárszorzatartó**, azaz $(\forall u, v) \langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle$.
- (3) A **normatartó**,

Egybevágósági transzformációk

F8.5.6. Tétel

V euklideszi tér, $A \in \text{Hom}(V)$. Ekvivalensek:

- (1) A^* inverze A -nak.
- (2) A **skalárszorlattartó**, azaz $(\forall u, v) \langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle$.
- (3) A **normatartó**, azaz $(\forall u) \|Au\| = \|u\|$.

Egybevágósági transzformációk

F8.5.6. Tétel

V euklideszi tér, $A \in \text{Hom}(V)$. Ekvivalensek:

- (1) A^* inverze A -nak.
- (2) A **skalárszorlattartó**, azaz $(\forall u, v) \langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle$.
- (3) A **normatartó**, azaz $(\forall u) \|Au\| = \|u\|$.
- (4) A **távolságtartó**,

Egybevágósági transzformációk

F8.5.6. Tétel

V euklideszi tér, $A \in \text{Hom}(V)$. Ekvivalensek:

- (1) A^* inverze A -nak.
- (2) A **skalárszorlattartó**, azaz $(\forall u, v) \langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle$.
- (3) A **normatartó**, azaz $(\forall u) \|Au\| = \|u\|$.
- (4) A **távolságtartó**, azaz $(\forall u, v) \|Au - Av\| = \|u - v\|$.

Egybevágósági transzformációk

F8.5.6. Tétel

V euklideszi tér, $A \in \text{Hom}(V)$. Ekvivalensek:

- (1) A^* inverze A -nak.
- (2) A **skalárszorlattartó**, azaz $(\forall u, v) \langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle$.
- (3) A **normatartó**, azaz $(\forall u) \|Au\| = \|u\|$.
- (4) A **távolságtartó**, azaz $(\forall u, v) \|Au - Av\| = \|u - v\|$.
- (5) A minden ONB-t ONB-be visz.

Egybevágósági transzformációk

F8.5.6. Tétel

V euklideszi tér, $A \in \text{Hom}(V)$. Ekvivalensek:

- (1) A^* inverze A -nak.
- (2) A **skalárszorlattartó**, azaz $(\forall u, v) \langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle$.
- (3) A **normatartó**, azaz $(\forall u) \|Au\| = \|u\|$.
- (4) A **távolságtartó**, azaz $(\forall u, v) \|Au - Av\| = \|u - v\|$.
- (5) A minden ONB-t ONB-be visz.
- (6) Minden \mathbf{b} ONB-ben $[A]_{\mathbf{b}}$ inverze $[A]_{\mathbf{b}}^*$.

Egybevágósági transzformációk

F8.5.6. Tétel

V euklideszi tér, $A \in \text{Hom}(V)$. Ekvivalensek:

- (1) A^* inverze A -nak.
- (2) A **skalárszorlattartó**, azaz $(\forall u, v) \langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle$.
- (3) A **normatartó**, azaz $(\forall u) \|Au\| = \|u\|$.
- (4) A **távolságtartó**, azaz $(\forall u, v) \|Au - Av\| = \|u - v\|$.
- (5) A minden ONB-t ONB-be visz.
- (6) Minden \mathbf{b} ONB-ben $[A]_{\mathbf{b}}$ inverze $[A]_{\mathbf{b}}^*$.
- (7) A alkalmas ONB-t ONB-be visz.

Egybevágósági transzformációk

F8.5.6. Tétel

V euklideszi tér, $A \in \text{Hom}(V)$. Ekvivalensek:

- (1) A^* inverze A -nak.
- (2) A **skalárszorlattartó**, azaz $(\forall u, v) \langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle$.
- (3) A **normatartó**, azaz $(\forall u) \|Au\| = \|u\|$.
- (4) A **távolságtartó**, azaz $(\forall u, v) \|Au - Av\| = \|u - v\|$.
- (5) A minden ONB-t ONB-be visz.
- (6) Minden \mathbf{b} ONB-ben $[A]_{\mathbf{b}}$ inverze $[A]_{\mathbf{b}}^*$.
- (7) A alkalmas ONB-t ONB-be visz.
- (8) Alkalmas \mathbf{b} ONB-ben $[A]_{\mathbf{b}}$ inverze $[A]_{\mathbf{b}}^*$.

Egybevágósági transzformációk

F8.5.6. Tétel

V euklideszi tér, $A \in \text{Hom}(V)$. Ekvivalensek:

- (1) A^* inverze A -nak.
- (2) A **skalárszorlattartó**, azaz $(\forall u, v) \langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle$.
- (3) A **normatartó**, azaz $(\forall u) \|Au\| = \|u\|$.
- (4) A **távolságtartó**, azaz $(\forall u, v) \|Au - Av\| = \|u - v\|$.
- (5) A minden ONB-t ONB-be visz.
- (6) Minden \mathbf{b} ONB-ben $[A]_{\mathbf{b}}$ inverze $[A]_{\mathbf{b}}^*$.
- (7) A alkalmas ONB-t ONB-be visz.
- (8) Alkalmas \mathbf{b} ONB-ben $[A]_{\mathbf{b}}$ inverze $[A]_{\mathbf{b}}^*$.
- (9) A normális,

Egybevágósági transzformációk

F8.5.6. Tétel

V euklideszi tér, $A \in \text{Hom}(V)$. Ekvivalensek:

- (1) A^* inverze A -nak.
- (2) A **skalárszorzzattartó**, azaz $(\forall u, v) \langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle$.
- (3) A **normatartó**, azaz $(\forall u) \|Au\| = \|u\|$.
- (4) A **távolságtartó**, azaz $(\forall u, v) \|Au - Av\| = \|u - v\|$.
- (5) A minden ONB-t ONB-be visz.
- (6) Minden \mathbf{b} ONB-ben $[A]_{\mathbf{b}}$ inverze $[A]_{\mathbf{b}}^*$.
- (7) A alkalmas ONB-t ONB-be visz.
- (8) Alkalmas \mathbf{b} ONB-ben $[A]_{\mathbf{b}}$ inverze $[A]_{\mathbf{b}}^*$.
- (9) A normális, és sajátértékei 1 abszolút értékűek.

Egybevágósági transzformációk

F8.5.6. Tétel

V euklideszi tér, $A \in \text{Hom}(V)$. Ekvivalensek:

- (1) A^* inverze A -nak.
- (2) A **skalárszorzzattartó**, azaz $(\forall u, v) \langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle$.
- (3) A **normatartó**, azaz $(\forall u) \|Au\| = \|u\|$.
- (4) A **távolságtartó**, azaz $(\forall u, v) \|Au - Av\| = \|u - v\|$.
- (5) A minden ONB-t ONB-be visz.
- (6) Minden \mathbf{b} ONB-ben $[A]_{\mathbf{b}}$ inverze $[A]_{\mathbf{b}}^*$.
- (7) A alkalmas ONB-t ONB-be visz.
- (8) Alkalmas \mathbf{b} ONB-ben $[A]_{\mathbf{b}}$ inverze $[A]_{\mathbf{b}}^*$.
- (9) A normális, és sajátértékei 1 abszolút értékűek.

Elnevezés: Valóban **ortogonális**,

Egybevágósági transzformációk

F8.5.6. Tétel

V euklideszi tér, $A \in \text{Hom}(V)$. Ekvivalensek:

- (1) A^* inverze A -nak.
- (2) A **skalárszorlattartó**, azaz $(\forall u, v) \langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle$.
- (3) A **normatartó**, azaz $(\forall u) \|Au\| = \|u\|$.
- (4) A **távolságtartó**, azaz $(\forall u, v) \|Au - Av\| = \|u - v\|$.
- (5) A minden ONB-t ONB-be visz.
- (6) Minden \mathbf{b} ONB-ben $[A]_{\mathbf{b}}$ inverze $[A]_{\mathbf{b}}^*$.
- (7) A alkalmas ONB-t ONB-be visz.
- (8) Alkalmas \mathbf{b} ONB-ben $[A]_{\mathbf{b}}$ inverze $[A]_{\mathbf{b}}^*$.
- (9) A normális, és sajátértékei 1 abszolút értékűek.

Elnevezés: Valóban **ortogonális**, komplexben **unitér**.

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás

(1) \implies (6) \implies (8) \implies (1) és (2) \implies (3) \iff (4) triviális.

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás

(1) \implies (6) \implies (8) \implies (1) és (2) \implies (3) \iff (4) triviális.

(1) \implies (2): Ha $A^*A = I$,

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás

(1) \implies (6) \implies (8) \implies (1) és (2) \implies (3) \iff (4) triviális.

(1) \implies (2): Ha $A^*A = I$, akkor $\langle u, v \rangle = \langle u, A^*Av \rangle$

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás

(1) \implies (6) \implies (8) \implies (1) és (2) \implies (3) \iff (4) triviális.

(1) \implies (2): Ha $A^*A = I$, akkor $\langle u, v \rangle = \langle u, A^*Av \rangle = \langle Au, Av \rangle$.

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás

(1) \implies (6) \implies (8) \implies (1) és (2) \implies (3) \iff (4) triviális.

(1) \implies (2): Ha $A^*A = I$, akkor $\langle u, v \rangle = \langle u, A^*Av \rangle = \langle Au, Av \rangle$.

(3) \implies (2): $\|A(u + \lambda v)\|^2 = \|u + \lambda v\|^2$

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás

(1) \implies (6) \implies (8) \implies (1) és (2) \implies (3) \iff (4) triviális.

(1) \implies (2): Ha $A^*A = I$, akkor $\langle u, v \rangle = \langle u, A^*Av \rangle = \langle Au, Av \rangle$.

(3) \implies (2): $\|A(u + \lambda v)\|^2 = \|u + \lambda v\|^2 = \langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle$.

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás

(1) \implies (6) \implies (8) \implies (1) és (2) \implies (3) \iff (4) triviális.

(1) \implies (2): Ha $A^*A = I$, akkor $\langle u, v \rangle = \langle u, A^*Av \rangle = \langle Au, Av \rangle$.

(3) \implies (2): $\|A(u + \lambda v)\|^2 = \|u + \lambda v\|^2 = \langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle$.

$\langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle = \langle u, u \rangle + \lambda \langle u, v \rangle + \bar{\lambda} \langle v, u \rangle + \lambda \bar{\lambda} \langle v, v \rangle =$

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás

(1) \implies (6) \implies (8) \implies (1) és (2) \implies (3) \iff (4) triviális.

(1) \implies (2): Ha $A^*A = I$, akkor $\langle u, v \rangle = \langle u, A^*Av \rangle = \langle Au, Av \rangle$.

(3) \implies (2): $\|A(u + \lambda v)\|^2 = \|u + \lambda v\|^2 = \langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle$.

$$\begin{aligned} \langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle &= \langle u, u \rangle + \lambda \langle u, v \rangle + \bar{\lambda} \langle v, u \rangle + \lambda \bar{\lambda} \langle v, v \rangle = \\ &= \|u\|^2 + |\lambda|^2 \|v\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\lambda \langle u, v \rangle), \end{aligned}$$

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás

(1) \implies (6) \implies (8) \implies (1) és (2) \implies (3) \iff (4) triviális.

(1) \implies (2): Ha $A^*A = I$, akkor $\langle u, v \rangle = \langle u, A^*Av \rangle = \langle Au, Av \rangle$.

(3) \implies (2): $\|A(u + \lambda v)\|^2 = \|u + \lambda v\|^2 = \langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle$.

$\langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle = \langle u, u \rangle + \lambda \langle u, v \rangle + \bar{\lambda} \langle v, u \rangle + \lambda \bar{\lambda} \langle v, v \rangle =$
 $= \|u\|^2 + |\lambda|^2 \|v\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\lambda \langle u, v \rangle)$, hiszen $\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$,

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás

(1) \implies (6) \implies (8) \implies (1) és (2) \implies (3) \iff (4) triviális.

(1) \implies (2): Ha $A^*A = I$, akkor $\langle u, v \rangle = \langle u, A^*Av \rangle = \langle Au, Av \rangle$.

(3) \implies (2): $\|A(u + \lambda v)\|^2 = \|u + \lambda v\|^2 = \langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle$.

$\langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle = \langle u, u \rangle + \lambda \langle u, v \rangle + \bar{\lambda} \langle v, u \rangle + \lambda \bar{\lambda} \langle v, v \rangle =$

$= \|u\|^2 + |\lambda|^2 \|v\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\lambda \langle u, v \rangle)$, hiszen $\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$,

és $\|A(u + \lambda v)\|^2 = \|Au\|^2 + |\lambda|^2 \|Av\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\lambda \langle Au, Av \rangle)$.

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás

(1) \implies (6) \implies (8) \implies (1) és (2) \implies (3) \iff (4) triviális.

(1) \implies (2): Ha $A^*A = I$, akkor $\langle u, v \rangle = \langle u, A^*Av \rangle = \langle Au, Av \rangle$.

(3) \implies (2): $\|A(u + \lambda v)\|^2 = \|u + \lambda v\|^2 = \langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle$.

$\langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle = \langle u, u \rangle + \lambda \langle u, v \rangle + \bar{\lambda} \langle v, u \rangle + \lambda \bar{\lambda} \langle v, v \rangle =$

$= \|u\|^2 + |\lambda|^2 \|v\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\lambda \langle u, v \rangle)$, hiszen $\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$,

és $\|A(u + \lambda v)\|^2 = \|Au\|^2 + |\lambda|^2 \|Av\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\lambda \langle Au, Av \rangle)$.

Innen $\operatorname{Re}(\lambda \langle Au, Av \rangle) = \operatorname{Re}(\lambda \langle u, v \rangle)$

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás

(1) \implies (6) \implies (8) \implies (1) és (2) \implies (3) \iff (4) triviális.

(1) \implies (2): Ha $A^*A = I$, akkor $\langle u, v \rangle = \langle u, A^*Av \rangle = \langle Au, Av \rangle$.

(3) \implies (2): $\|A(u + \lambda v)\|^2 = \|u + \lambda v\|^2 = \langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle$.

$\langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle = \langle u, u \rangle + \lambda \langle u, v \rangle + \bar{\lambda} \langle v, u \rangle + \lambda \bar{\lambda} \langle v, v \rangle =$

$= \|u\|^2 + |\lambda|^2 \|v\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\lambda \langle u, v \rangle)$, hiszen $\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$,

és $\|A(u + \lambda v)\|^2 = \|Au\|^2 + |\lambda|^2 \|Av\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\lambda \langle Au, Av \rangle)$.

Innen $\operatorname{Re}(\lambda \langle Au, Av \rangle) = \operatorname{Re}(\lambda \langle u, v \rangle)$ minden $\lambda \in \mathbb{C}$ -re.

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás

(1) \implies (6) \implies (8) \implies (1) és (2) \implies (3) \iff (4) triviális.

(1) \implies (2): Ha $A^*A = I$, akkor $\langle u, v \rangle = \langle u, A^*Av \rangle = \langle Au, Av \rangle$.

(3) \implies (2): $\|A(u + \lambda v)\|^2 = \|u + \lambda v\|^2 = \langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle$.

$\langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle = \langle u, u \rangle + \lambda \langle u, v \rangle + \bar{\lambda} \langle v, u \rangle + \lambda \bar{\lambda} \langle v, v \rangle =$

$= \|u\|^2 + |\lambda|^2 \|v\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\lambda \langle u, v \rangle)$, hiszen $\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$,

és $\|A(u + \lambda v)\|^2 = \|Au\|^2 + |\lambda|^2 \|Av\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\lambda \langle Au, Av \rangle)$.

Innen $\operatorname{Re}(\lambda \langle Au, Av \rangle) = \operatorname{Re}(\lambda \langle u, v \rangle)$ minden $\lambda \in \mathbb{C}$ -re.

Ezt $\lambda = 1$ -re és $\lambda = i$ -re alkalmazva

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás

(1) \implies (6) \implies (8) \implies (1) és (2) \implies (3) \iff (4) triviális.

(1) \implies (2): Ha $A^*A = I$, akkor $\langle u, v \rangle = \langle u, A^*Av \rangle = \langle Au, Av \rangle$.

(3) \implies (2): $\|A(u + \lambda v)\|^2 = \|u + \lambda v\|^2 = \langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle$.

$\langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle = \langle u, u \rangle + \lambda \langle u, v \rangle + \bar{\lambda} \langle v, u \rangle + \lambda \bar{\lambda} \langle v, v \rangle =$

$= \|u\|^2 + |\lambda|^2 \|v\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\lambda \langle u, v \rangle)$, hiszen $\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$,

és $\|A(u + \lambda v)\|^2 = \|Au\|^2 + |\lambda|^2 \|Av\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\lambda \langle Au, Av \rangle)$.

Innen $\operatorname{Re}(\lambda \langle Au, Av \rangle) = \operatorname{Re}(\lambda \langle u, v \rangle)$ minden $\lambda \in \mathbb{C}$ -re.

Ezt $\lambda = 1$ -re és $\lambda = i$ -re alkalmazva $\langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle$.

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás

(1) \implies (6) \implies (8) \implies (1) és (2) \implies (3) \iff (4) triviális.

(1) \implies (2): Ha $A^*A = I$, akkor $\langle u, v \rangle = \langle u, A^*Av \rangle = \langle Au, Av \rangle$.

(3) \implies (2): $\|A(u + \lambda v)\|^2 = \|u + \lambda v\|^2 = \langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle$.

$\langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle = \langle u, u \rangle + \lambda \langle u, v \rangle + \bar{\lambda} \langle v, u \rangle + \lambda \bar{\lambda} \langle v, v \rangle =$

$= \|u\|^2 + |\lambda|^2 \|v\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\lambda \langle u, v \rangle)$, hiszen $\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$,

és $\|A(u + \lambda v)\|^2 = \|Au\|^2 + |\lambda|^2 \|Av\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\lambda \langle Au, Av \rangle)$.

Innen $\operatorname{Re}(\lambda \langle Au, Av \rangle) = \operatorname{Re}(\lambda \langle u, v \rangle)$ minden $\lambda \in \mathbb{C}$ -re.

Ezt $\lambda = 1$ -re és $\lambda = i$ -re alkalmazva $\langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle$.

(2) \implies (5): $\langle Ab_j, Ab_k \rangle = \langle b_j, b_k \rangle$

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás

(1) \implies (6) \implies (8) \implies (1) és (2) \implies (3) \iff (4) triviális.

(1) \implies (2): Ha $A^*A = I$, akkor $\langle u, v \rangle = \langle u, A^*Av \rangle = \langle Au, Av \rangle$.

(3) \implies (2): $\|A(u + \lambda v)\|^2 = \|u + \lambda v\|^2 = \langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle$.

$\langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle = \langle u, u \rangle + \lambda \langle u, v \rangle + \bar{\lambda} \langle v, u \rangle + \lambda \bar{\lambda} \langle v, v \rangle =$

$= \|u\|^2 + |\lambda|^2 \|v\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\lambda \langle u, v \rangle)$, hiszen $\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$,

és $\|A(u + \lambda v)\|^2 = \|Au\|^2 + |\lambda|^2 \|Av\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\lambda \langle Au, Av \rangle)$.

Innen $\operatorname{Re}(\lambda \langle Au, Av \rangle) = \operatorname{Re}(\lambda \langle u, v \rangle)$ minden $\lambda \in \mathbb{C}$ -re.

Ezt $\lambda = 1$ -re és $\lambda = i$ -re alkalmazva $\langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle$.

(2) \implies (5): $\langle Ab_j, Ab_k \rangle = \langle b_j, b_k \rangle = 1$, ha $j = k$,

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás

(1) \implies (6) \implies (8) \implies (1) és (2) \implies (3) \iff (4) triviális.

(1) \implies (2): Ha $A^*A = I$, akkor $\langle u, v \rangle = \langle u, A^*Av \rangle = \langle Au, Av \rangle$.

(3) \implies (2): $\|A(u + \lambda v)\|^2 = \|u + \lambda v\|^2 = \langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle$.

$\langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle = \langle u, u \rangle + \lambda \langle u, v \rangle + \bar{\lambda} \langle v, u \rangle + \lambda \bar{\lambda} \langle v, v \rangle =$

$= \|u\|^2 + |\lambda|^2 \|v\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\lambda \langle u, v \rangle)$, hiszen $\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$,

és $\|A(u + \lambda v)\|^2 = \|Au\|^2 + |\lambda|^2 \|Av\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\lambda \langle Au, Av \rangle)$.

Innen $\operatorname{Re}(\lambda \langle Au, Av \rangle) = \operatorname{Re}(\lambda \langle u, v \rangle)$ minden $\lambda \in \mathbb{C}$ -re.

Ezt $\lambda = 1$ -re és $\lambda = i$ -re alkalmazva $\langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle$.

(2) \implies (5): $\langle Ab_j, Ab_k \rangle = \langle b_j, b_k \rangle = 1$, ha $j = k$, 0 egyébként.

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás

(1) \implies (6) \implies (8) \implies (1) és (2) \implies (3) \iff (4) triviális.

(1) \implies (2): Ha $A^*A = I$, akkor $\langle u, v \rangle = \langle u, A^*Av \rangle = \langle Au, Av \rangle$.

(3) \implies (2): $\|A(u + \lambda v)\|^2 = \|u + \lambda v\|^2 = \langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle$.

$\langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle = \langle u, u \rangle + \lambda \langle u, v \rangle + \bar{\lambda} \langle v, u \rangle + \lambda \bar{\lambda} \langle v, v \rangle =$

$= \|u\|^2 + |\lambda|^2 \|v\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\lambda \langle u, v \rangle)$, hiszen $\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$,

és $\|A(u + \lambda v)\|^2 = \|Au\|^2 + |\lambda|^2 \|Av\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\lambda \langle Au, Av \rangle)$.

Innen $\operatorname{Re}(\lambda \langle Au, Av \rangle) = \operatorname{Re}(\lambda \langle u, v \rangle)$ minden $\lambda \in \mathbb{C}$ -re.

Ezt $\lambda = 1$ -re és $\lambda = i$ -re alkalmazva $\langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle$.

(2) \implies (5): $\langle Ab_j, Ab_k \rangle = \langle b_j, b_k \rangle = 1$, ha $j = k$, 0 egyébként.

(5) \implies (7): triviális.

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás

(1) \implies (6) \implies (8) \implies (1) és (2) \implies (3) \iff (4) triviális.

(1) \implies (2): Ha $A^*A = I$, akkor $\langle u, v \rangle = \langle u, A^*Av \rangle = \langle Au, Av \rangle$.

(3) \implies (2): $\|A(u + \lambda v)\|^2 = \|u + \lambda v\|^2 = \langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle$.

$\langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle = \langle u, u \rangle + \lambda \langle u, v \rangle + \bar{\lambda} \langle v, u \rangle + \lambda \bar{\lambda} \langle v, v \rangle =$

$= \|u\|^2 + |\lambda|^2 \|v\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\lambda \langle u, v \rangle)$, hiszen $\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$,

és $\|A(u + \lambda v)\|^2 = \|Au\|^2 + |\lambda|^2 \|Av\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\lambda \langle Au, Av \rangle)$.

Innen $\operatorname{Re}(\lambda \langle Au, Av \rangle) = \operatorname{Re}(\lambda \langle u, v \rangle)$ minden $\lambda \in \mathbb{C}$ -re.

Ezt $\lambda = 1$ -re és $\lambda = i$ -re alkalmazva $\langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle$.

(2) \implies (5): $\langle Ab_j, Ab_k \rangle = \langle b_j, b_k \rangle = 1$, ha $j = k$, 0 egyébként.

(5) \implies (7): triviális. (7) \implies (8): $\langle Ab_j, Ab_k \rangle = \langle b_j, A^*Ab_k \rangle$,

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás

(1) \implies (6) \implies (8) \implies (1) és (2) \implies (3) \iff (4) triviális.

(1) \implies (2): Ha $A^*A = I$, akkor $\langle u, v \rangle = \langle u, A^*Av \rangle = \langle Au, Av \rangle$.

(3) \implies (2): $\|A(u + \lambda v)\|^2 = \|u + \lambda v\|^2 = \langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle$.

$\langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle = \langle u, u \rangle + \lambda \langle u, v \rangle + \bar{\lambda} \langle v, u \rangle + \lambda \bar{\lambda} \langle v, v \rangle =$

$= \|u\|^2 + |\lambda|^2 \|v\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\lambda \langle u, v \rangle)$, hiszen $\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$,

és $\|A(u + \lambda v)\|^2 = \|Au\|^2 + |\lambda|^2 \|Av\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\lambda \langle Au, Av \rangle)$.

Innen $\operatorname{Re}(\lambda \langle Au, Av \rangle) = \operatorname{Re}(\lambda \langle u, v \rangle)$ minden $\lambda \in \mathbb{C}$ -re.

Ezt $\lambda = 1$ -re és $\lambda = i$ -re alkalmazva $\langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle$.

(2) \implies (5): $\langle Ab_j, Ab_k \rangle = \langle b_j, b_k \rangle = 1$, ha $j = k$, 0 egyébként.

(5) \implies (7): triviális. (7) \implies (8): $\langle Ab_j, Ab_k \rangle = \langle b_j, A^*Ab_k \rangle$,

tudjuk, hogy ezek $[A^*A]_b$ elemei.

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás

(1) \implies (6) \implies (8) \implies (1) és (2) \implies (3) \iff (4) triviális.

(1) \implies (2): Ha $A^*A = I$, akkor $\langle u, v \rangle = \langle u, A^*Av \rangle = \langle Au, Av \rangle$.

(3) \implies (2): $\|A(u + \lambda v)\|^2 = \|u + \lambda v\|^2 = \langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle$.

$\langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle = \langle u, u \rangle + \lambda \langle u, v \rangle + \bar{\lambda} \langle v, u \rangle + \lambda \bar{\lambda} \langle v, v \rangle =$

$= \|u\|^2 + |\lambda|^2 \|v\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\lambda \langle u, v \rangle)$, hiszen $\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$,

és $\|A(u + \lambda v)\|^2 = \|Au\|^2 + |\lambda|^2 \|Av\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\lambda \langle Au, Av \rangle)$.

Innen $\operatorname{Re}(\lambda \langle Au, Av \rangle) = \operatorname{Re}(\lambda \langle u, v \rangle)$ minden $\lambda \in \mathbb{C}$ -re.

Ezt $\lambda = 1$ -re és $\lambda = i$ -re alkalmazva $\langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle$.

(2) \implies (5): $\langle Ab_j, Ab_k \rangle = \langle b_j, b_k \rangle = 1$, ha $j = k$, 0 egyébként.

(5) \implies (7): triviális. (7) \implies (8): $\langle Ab_j, Ab_k \rangle = \langle b_j, A^*Ab_k \rangle$,

tudjuk, hogy ezek $[A^*A]_b$ elemei. De $\langle Ab_j, Ab_k \rangle = \langle b_j, b_k \rangle$,

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás

(1) \implies (6) \implies (8) \implies (1) és (2) \implies (3) \iff (4) triviális.

(1) \implies (2): Ha $A^*A = I$, akkor $\langle u, v \rangle = \langle u, A^*Av \rangle = \langle Au, Av \rangle$.

(3) \implies (2): $\|A(u + \lambda v)\|^2 = \|u + \lambda v\|^2 = \langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle$.

$\langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle = \langle u, u \rangle + \lambda \langle u, v \rangle + \bar{\lambda} \langle v, u \rangle + \lambda \bar{\lambda} \langle v, v \rangle =$

$= \|u\|^2 + |\lambda|^2 \|v\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\lambda \langle u, v \rangle)$, hiszen $\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$,

és $\|A(u + \lambda v)\|^2 = \|Au\|^2 + |\lambda|^2 \|Av\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\lambda \langle Au, Av \rangle)$.

Innen $\operatorname{Re}(\lambda \langle Au, Av \rangle) = \operatorname{Re}(\lambda \langle u, v \rangle)$ minden $\lambda \in \mathbb{C}$ -re.

Ezt $\lambda = 1$ -re és $\lambda = i$ -re alkalmazva $\langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle$.

(2) \implies (5): $\langle Ab_j, Ab_k \rangle = \langle b_j, b_k \rangle = 1$, ha $j = k$, 0 egyébként.

(5) \implies (7): triviális. (7) \implies (8): $\langle Ab_j, Ab_k \rangle = \langle b_j, A^*Ab_k \rangle$,

tudjuk, hogy ezek $[A^*A]_b$ elemei. De $\langle Ab_j, Ab_k \rangle = \langle b_j, b_k \rangle$,

és mivel b_1, \dots, b_n ONB,

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás

(1) \implies (6) \implies (8) \implies (1) és (2) \implies (3) \iff (4) triviális.

(1) \implies (2): Ha $A^*A = I$, akkor $\langle u, v \rangle = \langle u, A^*Av \rangle = \langle Au, Av \rangle$.

(3) \implies (2): $\|A(u + \lambda v)\|^2 = \|u + \lambda v\|^2 = \langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle$.

$\langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle = \langle u, u \rangle + \lambda \langle u, v \rangle + \bar{\lambda} \langle v, u \rangle + \lambda \bar{\lambda} \langle v, v \rangle =$

$= \|u\|^2 + |\lambda|^2 \|v\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\lambda \langle u, v \rangle)$, hiszen $\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$,

és $\|A(u + \lambda v)\|^2 = \|Au\|^2 + |\lambda|^2 \|Av\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\lambda \langle Au, Av \rangle)$.

Innen $\operatorname{Re}(\lambda \langle Au, Av \rangle) = \operatorname{Re}(\lambda \langle u, v \rangle)$ minden $\lambda \in \mathbb{C}$ -re.

Ezt $\lambda = 1$ -re és $\lambda = i$ -re alkalmazva $\langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle$.

(2) \implies (5): $\langle Ab_j, Ab_k \rangle = \langle b_j, b_k \rangle = 1$, ha $j = k$, 0 egyébként.

(5) \implies (7): triviális. (7) \implies (8): $\langle Ab_j, Ab_k \rangle = \langle b_j, A^*Ab_k \rangle$,

tudjuk, hogy ezek $[A^*A]_b$ elemei. De $\langle Ab_j, Ab_k \rangle = \langle b_j, b_k \rangle$,

és mivel b_1, \dots, b_n ONB, ezért $[A^*A]_b$ az egységmátrix.

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás

(1) \implies (6) \implies (8) \implies (1) és (2) \implies (3) \iff (4) triviális.

(1) \implies (2): Ha $A^*A = I$, akkor $\langle u, v \rangle = \langle u, A^*Av \rangle = \langle Au, Av \rangle$.

(3) \implies (2): $\|A(u + \lambda v)\|^2 = \|u + \lambda v\|^2 = \langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle$.

$\langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle = \langle u, u \rangle + \lambda \langle u, v \rangle + \bar{\lambda} \langle v, u \rangle + \lambda \bar{\lambda} \langle v, v \rangle =$

$= \|u\|^2 + |\lambda|^2 \|v\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\lambda \langle u, v \rangle)$, hiszen $\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$,

és $\|A(u + \lambda v)\|^2 = \|Au\|^2 + |\lambda|^2 \|Av\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\lambda \langle Au, Av \rangle)$.

Innen $\operatorname{Re}(\lambda \langle Au, Av \rangle) = \operatorname{Re}(\lambda \langle u, v \rangle)$ minden $\lambda \in \mathbb{C}$ -re.

Ezt $\lambda = 1$ -re és $\lambda = i$ -re alkalmazva $\langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle$.

(2) \implies (5): $\langle Ab_j, Ab_k \rangle = \langle b_j, b_k \rangle = 1$, ha $j = k$, 0 egyébként.

(5) \implies (7): triviális. (7) \implies (8): $\langle Ab_j, Ab_k \rangle = \langle b_j, A^*Ab_k \rangle$,

tudjuk, hogy ezek $[A^*A]_{\mathbf{b}}$ elemei. De $\langle Ab_j, Ab_k \rangle = \langle b_j, b_k \rangle$,

és mivel b_1, \dots, b_n ONB, ezért $[A^*A]_{\mathbf{b}}$ az egységmátrix.

(1) \iff (9): Ha \mathbf{b} ONB

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás

(1) \implies (6) \implies (8) \implies (1) és (2) \implies (3) \iff (4) triviális.

(1) \implies (2): Ha $A^*A = I$, akkor $\langle u, v \rangle = \langle u, A^*Av \rangle = \langle Au, Av \rangle$.

(3) \implies (2): $\|A(u + \lambda v)\|^2 = \|u + \lambda v\|^2 = \langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle$.

$\langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle = \langle u, u \rangle + \lambda \langle u, v \rangle + \bar{\lambda} \langle v, u \rangle + \lambda \bar{\lambda} \langle v, v \rangle =$

$= \|u\|^2 + |\lambda|^2 \|v\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\lambda \langle u, v \rangle)$, hiszen $\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$,

és $\|A(u + \lambda v)\|^2 = \|Au\|^2 + |\lambda|^2 \|Av\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\lambda \langle Au, Av \rangle)$.

Innen $\operatorname{Re}(\lambda \langle Au, Av \rangle) = \operatorname{Re}(\lambda \langle u, v \rangle)$ minden $\lambda \in \mathbb{C}$ -re.

Ezt $\lambda = 1$ -re és $\lambda = i$ -re alkalmazva $\langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle$.

(2) \implies (5): $\langle Ab_j, Ab_k \rangle = \langle b_j, b_k \rangle = 1$, ha $j = k$, 0 egyébként.

(5) \implies (7): triviális. (7) \implies (8): $\langle Ab_j, Ab_k \rangle = \langle b_j, A^*Ab_k \rangle$,

tudjuk, hogy ezek $[A^*A]_{\mathbf{b}}$ elemei. De $\langle Ab_j, Ab_k \rangle = \langle b_j, b_k \rangle$,

és mivel b_1, \dots, b_n ONB, ezért $[A^*A]_{\mathbf{b}}$ az egységmátrix.

(1) \iff (9): Ha \mathbf{b} ONB és $[A]_{\mathbf{b}}$ diagonális,

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás

(1) \implies (6) \implies (8) \implies (1) és (2) \implies (3) \iff (4) triviális.

(1) \implies (2): Ha $A^*A = I$, akkor $\langle u, v \rangle = \langle u, A^*Av \rangle = \langle Au, Av \rangle$.

(3) \implies (2): $\|A(u + \lambda v)\|^2 = \|u + \lambda v\|^2 = \langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle$.

$\langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle = \langle u, u \rangle + \lambda \langle u, v \rangle + \bar{\lambda} \langle v, u \rangle + \lambda \bar{\lambda} \langle v, v \rangle =$

$= \|u\|^2 + |\lambda|^2 \|v\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\lambda \langle u, v \rangle)$, hiszen $\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$,

és $\|A(u + \lambda v)\|^2 = \|Au\|^2 + |\lambda|^2 \|Av\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\lambda \langle Au, Av \rangle)$.

Innen $\operatorname{Re}(\lambda \langle Au, Av \rangle) = \operatorname{Re}(\lambda \langle u, v \rangle)$ minden $\lambda \in \mathbb{C}$ -re.

Ezt $\lambda = 1$ -re és $\lambda = i$ -re alkalmazva $\langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle$.

(2) \implies (5): $\langle Ab_j, Ab_k \rangle = \langle b_j, b_k \rangle = 1$, ha $j = k$, 0 egyébként.

(5) \implies (7): triviális. (7) \implies (8): $\langle Ab_j, Ab_k \rangle = \langle b_j, A^*Ab_k \rangle$,

tudjuk, hogy ezek $[A^*A]_{\mathbf{b}}$ elemei. De $\langle Ab_j, Ab_k \rangle = \langle b_j, b_k \rangle$,

és mivel b_1, \dots, b_n ONB, ezért $[A^*A]_{\mathbf{b}}$ az egységmátrix.

(1) \iff (9): Ha \mathbf{b} ONB és $[A]_{\mathbf{b}}$ diagonális, akkor $[A^*] = [A^{-1}]$ azt jelenti, hogy minden sajátértékre $\bar{\lambda} = \lambda^{-1}$,

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás

(1) \implies (6) \implies (8) \implies (1) és (2) \implies (3) \iff (4) triviális.

(1) \implies (2): Ha $A^*A = I$, akkor $\langle u, v \rangle = \langle u, A^*Av \rangle = \langle Au, Av \rangle$.

(3) \implies (2): $\|A(u + \lambda v)\|^2 = \|u + \lambda v\|^2 = \langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle$.

$\langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle = \langle u, u \rangle + \lambda \langle u, v \rangle + \bar{\lambda} \langle v, u \rangle + \lambda \bar{\lambda} \langle v, v \rangle =$

$= \|u\|^2 + |\lambda|^2 \|v\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\lambda \langle u, v \rangle)$, hiszen $\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$,

és $\|A(u + \lambda v)\|^2 = \|Au\|^2 + |\lambda|^2 \|Av\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\lambda \langle Au, Av \rangle)$.

Innen $\operatorname{Re}(\lambda \langle Au, Av \rangle) = \operatorname{Re}(\lambda \langle u, v \rangle)$ minden $\lambda \in \mathbb{C}$ -re.

Ezt $\lambda = 1$ -re és $\lambda = i$ -re alkalmazva $\langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle$.

(2) \implies (5): $\langle Ab_j, Ab_k \rangle = \langle b_j, b_k \rangle = 1$, ha $j = k$, 0 egyébként.

(5) \implies (7): triviális. (7) \implies (8): $\langle Ab_j, Ab_k \rangle = \langle b_j, A^*Ab_k \rangle$,

tudjuk, hogy ezek $[A^*A]_{\mathbf{b}}$ elemei. De $\langle Ab_j, Ab_k \rangle = \langle b_j, b_k \rangle$,

és mivel b_1, \dots, b_n ONB, ezért $[A^*A]_{\mathbf{b}}$ az egységmátrix.

(1) \iff (9): Ha \mathbf{b} ONB és $[A]_{\mathbf{b}}$ diagonális, akkor $[A^*] = [A^{-1}]$

azt jelenti, hogy minden sajátértékre $\bar{\lambda} = \lambda^{-1}$, azaz $|\lambda| = 1$.

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás

(1) \implies (6) \implies (8) \implies (1) és (2) \implies (3) \iff (4) triviális.

(1) \implies (2): Ha $A^*A = I$, akkor $\langle u, v \rangle = \langle u, A^*Av \rangle = \langle Au, Av \rangle$.

(3) \implies (2): $\|A(u + \lambda v)\|^2 = \|u + \lambda v\|^2 = \langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle$.

$\langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle = \langle u, u \rangle + \lambda \langle u, v \rangle + \bar{\lambda} \langle v, u \rangle + \lambda \bar{\lambda} \langle v, v \rangle =$

$= \|u\|^2 + |\lambda|^2 \|v\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\lambda \langle u, v \rangle)$, hiszen $\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$,

és $\|A(u + \lambda v)\|^2 = \|Au\|^2 + |\lambda|^2 \|Av\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\lambda \langle Au, Av \rangle)$.

Innen $\operatorname{Re}(\lambda \langle Au, Av \rangle) = \operatorname{Re}(\lambda \langle u, v \rangle)$ minden $\lambda \in \mathbb{C}$ -re.

Ezt $\lambda = 1$ -re és $\lambda = i$ -re alkalmazva $\langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle$.

(2) \implies (5): $\langle Ab_j, Ab_k \rangle = \langle b_j, b_k \rangle = 1$, ha $j = k$, 0 egyébként.

(5) \implies (7): triviális. (7) \implies (8): $\langle Ab_j, Ab_k \rangle = \langle b_j, A^*Ab_k \rangle$,

tudjuk, hogy ezek $[A^*A]_{\mathbf{b}}$ elemei. De $\langle Ab_j, Ab_k \rangle = \langle b_j, b_k \rangle$,

és mivel b_1, \dots, b_n ONB, ezért $[A^*A]_{\mathbf{b}}$ az egységmátrix.

(1) \iff (9): Ha \mathbf{b} ONB és $[A]_{\mathbf{b}}$ diagonális, akkor $[A^*] = [A^{-1}]$

azt jelenti, hogy minden sajátértékre $\bar{\lambda} = \lambda^{-1}$, azaz $|\lambda| = 1$.

A felcserélhető az inverzével,

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás

(1) \implies (6) \implies (8) \implies (1) és (2) \implies (3) \iff (4) triviális.

(1) \implies (2): Ha $A^*A = I$, akkor $\langle u, v \rangle = \langle u, A^*Av \rangle = \langle Au, Av \rangle$.

(3) \implies (2): $\|A(u + \lambda v)\|^2 = \|u + \lambda v\|^2 = \langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle$.

$\langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle = \langle u, u \rangle + \lambda \langle u, v \rangle + \bar{\lambda} \langle v, u \rangle + \lambda \bar{\lambda} \langle v, v \rangle =$

$= \|u\|^2 + |\lambda|^2 \|v\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\lambda \langle u, v \rangle)$, hiszen $\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$,

és $\|A(u + \lambda v)\|^2 = \|Au\|^2 + |\lambda|^2 \|Av\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\lambda \langle Au, Av \rangle)$.

Innen $\operatorname{Re}(\lambda \langle Au, Av \rangle) = \operatorname{Re}(\lambda \langle u, v \rangle)$ minden $\lambda \in \mathbb{C}$ -re.

Ezt $\lambda = 1$ -re és $\lambda = i$ -re alkalmazva $\langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle$.

(2) \implies (5): $\langle Ab_j, Ab_k \rangle = \langle b_j, b_k \rangle = 1$, ha $j = k$, 0 egyébként.

(5) \implies (7): triviális. (7) \implies (8): $\langle Ab_j, Ab_k \rangle = \langle b_j, A^*Ab_k \rangle$,

tudjuk, hogy ezek $[A^*A]_{\mathbf{b}}$ elemei. De $\langle Ab_j, Ab_k \rangle = \langle b_j, b_k \rangle$,

és mivel b_1, \dots, b_n ONB, ezért $[A^*A]_{\mathbf{b}}$ az egységmátrix.

(1) \iff (9): Ha \mathbf{b} ONB és $[A]_{\mathbf{b}}$ diagonális, akkor $[A^*] = [A^{-1}]$

azt jelenti, hogy minden sajátértékre $\bar{\lambda} = \lambda^{-1}$, azaz $|\lambda| = 1$.

A felcserélhető az inverzével, így $A^* = A^{-1} \implies A$ normális.

Egybevágósági transzformációk: megjegyzések

Az előző tétel szerint egy bázistranszformáció akkor és csak akkor visz ortonormált bázist ortonormált bázisba,

Egybevágósági transzformációk: megjegyzések

Az előző tétel szerint egy bázistranszformáció akkor és csak akkor visz ortonormált bázist ortonormált bázisba, ha az áttérés mátrixa unitér,

Egybevágósági transzformációk: megjegyzések

Az előző tétel szerint egy bázistranszformáció akkor és csak akkor visz ortonormált bázist ortonormált bázisba, ha az áttérés mátrixa unitér, illetve ortogonális.

Egybevágósági transzformációk: megjegyzések

Az előző tétel szerint egy bázistranszformáció akkor és csak akkor visz ortonormált bázist ortonormált bázisba, ha az áttérés mátrixa unitér, illetve ortogonális. Speciálisan minden $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrixhoz van olyan unitér $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$,

Egybevágósági transzformációk: megjegyzések

Az előző tétel szerint egy bázistranszformáció akkor és csak akkor visz ortonormált bázist ortonormált bázisba, ha az áttérés mátrixa unitér, illetve ortogonális.

Speciálisan minden $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrixhoz van olyan unitér $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$, hogy $U^{-1}MU$ felső háromszögmátrix.

Egybevágósági transzformációk: megjegyzések

Az előző tétel szerint egy bázistranszformáció akkor és csak akkor visz ortonormált bázist ortonormált bázisba, ha az áttérés mátrixa unitér, illetve ortogonális.

Speciálisan minden $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrixhoz van olyan unitér $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$, hogy $U^{-1}MU$ felső háromszögmátrix.

A normalitás valós mátrix esetében azt jelenti, hogy felcserélhető a transzponáltjával.

Egybevágósági transzformációk: megjegyzések

Az előző tétel szerint egy bázistranszformáció akkor és csak akkor visz ortonormált bázist ortonormált bázisba, ha az áttérés mátrixa unitér, illetve ortogonális.

Speciálisan minden $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrixhoz van olyan unitér $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$, hogy $U^{-1}MU$ felső háromszögmátrix.

A normalitás valós mátrix esetében azt jelenti, hogy felcserélhető a transzponáltjával. Ebből azonban csak az következik, hogy **komplex** fölött van ortonormált sajátbázisa.

Egybevágósági transzformációk: megjegyzések

Az előző tétel szerint egy bázistranszformáció akkor és csak akkor visz ortonormált bázist ortonormált bázisba, ha az áttérés mátrixa unitér, illetve ortogonális. Speciálisan minden $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrixhoz van olyan unitér $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$, hogy $U^{-1}MU$ felső háromszögmátrix.

A normalitás valós mátrix esetében azt jelenti, hogy felcserélhető a transzponáltjával. Ebből azonban csak az következik, hogy **komplex** fölött van ortonormált sajátbázisa.

Egy valós mátrix akkor ortogonális, ha a transzponáltja az inverze,

Egybevágósági transzformációk: megjegyzések

Az előző tétel szerint egy bázistranszformáció akkor és csak akkor visz ortonormált bázist ortonormált bázisba, ha az áttérés mátrixa unitér, illetve ortogonális. Speciálisan minden $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrixhoz van olyan unitér $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$, hogy $U^{-1}MU$ felső háromszögmátrix.

A normalitás valós mátrix esetében azt jelenti, hogy felcserélhető a transzponáltjával. Ebből azonban csak az következik, hogy **komplex** fölött van ortonormált sajátbázisa.

Egy valós mátrix akkor ortogonális, ha a transzponáltja az inverze, azaz ha komplex fölött ONB-ben diagonalizálható,

Egybevágósági transzformációk: megjegyzések

Az előző tétel szerint egy bázistranszformáció akkor és csak akkor visz ortonormált bázist ortonormált bázisba, ha az áttérés mátrixa unitér, illetve ortogonális. Speciálisan minden $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrixhoz van olyan unitér $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$, hogy $U^{-1}MU$ felső háromszögmátrix.

A normalitás valós mátrix esetében azt jelenti, hogy felcserélhető a transzponáltjával. Ebből azonban csak az következik, hogy **komplex** fölött van ortonormált sajátbázisa.

Egy valós mátrix akkor ortogonális, ha a transzponáltja az inverze, azaz ha komplex fölött ONB-ben diagonalizálható, és minden komplex sajátérték abszolút értéke 1.

Egybevágósági transzformációk: megjegyzések

Az előző tétel szerint egy bázistranszformáció akkor és csak akkor visz ortonormált bázist ortonormált bázisba, ha az áttérés mátrixa unitér, illetve ortogonális. Speciálisan minden $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrixhoz van olyan unitér $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$, hogy $U^{-1}MU$ felső háromszögmátrix.

A normalitás valós mátrix esetében azt jelenti, hogy felcserélhető a transzponáltjával. Ebből azonban csak az következik, hogy **komplex** fölött van ortonormált sajátbázisa.

Egy valós mátrix akkor ortogonális, ha a transzponáltja az inverze, azaz ha komplex fölött ONB-ben diagonalizálható, és minden komplex sajátérték abszolút értéke 1. Mi a legszebb alakja **valós** fölött?

Ortogonalis transzformációk

F8.6.4. Tétel

Egy valós euklideszi téren ható A lineáris transzformáció pontosan akkor ortogonalis,

Ortogonalis transzformációk

F8.6.4. Tétel

Egy valós euklideszi téren ható A lineáris transzformáció pontosan akkor ortogonalis, ha van olyan ortonormált bázis, amelyben A mátrixa diagonális blokkokra bomlik,

Ortogonalis transzformációk

F8.6.4. Tétel

Egy valós euklideszi téren ható A lineáris transzformáció pontosan akkor ortogonalis, ha van olyan ortonormált bázis, amelyben A mátrixa diagonális blokkokra bomlik, ahol minden blokk vagy 1×1 -es,

Ortogonalis transzformációk

F8.6.4. Tétel

Egy valós euklideszi téren ható A lineáris transzformáció pontosan akkor ortogonalis, ha van olyan ortonormált bázis, amelyben A mátrixa diagonális blokkokra bomlik, ahol minden blokk vagy 1×1 -es, és az eleme ± 1 ,

Ortogonalis transzformációk

F8.6.4. Tétel

Egy valós euklideszi téren ható A lineáris transzformáció pontosan akkor ortogonalis, ha van olyan ortonormált bázis, amelyben A mátrixa diagonális blokkokra bomlik, ahol minden blokk vagy 1×1 -es, és az eleme ± 1 , vagy $\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ alakú alkalmas $\alpha \in \mathbb{R}$ -re.

Ortogonalis transzformációk

F8.6.4. Tétel

Egy valós euklideszi téren ható A lineáris transzformáció pontosan akkor ortogonalis, ha van olyan ortonormált bázis, amelyben A mátrixa diagonális blokkokra bomlik, ahol minden blokk vagy 1×1 -es, és az eleme ± 1 , vagy $\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ alakú alkalmas $\alpha \in \mathbb{R}$ -re.

Vagyis minden sokdimenziós egybevágóság síkbeli forgatásokra,

Ortogonalis transzformációk

F8.6.4. Tétel

Egy valós euklideszi téren ható A lineáris transzformáció pontosan akkor ortogonalis, ha van olyan ortonormált bázis, amelyben A mátrixa diagonális blokkokra bomlik, ahol minden blokk vagy 1×1 -es, és az eleme ± 1 , vagy $\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ alakú alkalmas $\alpha \in \mathbb{R}$ -re.

Vagyis minden sokdimenziós egybevágóság síkbeli forgatásokra, valamint „tükrözésekre” „bontható”.

Ortogonalis transzformációk

F8.6.4. Tétel

Egy valós euklideszi téren ható A lineáris transzformáció pontosan akkor ortogonalis, ha van olyan ortonormált bázis, amelyben A mátrixa diagonális blokkokra bomlik, ahol minden blokk vagy 1×1 -es, és az eleme ± 1 , vagy $\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ alakú alkalmas $\alpha \in \mathbb{R}$ -re.

Vagyis minden sokdimenziós egybevágóság síkbeli forgatásokra, valamint „tükrözésekre” „bontható”.

A bizonyítás ötlete: A karakterisztikus polinom valós együtthetős,

Ortogonalis transzformációk

F8.6.4. Tétel

Egy valós euklideszi téren ható A lineáris transzformáció pontosan akkor ortogonalis, ha van olyan ortonormált bázis, amelyben A mátrixa diagonális blokkokra bomlik, ahol minden blokk vagy 1×1 -es, és az eleme ± 1 , vagy $\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ alakú alkalmas $\alpha \in \mathbb{R}$ -re.

Vagyis minden sokdimenziós egybevágóság síkbeli forgatásokra, valamint „tükrözésekre” „bontható”.

A bizonyítás ötlete: A karakterisztikus polinom valós együtthatós, így a sajátértékek konjugált párok, vagy ± 1 .

Ortogonalis transzformációk

F8.6.4. Tétel

Egy valós euklideszi téren ható A lineáris transzformáció pontosan akkor ortogonalis, ha van olyan ortonormált bázis, amelyben A mátrixa diagonális blokkokra bomlik, ahol minden blokk vagy 1×1 -es, és az eleme ± 1 , vagy $\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ alakú alkalmas $\alpha \in \mathbb{R}$ -re.

Vagyis minden sokdimenziós egybevágóság síkbeli forgatásokra, valamint „tükrözésekre” „bontható”.

A bizonyítás ötlete: A karakterisztikus polinom valós együtthatós, így a sajátértékek konjugált párok, vagy ± 1 . Az A mátrixa ONB-ben M .

Ortogonalis transzformációk

F8.6.4. Tétel

Egy valós euklideszi téren ható A lineáris transzformáció pontosan akkor ortogonalis, ha van olyan ortonormált bázis, amelyben A mátrixa diagonális blokkokra bomlik, ahol minden blokk vagy 1×1 -es, és az eleme ± 1 , vagy $\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ alakú alkalmas $\alpha \in \mathbb{R}$ -re.

Vagyis minden sokdimenziós egybevágóság síkbeli forgatásokra, valamint „tükrözésekre” „bontható”.

A bizonyítás ötlete: A karakterisztikus polinom valós együtthatós, így a sajátértékek konjugált párok, vagy ± 1 . Az A mátrixa ONB-ben M . Ha $Mv = \lambda v$, akkor $M\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$.

Ortogonalis transzformációk

F8.6.4. Tétel

Egy valós euklideszi téren ható A lineáris transzformáció pontosan akkor ortogonalis, ha van olyan ortonormált bázis, amelyben A mátrixa diagonális blokkokra bomlik, ahol minden blokk vagy 1×1 -es, és az eleme ± 1 , vagy $\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ alakú alkalmas $\alpha \in \mathbb{R}$ -re.

Vagyis minden sokdimenziós egybevágóság síkbeli forgatásokra, valamint „tükrözésekre” „bontható”.

A bizonyítás ötlete: A karakterisztikus polinom valós együtthatós, így a sajátértékek konjugált párok, vagy ± 1 . Az A mátrixa ONB-ben M . Ha $Mv = \lambda v$, akkor $M\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$. Legyen $b_1 = (v + \bar{v})/\sqrt{2}$

Ortogonalis transzformációk

F8.6.4. Tétel

Egy valós euklideszi téren ható A lineáris transzformáció pontosan akkor ortogonalis, ha van olyan ortonormált bázis, amelyben A mátrixa diagonális blokkokra bomlik, ahol minden blokk vagy 1×1 -es, és az eleme ± 1 , vagy $\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ alakú alkalmas $\alpha \in \mathbb{R}$ -re.

Vagyis minden sokdimenziós egybevágóság síkbeli forgatásokra, valamint „tükrözésekre” „bontható”.

A bizonyítás ötlete: A karakterisztikus polinom valós együtthatós, így a sajátértékek konjugált párok, vagy ± 1 . Az A mátrixa ONB-ben M . Ha $Mv = \lambda v$, akkor $M\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$. Legyen $b_1 = (v + \bar{v})/\sqrt{2}$ és $b_2 = -i(v - \bar{v})/\sqrt{2}$.

Ortogonalis transzformációk

F8.6.4. Tétel

Egy valós euklideszi téren ható A lineáris transzformáció pontosan akkor ortogonalis, ha van olyan ortonormált bázis, amelyben A mátrixa diagonális blokkokra bomlik, ahol minden blokk vagy 1×1 -es, és az eleme ± 1 , vagy $\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ alakú alkalmas $\alpha \in \mathbb{R}$ -re.

Vagyis minden sokdimenziós egybevágóság síkbeli forgatásokra, valamint „tükrözésekre” „bontható”.

A bizonyítás ötlete: A karakterisztikus polinom valós együtthatós, így a sajátértékek konjugált párok, vagy ± 1 . Az A mátrixa ONB-ben M . Ha $Mv = \lambda v$, akkor $M\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$. Legyen $b_1 = (v + \bar{v})/\sqrt{2}$ és $b_2 = -i(v - \bar{v})/\sqrt{2}$. Ekkor b_1 és b_2 valós,

Ortogonalis transzformációk

F8.6.4. Tétel

Egy valós euklideszi téren ható A lineáris transzformáció pontosan akkor ortogonalis, ha van olyan ortonormált bázis, amelyben A mátrixa diagonális blokkokra bomlik, ahol minden blokk vagy 1×1 -es, és az eleme ± 1 , vagy $\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ alakú alkalmas $\alpha \in \mathbb{R}$ -re.

Vagyis minden sokdimenziós egybevágóság síkbeli forgatásokra, valamint „tükrözésekre” „bontható”.

A bizonyítás ötlete: A karakterisztikus polinom valós együtthatós, így a sajátértékek konjugált párok, vagy ± 1 . Az A mátrixa ONB-ben M . Ha $Mv = \lambda v$, akkor $M\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$. Legyen $b_1 = (v + \bar{v})/\sqrt{2}$ és $b_2 = -i(v - \bar{v})/\sqrt{2}$. Ekkor b_1 és b_2 valós, ortonormált,

Ortogonalis transzformációk

F8.6.4. Tétel

Egy valós euklideszi téren ható A lineáris transzformáció pontosan akkor ortogonalis, ha van olyan ortonormált bázis, amelyben A mátrixa diagonális blokkokra bomlik, ahol minden blokk vagy 1×1 -es, és az eleme ± 1 , vagy $\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ alakú alkalmas $\alpha \in \mathbb{R}$ -re.

Vagyis minden sokdimenziós egybevágóság síkbeli forgatásokra, valamint „tükrözésekre” „bontható”.

A bizonyítás ötlete: A karakterisztikus polinom valós együtthatós, így a sajátértékek konjugált párok, vagy ± 1 .

Az A mátrixa ONB-ben M . Ha $Mv = \lambda v$, akkor $M\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$.

Legyen $b_1 = (v + \bar{v})/\sqrt{2}$ és $b_2 = -i(v - \bar{v})/\sqrt{2}$.

Ekkor b_1 és b_2 valós, ortonormált, invariáns alteret generál,

Ortogonalis transzformációk

F8.6.4. Tétel

Egy valós euklideszi téren ható A lineáris transzformáció pontosan akkor ortogonalis, ha van olyan ortonormált bázis, amelyben A mátrixa diagonális blokkokra bomlik, ahol minden blokk vagy 1×1 -es, és az eleme ± 1 , vagy $\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ alakú alkalmas $\alpha \in \mathbb{R}$ -re.

Vagyis minden sokdimenziós egybevágóság síkbeli forgatásokra, valamint „tükrözésekre” „bontható”.

A bizonyítás ötlete: A karakterisztikus polinom valós együtthatós, így a sajátértékek konjugált párok, vagy ± 1 .

Az A mátrixa ONB-ben M . Ha $Mv = \lambda v$, akkor $M\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$.

Legyen $b_1 = (v + \bar{v})/\sqrt{2}$ és $b_2 = -i(v - \bar{v})/\sqrt{2}$.

Ekkor b_1 és b_2 valós, ortonormált, invariáns alteret generál, és ebben A mátrixa a fenti forgatás.