Algebra3, elemző szakirány

ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Előadó: Kiss Emil
ewkiss@cs.elte.hu

11. előadás

Bázishoz tartozó skaláris szorzat

Definíció

Az $\mathbb{R}^n$ vektortérbeli $v = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_n \end{bmatrix}$ vektorok

skaláris szorzata

Bázishoz tartozó skaláris szorzat

Definíció

Az $\mathbb{R}^n$ vektortérbeli $v = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_n \end{bmatrix}$ vektorok **skaláris szorzata** $\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \ldots + \lambda_n\mu_n$.

Bázishoz tartozó skaláris szorzat

Definíció

Az $\mathbb{R}^n$ vektortérbeli $v = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \ldots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \ldots \\ \mu_n \end{bmatrix}$ vektorok **skaláris szorzata** $\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \ldots + \lambda_n\mu_n$. Jele $\langle v, w \rangle$.

Bázishoz tartozó skaláris szorzat

Definíció

Az $\mathbb{R}^n$ vektortérbeli $v = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_n \end{bmatrix}$ vektorok skaláris szorzata $\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \ldots + \lambda_n\mu_n$. Jele $\langle v, w \rangle$.

Freud, 8.1.1. Definíció

Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ fölött

Bázishoz tartozó skaláris szorzat

Definíció

Az $\mathbb{R}^n$ vektortérbeli $v = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_n \end{bmatrix}$ vektorok skaláris szorzata $\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \ldots + \lambda_n\mu_n$. Jele $\langle v, w \rangle$.

Freud, 8.1.1. Definíció

Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ fölött és $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben.

Bázishoz tartozó skaláris szorzat

Definíció

Az $\mathbb{R}^n$ vektortérbeli $v = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_n \end{bmatrix}$ vektorok skaláris szorzata $\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \ldots + \lambda_n\mu_n$. Jele $\langle v, w \rangle$.

Freud, 8.1.1. Definíció

Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ fölött és $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben.
Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$,

Bázishoz tartozó skaláris szorzat

Definíció

Az $\mathbb{R}^n$ vektortérbeli $v = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_n \end{bmatrix}$ vektorok skaláris szorzata $\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \ldots + \lambda_n\mu_n$. Jele $\langle v, w \rangle$.

Freud, 8.1.1. Definíció

Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ fölött és $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben.
Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$, akkor

$$\langle v, w \rangle = \lambda_1\mu_1 + \ldots + \lambda_n\mu_n$$

a $b_1, \ldots, b_n$ bázishoz tartozó skaláris szorzat.

Bázishoz tartozó skaláris szorzat

Definíció

Az $\mathbb{R}^n$ vektortérbeli $v = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_n \end{bmatrix}$ vektorok skaláris szorzata $\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \ldots + \lambda_n\mu_n$. Jele $\langle v, w \rangle$.

Freud, 8.1.1. Definíció

Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ fölött és $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben.
Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$, akkor

$$\langle v, w \rangle = \lambda_1\mu_1 + \ldots + \lambda_n\mu_n$$

a $b_1, \ldots, b_n$ bázishoz tartozó skaláris szorzat.

A fenti definíció $\mathbb{R}^n$-ben a szokásos bázishoz tartozó skaláris szorzatot adja meg.

Euklideszi tér

F8.1.3. Definíció

Legyen V véges dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ fölött.

Euklideszi tér

F8.1.3. Definíció

Legyen V véges dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ fölött.
A kétváltozós $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{R}$ függvény skaláris szorzat,

Euklideszi tér

F8.1.3. Definíció

Legyen V véges dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ fölött.
A kétváltozós $(v, w) \mapsto \langle v, w\rangle \in \mathbb{R}$ függvény **skaláris szorzat**, ha tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

Euklideszi tér

F8.1.3. Definíció

Legyen V véges dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ fölött.
A kétváltozós $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{R}$ függvény **skaláris szorzat**, ha tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$.

Euklideszi tér

F8.1.3. Definíció

Legyen V véges dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ fölött.
A kétváltozós $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{R}$ függvény **skaláris szorzat**, ha tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$.

(2) $\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$.

Euklideszi tér

F8.1.3. Definíció

Legyen V véges dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ fölött.
A kétváltozós $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{R}$ függvény **skaláris szorzat**, ha tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$.

(2) $\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$.

(3) $\langle w, u + v \rangle = \langle w, u \rangle + \langle w, v \rangle$.

Euklideszi tér

F8.1.3. Definíció

Legyen V véges dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ fölött.
A kétváltozós $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{R}$ függvény **skaláris szorzat**, ha tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$.

(2) $\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$.

(3) $\langle w, u + v \rangle = \langle w, u \rangle + \langle w, v \rangle$.

(4) $\langle w, \lambda v \rangle = \lambda \langle w, v \rangle$.

Euklideszi tér

F8.1.3. Definíció

Legyen V véges dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ fölött.
A kétváltozós $(v, w) \mapsto \langle v, w\rangle \in \mathbb{R}$ függvény **skaláris szorzat**, ha tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$.

(2) $\langle \lambda v, w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle$.

(3) $\langle w, u + v\rangle = \langle w, u\rangle + \langle w, v\rangle$.

(4) $\langle w, \lambda v\rangle = \lambda\langle w, v\rangle$.

(5) $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$

Euklideszi tér

F8.1.3. Definíció

Legyen V véges dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ fölött.
A kétváltozós $(v, w) \mapsto \langle v, w\rangle \in \mathbb{R}$ függvény **skaláris szorzat**, ha tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$.

(2) $\langle \lambda v, w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle$.

(3) $\langle w, u + v\rangle = \langle w, u\rangle + \langle w, v\rangle$.

(4) $\langle w, \lambda v\rangle = \lambda\langle w, v\rangle$.

(5) $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$ (**szimmetrikus**).

Euklideszi tér

F8.1.3. Definíció

Legyen V véges dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ fölött.
A kétváltozós $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{R}$ függvény skaláris szorzat, ha tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$.

(2) $\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$.

(3) $\langle w, u + v \rangle = \langle w, u \rangle + \langle w, v \rangle$.

(4) $\langle w, \lambda v \rangle = \lambda \langle w, v \rangle$.

(5) $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ (szimmetrikus).

(6) $\langle v, v \rangle \geq 0$

Euklideszi tér

F8.1.3. Definíció

Legyen V véges dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ fölött.
A kétváltozós $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{R}$ függvény skaláris szorzat, ha tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$.

(2) $\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$.

(3) $\langle w, u + v \rangle = \langle w, u \rangle + \langle w, v \rangle$.

(4) $\langle w, \lambda v \rangle = \lambda \langle w, v \rangle$.

(5) $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ (szimmetrikus).

(6) $\langle v, v \rangle \geq 0$ és $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$

Euklideszi tér

F8.1.3. Definíció

Legyen V véges dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ fölött.
A kétváltozós $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{R}$ függvény skaláris szorzat, ha tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$.

(2) $\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$.

(3) $\langle w, u + v \rangle = \langle w, u \rangle + \langle w, v \rangle$.

(4) $\langle w, \lambda v \rangle = \lambda \langle w, v \rangle$.

(5) $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ (szimmetrikus).

(6) $\langle v, v \rangle \geq 0$ és $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$ (pozitív definit).

Euklideszi tér

F8.1.3. Definíció

Legyen V véges dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ fölött.
A kétváltozós $(v, w) \mapsto \langle v, w\rangle \in \mathbb{R}$ függvény skaláris szorzat, ha tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$.

(2) $\langle \lambda v, w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle$.

(3) $\langle w, u + v\rangle = \langle w, u\rangle + \langle w, v\rangle$.

(4) $\langle w, \lambda v\rangle = \lambda\langle w, v\rangle$.

(5) $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$ (szimmetrikus).

(6) $\langle v, v\rangle \geq 0$ és $\langle v, v\rangle = 0 \iff v = 0$ (pozitív definit).

Euklideszi tér: skaláris szorzattal ellátott vektortér.

Euklideszi tér

F8.1.3. Definíció

Legyen V véges dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ fölött.
A kétváltozós $(v, w) \mapsto \langle v, w\rangle \in \mathbb{R}$ függvény skaláris szorzat, ha tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$.

(2) $\langle \lambda v, w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle$.

(3) $\langle w, u + v\rangle = \langle w, u\rangle + \langle w, v\rangle$.

(4) $\langle w, \lambda v\rangle = \lambda\langle w, v\rangle$.

(5) $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$ (szimmetrikus).

(6) $\langle v, v\rangle \geq 0$ és $\langle v, v\rangle = 0 \iff v = 0$ (pozitív definit).

Euklideszi tér: skaláris szorzattal ellátott vektortér.

(1) és (2) együttes neve: az első változóban lineáris

Euklideszi tér

F8.1.3. Definíció

Legyen V véges dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ fölött.
A kétváltozós $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{R}$ függvény skaláris szorzat, ha tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$.

(2) $\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$.

(3) $\langle w, u + v \rangle = \langle w, u \rangle + \langle w, v \rangle$.

(4) $\langle w, \lambda v \rangle = \lambda \langle w, v \rangle$.

(5) $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ (szimmetrikus).

(6) $\langle v, v \rangle \geq 0$ és $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$ (pozitív definit).

Euklideszi tér: skaláris szorzattal ellátott vektortér.

(1) és (2) együttes neve: az első változóban lineáris
(vagyis $A(v) = \langle v, w \rangle$ lineáris leképezés minden rögzített w-re).

Hossz, távolság

Állítás

Minden bázishoz tartozó skaláris szorzat teljesíti
az előző definícióban felsorolt hat tulajdonságot.

Hossz, távolság

Állítás

Minden bázishoz tartozó skaláris szorzat teljesíti az előző definícióban felsorolt hat tulajdonságot.

Bizonyítás

Az $(1) - (5)$ igazolása HF.

Hossz, távolság

Állítás

Minden bázishoz tartozó skaláris szorzat teljesíti az előző definícióban felsorolt hat tulajdonságot.

Bizonyítás

Az $(1) - (5)$ igazolása HF. A (6) azért igaz, mert $\langle v, v\rangle = \lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2 > 0$,

Hossz, távolság

Állítás

Minden bázishoz tartozó skaláris szorzat teljesíti az előző definícióban felsorolt hat tulajdonságot.

Bizonyítás

Az (1) – (5) igazolása HF. A (6) azért igaz, mert $\langle v, v \rangle = \lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2 > 0$, kivéve ha mindegyik $\lambda_j = 0$. $\square$

Hossz, távolság

Állítás

Minden bázishoz tartozó skaláris szorzat teljesíti az előző definícióban felsorolt hat tulajdonságot.

Bizonyítás

Az $(1)-(5)$ igazolása HF. A (6) azért igaz, mert $\langle v, v\rangle = \lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2 > 0$, kivéve ha mindegyik $\lambda_j = 0$. $\square$

Belátjuk majd, hogy minden skaláris szorzat bázishoz tartozik.

Hossz, távolság

Állítás

Minden bázishoz tartozó skaláris szorzat teljesíti az előző definícióban felsorolt hat tulajdonságot.

Bizonyítás

Az $(1)-(5)$ igazolása HF. A (6) azért igaz, mert $\langle v, v\rangle = \lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2 > 0$, kivéve ha mindegyik $\lambda_j = 0$. $\square$

Belátjuk majd, hogy minden skaláris szorzat bázishoz tartozik.
A továbbiakban V euklideszi tér $\mathbb{R}$ fölött és $u, v, w \in V$.

Hossz, távolság

Állítás

Minden bázishoz tartozó skaláris szorzat teljesíti az előző definícióban felsorolt hat tulajdonságot.

Bizonyítás

Az (1) – (5) igazolása HF. A (6) azért igaz, mert $\langle v, v\rangle = \lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2 > 0$, kivéve ha mindegyik $\lambda_j = 0$. □

Belátjuk majd, hogy minden skaláris szorzat bázishoz tartozik. A továbbiakban V euklideszi tér $\mathbb{R}$ fölött és $u, v, w \in V$.

Freud, 8.2.1. és 8.2.4 Definíció

A v normája vagy hossza $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$.

Hossz, távolság

Állítás

Minden bázishoz tartozó skaláris szorzat teljesíti az előző definícióban felsorolt hat tulajdonságot.

Bizonyítás

Az (1) – (5) igazolása HF. A (6) azért igaz, mert $\langle v, v\rangle = \lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2 > 0$, kivéve ha mindegyik $\lambda_j = 0$. $\square$

Belátjuk majd, hogy minden skaláris szorzat bázishoz tartozik. A továbbiakban V euklideszi tér $\mathbb{R}$ fölött és $u, v, w \in V$.

Freud, 8.2.1. és 8.2.4 Definíció

A v normája vagy hossza $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$.
A v és w távolsága $\|v - w\|$.

Vektorok szöge

F8.2.7. Definíció

A v, w nem nulla vektorok **szögén** azt a $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$ szöget értjük,

Vektorok szöge

F8.2.7. Definíció

A v, w nem nulla vektorok **szögén** azt a $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$ szöget értjük, amelyre $\langle v, w\rangle = \|v\|\|w\|\cos\alpha$.

Vektorok szöge

F8.2.7. Definíció

A v, w nem nulla vektorok **szögén** azt a $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$ szöget értjük, amelyre $\langle v, w\rangle = \|v\|\|w\|\cos\alpha$.

F8.2.8 Cauchy–Bunyakovszkij–Schwartz-egyenlőtlenség

$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\|w\|$,

Vektorok szöge

F8.2.7. Definíció

A v, w nem nulla vektorok szögén azt a $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$ szöget értjük, amelyre $\langle v, w\rangle = \|v\|\|w\| \cos\alpha$.

F8.2.8 Cauchy–Bunyakovszkij–Schwartz-egyenlőtlenség

$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\|w\|$, és egyenlőség pontosan akkor áll,

Vektorok szöge

F8.2.7. Definíció

A v, w nem nulla vektorok **szögén** azt a $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$ szöget értjük, amelyre $\langle v, w\rangle = \|v\|\|w\| \cos \alpha$.

F8.2.8 Cauchy–Bunyakovszkij–Schwartz-egyenlőtlenség

$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\|w\|$, és egyenlőség pontosan akkor áll, ha v és w párhuzamos,

Vektorok szöge

F8.2.7. Definíció

A v, w nem nulla vektorok **szögén** azt a $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$ szöget értjük, amelyre $\langle v, w\rangle = \|v\|\|w\| \cos\alpha$.

F8.2.8 Cauchy–Bunyakovszkij–Schwartz-egyenlőtlenség

$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\|w\|$, és egyenlőség pontosan akkor áll, ha v és w párhuzamos, azaz lineárisan összefüggő.

Vektorok szöge

F8.2.7. Definíció

A v, w nem nulla vektorok **szögén** azt a $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$ szöget értjük, amelyre $\langle v, w \rangle = \|v\| \|w\| \cos \alpha$.

F8.2.8 Cauchy–Bunyakovszkij–Schwartz-egyenlőtlenség

$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$, és egyenlőség pontosan akkor áll, ha v és w párhuzamos, azaz lineárisan összefüggő.

Emiatt két vektor szöge értelmes,

Vektorok szöge

F8.2.7. Definíció

A v, w nem nulla vektorok **szögén** azt a $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$ szöget értjük, amelyre $\langle v, w \rangle = \|v\| \|w\| \cos\alpha$.

F8.2.8 Cauchy–Bunyakovszkij–Schwartz-egyenlőtlenség

$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$, és egyenlőség pontosan akkor áll, ha v és w párhuzamos, azaz lineárisan összefüggő.

Emiatt két vektor szöge értelmes, mert $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$.

Vektorok szöge

F8.2.7. Definíció

A v, w nem nulla vektorok **szögén** azt a $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$ szöget értjük, amelyre $\langle v, w\rangle = \|v\|\|w\| \cos\alpha$.

F8.2.8 Cauchy–Bunyakovszkij–Schwartz-egyenlőtlenség

$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\|w\|$, és egyenlőség pontosan akkor áll, ha v és w párhuzamos, azaz lineárisan összefüggő.

Emiatt két vektor szöge értelmes, mert $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$.

Bizonyítás

$\forall x \in \mathbb{R}$-re $0 \leq \langle xv + w, xv + w\rangle$

Vektorok szöge

F8.2.7. Definíció

A v, w nem nulla vektorok **szögén** azt a $0 \le \alpha \le 180^\circ$ szöget értjük, amelyre $\langle v, w\rangle = \|v\|\|w\| \cos\alpha$.

F8.2.8 Cauchy–Bunyakovszkij–Schwartz-egyenlőtlenség

$|\langle v, w\rangle| \le \|v\|\|w\|$, és egyenlőség pontosan akkor áll, ha v és w párhuzamos, azaz lineárisan összefüggő.

Emiatt két vektor szöge értelmes, mert $-1 \le \cos\alpha \le 1$.

Bizonyítás

$\forall x \in \mathbb{R}$-re $0 \le \langle xv + w, xv + w\rangle = x^2\langle v, v\rangle + 2x\langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle$.

Vektorok szöge

F8.2.7. Definíció

A v, w nem nulla vektorok **szögén** azt a $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$ szöget értjük, amelyre $\langle v, w\rangle = \|v\|\|w\| \cos\alpha$.

F8.2.8 Cauchy–Bunyakovszkij–Schwartz-egyenlőtlenség

$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\|w\|$, és egyenlőség pontosan akkor áll, ha v és w párhuzamos, azaz lineárisan összefüggő.

Emiatt két vektor szöge értelmes, mert $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$.

Bizonyítás

$\forall x \in \mathbb{R}$-re $0 \leq \langle xv + w, xv + w\rangle = x^2\langle v, v\rangle + 2x\langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle$.
Ez x-ben másodfokú polinom

Vektorok szöge

F8.2.7. Definíció

A v, w nem nulla vektorok **szögén** azt a $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$ szöget értjük, amelyre $\langle v, w\rangle = \|v\|\|w\| \cos\alpha$.

F8.2.8 Cauchy–Bunyakovszkij–Schwartz-egyenlőtlenség

$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\|w\|$, és egyenlőség pontosan akkor áll, ha v és w párhuzamos, azaz lineárisan összefüggő.

Emiatt két vektor szöge értelmes, mert $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$.

Bizonyítás

$\forall x \in \mathbb{R}$-re $0 \leq \langle xv + w, xv + w\rangle = x^2\langle v, v\rangle + 2x\langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle$.
Ez x-ben másodfokú polinom $\implies$ diszkriminánsa nempozitív.

Vektorok szöge

F8.2.7. Definíció

A v, w nem nulla vektorok **szögén** azt a $0 \le \alpha \le 180^\circ$ szöget értjük, amelyre $\langle v, w\rangle = \|v\|\|w\| \cos\alpha$.

F8.2.8 Cauchy–Bunyakovszkij–Schwartz-egyenlőtlenség

$|\langle v, w\rangle| \le \|v\|\|w\|$, és egyenlőség pontosan akkor áll, ha v és w párhuzamos, azaz lineárisan összefüggő.

Emiatt két vektor szöge értelmes, mert $-1 \le \cos\alpha \le 1$.

Bizonyítás

$\forall x \in \mathbb{R}$-re $0 \le \langle xv + w, xv + w\rangle = x^2\langle v, v\rangle + 2x\langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle$.
Ez x-ben másodfokú polinom $\implies$ diszkriminánsa nempozitív.
Így $(2\langle v, w\rangle)^2 \le 4\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle$.

Vektorok szöge

F8.2.7. Definíció

A v, w nem nulla vektorok **szögén** azt a $0 \le \alpha \le 180^\circ$ szöget értjük, amelyre $\langle v, w\rangle = \|v\|\|w\| \cos\alpha$.

F8.2.8 Cauchy–Bunyakovszkij–Schwartz-egyenlőtlenség

$|\langle v, w\rangle| \le \|v\|\|w\|$, és egyenlőség pontosan akkor áll, ha v és w párhuzamos, azaz lineárisan összefüggő.

Emiatt két vektor szöge értelmes, mert $-1 \le \cos\alpha \le 1$.

Bizonyítás

$\forall x \in \mathbb{R}$-re $0 \le \langle xv + w, xv + w\rangle = x^2\langle v, v\rangle + 2x\langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle$.
Ez x-ben másodfokú polinom $\Longrightarrow$ diszkriminánsa nempozitív.
Így $(2\langle v, w\rangle)^2 \le 4\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle$. Négyzetgyökvonással kész. $\square$

A háromszög-egyenlőtlenség

F8.2.2. Háromszög-egyenlőtlenség

$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$,

A háromszög-egyenlőtlenség

F8.2.2. Háromszög-egyenlőtlenség

$\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$, és egyenlőség pontosan akkor áll,

A háromszög-egyenlőtlenség

F8.2.2. Háromszög-egyenlőtlenség

$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$, és egyenlőség pontosan akkor áll, ha v és w egyike a másik nemnegatív valós számszorosa.

A háromszög-egyenlőtlenség

F8.2.2. Háromszög-egyenlőtlenség

$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$, és egyenlőség pontosan akkor áll, ha v és w egyike a másik nemnegatív valós számszorosa.

Bizonyítás

Mivel mindkét oldal nemnegatív, elég a négyzetét belátni,

A háromszög-egyenlőtlenség

F8.2.2. Háromszög-egyenlőtlenség

$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$, és egyenlőség pontosan akkor áll, ha v és w egyike a másik nemnegatív valós számszorosa.

Bizonyítás

Mivel mindkét oldal nemnegatív, elég a négyzetét belátni, ami $\langle v, v\rangle + 2\langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle \leq \langle v, v\rangle + 2\|v\|\|w\| + \langle w, w\rangle$.

A háromszög-egyenlőtlenség

F8.2.2. Háromszög-egyenlőtlenség

$\|v+w\| \leq \|v\|+\|w\|$, és egyenlőség pontosan akkor áll, ha v és w egyike a másik nemnegatív valós számszorosa.

Bizonyítás

Mivel mindkét oldal nemnegatív, elég a négyzetét belátni, ami
$\langle v, v\rangle + 2\langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle \leq \langle v, v\rangle + 2\|v\|\|w\| + \langle w, w\rangle$.
Ez a CBS-egyenlőtlenség miatt igaz.

A háromszög-egyenlőtlenség

F8.2.2. Háromszög-egyenlőtlenség

$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$, és egyenlőség pontosan akkor áll, ha v és w egyike a másik nemnegatív valós számszorosa.

Bizonyítás

Mivel mindkét oldal nemnegatív, elég a négyzetét belátni, ami
$\langle v, v\rangle + 2\langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle \leq \langle v, v\rangle + 2\|v\|\|w\| + \langle w, w\rangle$.
Ez a CBS-egyenlőtlenség miatt igaz. Egyenlőség akkor áll, ha $\langle v, w\rangle \geq 0$,

A háromszög-egyenlőtlenség

F8.2.2. Háromszög-egyenlőtlenség

$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$, és egyenlőség pontosan akkor áll, ha v és w egyike a másik nemnegatív valós számszorosa.

Bizonyítás

Mivel mindkét oldal nemnegatív, elég a négyzetét belátni, ami
$\langle v, v\rangle + 2\langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle \leq \langle v, v\rangle + 2\|v\|\|w\| + \langle w, w\rangle$.
Ez a CBS-egyenlőtlenség miatt igaz. Egyenlőség akkor áll, ha $\langle v, w\rangle \geq 0$, továbbá a CBS-ben egyenlőség van. $\square$

A háromszög-egyenlőtlenség

F8.2.2. Háromszög-egyenlőtlenség

$\|v + w\| \le \|v\| + \|w\|$, és egyenlőség pontosan akkor áll, ha v és w egyike a másik nemnegatív valós számszorosa.

Bizonyítás

Mivel mindkét oldal nemnegatív, elég a négyzetét belátni, ami $\langle v, v\rangle + 2\langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle \le \langle v, v\rangle + 2\|v\|\|w\| + \langle w, w\rangle$.
Ez a CBS-egyenlőtlenség miatt igaz. Egyenlőség akkor áll, ha $\langle v, w\rangle \ge 0$, továbbá a CBS-ben egyenlőség van. $\square$

F8.1.5. Definíció

v merőleges w-re,

A háromszög-egyenlőtlenség

F8.2.2. Háromszög-egyenlőtlenség

$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$, és egyenlőség pontosan akkor áll, ha v és w egyike a másik nemnegatív valós számszorosa.

Bizonyítás

Mivel mindkét oldal nemnegatív, elég a négyzetét belátni, ami $\langle v, v\rangle + 2\langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle \leq \langle v, v\rangle + 2\|v\|\|w\| + \langle w, w\rangle$.
Ez a CBS-egyenlőtlenség miatt igaz. Egyenlőség akkor áll, ha $\langle v, w\rangle \geq 0$, továbbá a CBS-ben egyenlőség van. $\square$

F8.1.5. Definíció

v merőleges vagy ortogonális w-re,

A háromszög-egyenlőtlenség

F8.2.2. Háromszög-egyenlőtlenség

$\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$, és egyenlőség pontosan akkor áll, ha v és w egyike a másik nemnegatív valós számszorosa.

Bizonyítás

Mivel mindkét oldal nemnegatív, elég a négyzetét belátni, ami
$\langle v, v\rangle + 2\langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle \leq \langle v, v\rangle + 2\|v\|\|w\| + \langle w, w\rangle$.
Ez a CBS-egyenlőtlenség miatt igaz. Egyenlőség akkor áll, ha $\langle v, w\rangle \geq 0$, továbbá a CBS-ben egyenlőség van. $\square$

F8.1.5. Definíció

v merőleges vagy ortogonális w-re, ha $\langle v, w\rangle = 0$.

A háromszög-egyenlőtlenség

F8.2.2. Háromszög-egyenlőtlenség

$\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$, és egyenlőség pontosan akkor áll, ha v és w egyike a másik nemnegatív valós számszorosa.

Bizonyítás

Mivel mindkét oldal nemnegatív, elég a négyzetét belátni, ami
$\langle v, v\rangle + 2\langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle \leq \langle v, v\rangle + 2\|v\|\|w\| + \langle w, w\rangle$.
Ez a CBS-egyenlőtlenség miatt igaz. Egyenlőség akkor áll, ha $\langle v, w\rangle \geq 0$, továbbá a CBS-ben egyenlőség van. $\square$

F8.1.5. Definíció

v merőleges vagy ortogonális w-re, ha $\langle v, w\rangle = 0$. Jele $v \perp w$.

A háromszög-egyenlőtlenség

F8.2.2. Háromszög-egyenlőtlenség

$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$, és egyenlőség pontosan akkor áll, ha v és w egyike a másik nemnegatív valós számszorosa.

Bizonyítás

Mivel mindkét oldal nemnegatív, elég a négyzetét belátni, ami $\langle v, v\rangle + 2\langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle \leq \langle v, v\rangle + 2\|v\|\|w\| + \langle w, w\rangle$.
Ez a CBS-egyenlőtlenség miatt igaz. Egyenlőség akkor áll, ha $\langle v, w\rangle \geq 0$, továbbá a CBS-ben egyenlőség van. $\square$

F8.1.5. Definíció

v merőleges vagy ortogonális w-re, ha $\langle v, w\rangle = 0$. Jele $v \perp w$.
Vagyis $v \perp w$ pontosan akkor, ha a szögük

A háromszög-egyenlőtlenség

F8.2.2. Háromszög-egyenlőtlenség

$\|v+w\| \leq \|v\|+\|w\|$, és egyenlőség pontosan akkor áll, ha v és w egyike a másik nemnegatív valós számszorosa.

Bizonyítás

Mivel mindkét oldal nemnegatív, elég a négyzetét belátni, ami $\langle v, v\rangle + 2\langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle \leq \langle v, v\rangle + 2\|v\|\|w\| + \langle w, w\rangle$.
Ez a CBS-egyenlőtlenség miatt igaz. Egyenlőség akkor áll, ha $\langle v, w\rangle \geq 0$, továbbá a CBS-ben egyenlőség van. $\square$

F8.1.5. Definíció

v merőleges vagy ortogonális w-re, ha $\langle v, w\rangle = 0$. Jele $v \perp w$.
Vagyis $v \perp w$ pontosan akkor, ha a szögük derékszög.

Ortonormált bázis

F8.1.4. Definíció

Normált vektor:

Ortonormált bázis

F8.1.4. Definíció

Normált vektor: hossza 1.

Ortonormált bázis

F8.1.4. Definíció

Normált vektor: hossza 1. A v vektor „normáltja” $v/\|v\|$.

Ortonormált bázis

F8.1.4. Definíció

Normált vektor: hossza 1. A v vektor „normáltja” $v/\|v\|$.
Ortogonális vektorrendszer:

Ortonormált bázis

F8.1.4. Definíció

Normált vektor: hossza 1. A v vektor „normáltja” $v/\|v\|$.
Ortogonális vektorrendszer: bármely két eleme ortogonális.

Ortonormált bázis

F8.1.4. Definíció

Normált vektor: hossza 1. A v vektor „normáltja” $v/\|v\|$.
Ortogonális vektorrendszer: bármely két eleme ortogonális.
Ortonormált vektorrendszer:

Ortonormált bázis

F8.1.4. Definíció

Normált vektor: hossza 1. A v vektor „normáltja” $v/\|v\|$.
Ortogonális vektorrendszer: bármely két eleme ortogonális.
Ortonormált vektorrendszer: ortogonális, elemei normáltak.

Ortonormált bázis

F8.1.4. Definíció

Normált vektor: hossza 1. A v vektor „normáltja” $v/\|v\|$.
Ortogonális vektorrendszer: bármely két eleme ortogonális.
Ortonormált vektorrendszer: ortogonális, elemei normáltak.

Tétel

Tegyük föl, hogy $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált bázis.

Ortonormált bázis

F8.1.4. Definíció

Normált vektor: hossza 1. A v vektor „normáltja” $v/\|v\|$.
Ortogonális vektorrendszer: bármely két eleme ortogonális.
Ortonormált vektorrendszer: ortogonális, elemei normáltak.

Tétel

Tegyük föl, hogy $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált bázis.
Ekkor minden v-re $v = \langle b_1, v\rangle b_1 + \ldots + \langle b_n, v\rangle b_n$.

Ortonormált bázis

F8.1.4. Definíció

Normált vektor: hossza 1. A v vektor „normáltja” $v/\|v\|$.
Ortogonális vektorrendszer: bármely két eleme ortogonális.
Ortonormált vektorrendszer: ortogonális, elemei normáltak.

Tétel

Tegyük föl, hogy $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált bázis.
Ekkor minden v-re $v = \langle b_1, v\rangle b_1 + \ldots + \langle b_n, v\rangle b_n$.

Azaz a koordináták kiszámításához nem kell egyenletrendszer!

Ortonormált bázis

F8.1.4. Definíció

Normált vektor: hossza 1. A v vektor „normáltja” $v/\|v\|$.
Ortogonális vektorrendszer: bármely két eleme ortogonális.
Ortonormált vektorrendszer: ortogonális, elemei normáltak.

Tétel

Tegyük föl, hogy $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált bázis.
Ekkor minden v-re $v = \langle b_1, v\rangle b_1 + \ldots + \langle b_n, v\rangle b_n$.

Azaz a koordináták kiszámításához nem kell egyenletrendszer!

Bizonyítás

Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$,

Ortonormált bázis

F8.1.4. Definíció

Normált vektor: hossza 1. A v vektor „normáltja” $v/\|v\|$.
Ortogonális vektorrendszer: bármely két eleme ortogonális.
Ortonormált vektorrendszer: ortogonális, elemei normáltak.

Tétel

Tegyük föl, hogy $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált bázis.
Ekkor minden v-re $v = \langle b_1, v\rangle b_1 + \ldots + \langle b_n, v\rangle b_n$.

Azaz a koordináták kiszámításához nem kell egyenletrendszer!

Bizonyítás

Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$, akkor $\langle b_j, v\rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle b_j, b_k\rangle$

Ortonormált bázis

F8.1.4. Definíció

Normált vektor: hossza 1. A v vektor „normáltja” $v/\|v\|$.
Ortogonális vektorrendszer: bármely két eleme ortogonális.
Ortonormált vektorrendszer: ortogonális, elemei normáltak.

Tétel

Tegyük föl, hogy $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált bázis.
Ekkor minden v-re $v = \langle b_1, v\rangle b_1 + \ldots + \langle b_n, v\rangle b_n$.

Azaz a koordináták kiszámításához nem kell egyenletrendszer!

Bizonyítás

Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$, akkor $\langle b_j, v\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle b_j, b_k\rangle = \lambda_j$,

Ortonormált bázis

F8.1.4. Definíció

Normált vektor: hossza 1. A v vektor „normáltja” $v/\|v\|$.
Ortogonális vektorrendszer: bármely két eleme ortogonális.
Ortonormált vektorrendszer: ortogonális, elemei normáltak.

Tétel

Tegyük föl, hogy $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált bázis.
Ekkor minden v-re $v = \langle b_1, v\rangle b_1 + \ldots + \langle b_n, v\rangle b_n$.

Azaz a koordináták kiszámításához nem kell egyenletrendszer!

Bizonyítás

Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$, akkor $\langle b_j, v\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle b_j, b_k\rangle = \lambda_j$,
hiszen $k \neq j$-re $\langle b_j, b_k\rangle = 0$,

Ortonormált bázis

F8.1.4. Definíció

Normált vektor: hossza 1. A v vektor „normáltja" $v/\|v\|$.
Ortogonális vektorrendszer: bármely két eleme ortogonális.
Ortonormált vektorrendszer: ortogonális, elemei normáltak.

Tétel

Tegyük föl, hogy $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált bázis.
Ekkor minden v-re $v = \langle b_1, v\rangle b_1 + \ldots + \langle b_n, v\rangle b_n$.

Azaz a koordináták kiszámításához nem kell egyenletrendszer!

Bizonyítás

Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$, akkor $\langle b_j, v\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle b_j, b_k\rangle = \lambda_j$,
hiszen $k \neq j$-re $\langle b_j, b_k\rangle = 0$, és $\langle b_j, b_j\rangle = \|b_j\|^2 = 1$. $\square$

Ortonormált rendszer független

F8.1.2. Feladat

Nem nulla vektorokból álló ortogonális rendszer független.

Ortonormált rendszer független

F8.1.2. Feladat

Nem nulla vektorokból álló ortogonális rendszer független.

Bizonyítás

Legyen $v_1, \ldots, v_m$ ilyen rendszer

Ortonormált rendszer független

F8.1.2. Feladat

Nem nulla vektorokból álló ortogonális rendszer független.

Bizonyítás

Legyen $v_1, \dots, v_m$ ilyen rendszer és $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = 0$.

Ortonormált rendszer független

F8.1.2. Feladat

Nem nulla vektorokból álló ortogonális rendszer független.

Bizonyítás

Legyen $v_1, \ldots, v_m$ ilyen rendszer és $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$.
A v_j-vel skalárisan szorozva

Ortonormált rendszer független

F8.1.2. Feladat

Nem nulla vektorokból álló ortogonális rendszer független.

Bizonyítás

Legyen $v_1, \ldots, v_m$ ilyen rendszer és $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$.
A v_j-vel skalárisan szorozva $0 = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \langle v_k, v_j \rangle$

Ortonormált rendszer független

F8.1.2. Feladat

Nem nulla vektorokból álló ortogonális rendszer független.

Bizonyítás

Legyen $v_1, \ldots, v_m$ ilyen rendszer és $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$.
A v_j-vel skalárisan szorozva $0 = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \langle v_k, v_j \rangle = \lambda_j \langle v_j, v_j \rangle$,

Ortonormált rendszer független

F8.1.2. Feladat

Nem nulla vektorokból álló ortogonális rendszer független.

Bizonyítás

Legyen $v_1, \ldots, v_m$ ilyen rendszer és $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$.
A v_j-vel skalárisan szorozva $0 = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \langle v_k, v_j \rangle = \lambda_j \langle v_j, v_j \rangle$, hiszen $k \neq j$-re $\langle v_k, v_j \rangle = 0$ az ortogonalitás miatt.

Ortonormált rendszer független

F8.1.2. Feladat

Nem nulla vektorokból álló ortogonális rendszer független.

Bizonyítás

Legyen $v_1, \ldots, v_m$ ilyen rendszer és $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$.
A v_j-vel skalárisan szorozva $0 = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \langle v_k, v_j \rangle = \lambda_j \langle v_j, v_j \rangle$,
hiszen $k \neq j$-re $\langle v_k, v_j \rangle = 0$ az ortogonalitás miatt.
Mivel $v_j \neq 0$

Ortonormált rendszer független

F8.1.2. Feladat

Nem nulla vektorokból álló ortogonális rendszer független.

Bizonyítás

Legyen $v_1, \ldots, v_m$ ilyen rendszer és $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$.
A v_j-vel skalárisan szorozva $0 = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \langle v_k, v_j \rangle = \lambda_j \langle v_j, v_j \rangle$,
hiszen $k \neq j$-re $\langle v_k, v_j \rangle = 0$ az ortogonalitás miatt.
Mivel $v_j \neq 0$ ezért $\langle v_j, v_j \rangle \neq 0$,

Ortonormált rendszer független

F8.1.2. Feladat

Nem nulla vektorokból álló ortogonális rendszer független.

Bizonyítás

Legyen $v_1, \ldots, v_m$ ilyen rendszer és $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$.
A v_j-vel skalárisan szorozva $0 = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \langle v_k, v_j \rangle = \lambda_j \langle v_j, v_j \rangle$,
hiszen $k \neq j$-re $\langle v_k, v_j \rangle = 0$ az ortogonalitás miatt.
Mivel $v_j \neq 0$ ezért $\langle v_j, v_j \rangle \neq 0$, és így $\lambda_j = 0$. $\square$

Ortonormált rendszer független

F8.1.2. Feladat

Nem nulla vektorokból álló ortogonális rendszer független.

Bizonyítás

Legyen $v_1, \ldots, v_m$ ilyen rendszer és $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$.
A v_j-vel skalárisan szorozva $0 = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \langle v_k, v_j \rangle = \lambda_j \langle v_j, v_j \rangle$,
hiszen $k \neq j$-re $\langle v_k, v_j \rangle = 0$ az ortogonalitás miatt.
Mivel $v_j \neq 0$ ezért $\langle v_j, v_j \rangle \neq 0$, és így $\lambda_j = 0$. $\square$

Így minden dim V elemszámú ortonormált rendszer bázis.

Ortonormált rendszer független

F8.1.2. Feladat

Nem nulla vektorokból álló ortogonális rendszer független.

Bizonyítás

Legyen $v_1, \ldots, v_m$ ilyen rendszer és $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$.
A v_j-vel skalárisan szorozva $0 = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \langle v_k, v_j \rangle = \lambda_j \langle v_j, v_j \rangle$,
hiszen $k \neq j$-re $\langle v_k, v_j \rangle = 0$ az ortogonalitás miatt.
Mivel $v_j \neq 0$ ezért $\langle v_j, v_j \rangle \neq 0$, és így $\lambda_j = 0$. $\square$

Így minden dim V elemszámú ortonormált rendszer bázis.

Tétel

Minden ortonormált rendszer kibővíthető ortonormált bázissá.

Ortonormált rendszer független

F8.1.2. Feladat

Nem nulla vektorokból álló ortogonális rendszer független.

Bizonyítás

Legyen $v_1, \ldots, v_m$ ilyen rendszer és $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$.
A v_j-vel skalárisan szorozva $0 = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \langle v_k, v_j \rangle = \lambda_j \langle v_j, v_j \rangle$,
hiszen $k \neq j$-re $\langle v_k, v_j \rangle = 0$ az ortogonalitás miatt.
Mivel $v_j \neq 0$ ezért $\langle v_j, v_j \rangle \neq 0$, és így $\lambda_j = 0$. □

Így minden $\dim V$ elemszámú ortonormált rendszer bázis.

Tétel

Minden ortonormált rendszer kibővíthető ortonormált bázissá.
Speciálisan minden euklideszi térben van ortonormált bázis.

A Gram–Schmidt-módszer

Gram–Schmidt-ortogonalizáció (Freud, 202. oldal)

Tegyük föl, hogy $b_1, \ldots, b_m$ ortonormált rendszer,

A Gram–Schmidt-módszer

Gram–Schmidt-ortogonalizáció (Freud, 202. oldal)

Tegyük föl, hogy $b_1, \ldots, b_m$ ortonormált rendszer,
és a v vektor nincs benne a $b_1, \ldots, b_m$ által generált altérben.

A Gram–Schmidt-módszer

Gram–Schmidt-ortogonalizáció (Freud, 202. oldal)

Tegyük föl, hogy $b_1, \ldots, b_m$ ortonormált rendszer,
és a v vektor nincs benne a $b_1, \ldots, b_m$ által generált altérben.
Legyen $w = v - \langle b_1, v\rangle b_1 - \ldots - \langle b_m, v\rangle b_m$,

A Gram–Schmidt-módszer

Gram–Schmidt-ortogonalizáció (Freud, 202. oldal)

Tegyük föl, hogy $b_1, \ldots, b_m$ ortonormált rendszer,
és a v vektor nincs benne a $b_1, \ldots, b_m$ által generált altérben.
Legyen $w = v - \langle b_1, v\rangle b_1 - \ldots - \langle b_m, v\rangle b_m$,
ekkor w ortogonális $b_1, \ldots, b_m$ mindegyikére

A Gram–Schmidt-módszer

Gram–Schmidt-ortogonalizáció (Freud, 202. oldal)

Tegyük föl, hogy $b_1, \ldots, b_m$ ortonormált rendszer,
és a v vektor nincs benne a $b_1, \ldots, b_m$ által generált altérben.
Legyen $w = v - \langle b_1, v\rangle b_1 - \ldots - \langle b_m, v\rangle b_m$,
ekkor w ortogonális $b_1, \ldots, b_m$ mindegyikére (HF).

A Gram–Schmidt-módszer

Gram–Schmidt-ortogonalizáció (Freud, 202. oldal)

Tegyük föl, hogy $b_1, \ldots, b_m$ ortonormált rendszer,
és a v vektor nincs benne a $b_1, \ldots, b_m$ által generált altérben.
Legyen $w = v - \langle b_1, v\rangle b_1 - \ldots - \langle b_m, v\rangle b_m$,
ekkor w ortogonális $b_1, \ldots, b_m$ mindegyikére (HF).
Így ha $b_{m+1} = w/\|w\|$,

A Gram–Schmidt-módszer

Gram–Schmidt-ortogonalizáció (Freud, 202. oldal)

Tegyük föl, hogy $b_1, \ldots, b_m$ ortonormált rendszer,
és a v vektor nincs benne a $b_1, \ldots, b_m$ által generált altérben.
Legyen $w = v - \langle b_1, v\rangle b_1 - \ldots - \langle b_m, v\rangle b_m$,
ekkor w ortogonális $b_1, \ldots, b_m$ mindegyikére (HF).
Így ha $b_{m+1} = w/\|w\|$, akkor $b_1, \ldots, b_{m+1}$ ortonormált. $\square$

A Gram–Schmidt-módszer

Gram–Schmidt-ortogonalizáció (Freud, 202. oldal)

Tegyük föl, hogy $b_1, \ldots, b_m$ ortonormált rendszer,
és a v vektor nincs benne a $b_1, \ldots, b_m$ által generált altérben.
Legyen $w = v - \langle b_1, v\rangle b_1 - \ldots - \langle b_m, v\rangle b_m$,
ekkor w ortogonális $b_1, \ldots, b_m$ mindegyikére (HF).
Így ha $b_{m+1} = w/\|w\|$, akkor $b_1, \ldots, b_{m+1}$ ortonormált. $\square$

Állítás

Ha $b_1, \ldots, b_k$ ortonormált bázis,

A Gram–Schmidt-módszer

Gram–Schmidt-ortogonalizáció (Freud, 202. oldal)

Tegyük föl, hogy $b_1, \dots, b_m$ ortonormált rendszer,
és a v vektor nincs benne a $b_1, \dots, b_m$ által generált altérben.
Legyen $w = v - \langle b_1, v\rangle b_1 - \dots - \langle b_m, v\rangle b_m$,
ekkor w ortogonális $b_1, \dots, b_m$ mindegyikére (HF).
Így ha $b_{m+1} = w/\|w\|$, akkor $b_1, \dots, b_{m+1}$ ortonormált. $\square$

Állítás

Ha $b_1, \dots, b_k$ ortonormált bázis, akkor a hozzá tartozó skaláris szorzat ugyanaz,

A Gram–Schmidt-módszer

Gram–Schmidt-ortogonalizáció (Freud, 202. oldal)

Tegyük föl, hogy $b_1, \ldots, b_m$ ortonormált rendszer,
és a v vektor nincs benne a $b_1, \ldots, b_m$ által generált altérben.
Legyen $w = v - \langle b_1, v\rangle b_1 - \ldots - \langle b_m, v\rangle b_m$,
ekkor w ortogonális $b_1, \ldots, b_m$ mindegyikére (HF).
Így ha $b_{m+1} = w/\|w\|$, akkor $b_1, \ldots, b_{m+1}$ ortonormált. □

Állítás

Ha $b_1, \ldots, b_k$ ortonormált bázis, akkor a hozzá tartozó skaláris szorzat ugyanaz, mint a tér eredeti skaláris szorzata.

A Gram–Schmidt-módszer

Gram–Schmidt-ortogonalizáció (Freud, 202. oldal)

Tegyük föl, hogy $b_1, \ldots, b_m$ ortonormált rendszer,
és a v vektor nincs benne a $b_1, \ldots, b_m$ által generált altérben.
Legyen $w = v - \langle b_1, v\rangle b_1 - \ldots - \langle b_m, v\rangle b_m$,
ekkor w ortogonális $b_1, \ldots, b_m$ mindegyikére (HF).
Így ha $b_{m+1} = w/\|w\|$, akkor $b_1, \ldots, b_{m+1}$ ortonormált. $\square$

Állítás

Ha $b_1, \ldots, b_k$ ortonormált bázis, akkor a hozzá tartozó skaláris szorzat ugyanaz, mint a tér eredeti skaláris szorzata.
Vagyis minden skaláris szorzat tényleg bázisból származik.

A Gram–Schmidt-módszer

Gram–Schmidt-ortogonalizáció (Freud, 202. oldal)

Tegyük föl, hogy $b_1, \ldots, b_m$ ortonormált rendszer,
és a v vektor nincs benne a $b_1, \ldots, b_m$ által generált altérben.
Legyen $w = v - \langle b_1, v\rangle b_1 - \ldots - \langle b_m, v\rangle b_m$,
ekkor w ortogonális $b_1, \ldots, b_m$ mindegyikére (HF).
Így ha $b_{m+1} = w/\|w\|$, akkor $b_1, \ldots, b_{m+1}$ ortonormált. $\square$

Állítás

Ha $b_1, \ldots, b_k$ ortonormált bázis, akkor a hozzá tartozó skaláris szorzat ugyanaz, mint a tér eredeti skaláris szorzata. Vagyis minden skaláris szorzat tényleg bázisból származik.

Valóban: ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$,

A Gram–Schmidt-módszer

Gram–Schmidt-ortogonalizáció (Freud, 202. oldal)

Tegyük föl, hogy $b_1, \ldots, b_m$ ortonormált rendszer,
és a v vektor nincs benne a $b_1, \ldots, b_m$ által generált altérben.
Legyen $w = v - \langle b_1, v\rangle b_1 - \ldots - \langle b_m, v\rangle b_m$,
ekkor w ortogonális $b_1, \ldots, b_m$ mindegyikére (HF).
Így ha $b_{m+1} = w/\|w\|$, akkor $b_1, \ldots, b_{m+1}$ ortonormált. □

Állítás

Ha $b_1, \ldots, b_k$ ortonormált bázis, akkor a hozzá tartozó skaláris szorzat ugyanaz, mint a tér eredeti skaláris szorzata.
Vagyis minden skaláris szorzat tényleg bázisból származik.

Valóban: ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$,
akkor $\langle v, w\rangle = \sum_{j,k} \lambda_j \mu_k \langle b_j, b_k\rangle$

A Gram–Schmidt-módszer

Gram–Schmidt-ortogonalizáció (Freud, 202. oldal)

Tegyük föl, hogy $b_1, \ldots, b_m$ ortonormált rendszer,
és a v vektor nincs benne a $b_1, \ldots, b_m$ által generált altérben.
Legyen $w = v - \langle b_1, v\rangle b_1 - \ldots - \langle b_m, v\rangle b_m$,
ekkor w ortogonális $b_1, \ldots, b_m$ mindegyikére (HF).
Így ha $b_{m+1} = w/\|w\|$, akkor $b_1, \ldots, b_{m+1}$ ortonormált. $\square$

Állítás

Ha $b_1, \ldots, b_k$ ortonormált bázis, akkor a hozzá tartozó skaláris szorzat ugyanaz, mint a tér eredeti skaláris szorzata. Vagyis minden skaláris szorzat tényleg bázisból származik.

Valóban: ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$,
akkor $\langle v, w\rangle = \sum_{j,k} \lambda_j \mu_k \langle b_j, b_k\rangle = \sum_j \lambda_j \mu_j$. $\square$

Ortogonális kiegészítő altér

F8.1.6. Definíció

Legyen $H \subseteq V$.

Ortogonális kiegészítő altér

F8.1.6. Definíció

Legyen $H \subseteq V$. Ekkor $H^{\perp}$ jelöli azon vektorok halmazát,

Ortogonális kiegészítő altér

F8.1.6. Definíció

Legyen $H \subseteq V$. Ekkor $H^{\perp}$ jelöli azon vektorok halmazát, amelyek minden H-beli vektorra merőlegesek.

Ortogonális kiegészítő altér

F8.1.6. Definíció

Legyen $H \subseteq V$. Ekkor $H^{\perp}$ jelöli azon vektorok halmazát, amelyek minden H-beli vektorra merőlegesek. Ez altér (HF).

Ortogonális kiegészítő altér

F8.1.6. Definíció

Legyen $H \subseteq V$. Ekkor $H^{\perp}$ jelöli azon vektorok halmazát, amelyek minden H-beli vektorra merőlegesek. Ez altér (HF). Ha H altér, akkor $H^{\perp}$ a H ortogonális kiegészítő altere.

Ortogonális kiegészítő altér

F8.1.6. Definíció

Legyen $H \subseteq V$. Ekkor $H^{\perp}$ jelöli azon vektorok halmazát, amelyek minden H-beli vektorra merőlegesek. Ez altér (HF). Ha H altér, akkor $H^{\perp}$ a H ortogonális kiegészítő altere.

F8.1.7. Tétel

Minden U altérre $V = U \oplus U^{\perp}$.

Ortogonális kiegészítő altér

F8.1.6. Definíció

Legyen $H \subseteq V$. Ekkor $H^{\perp}$ jelöli azon vektorok halmazát, amelyek minden H-beli vektorra merőlegesek. Ez altér (HF). Ha H altér, akkor $H^{\perp}$ a H ortogonális kiegészítő altere.

F8.1.7. Tétel

Minden U altérre $V = U \oplus U^{\perp}$.
Azaz V minden eleme egyértelműen felírható egy U-beli

Ortogonális kiegészítő altér

F8.1.6. Definíció

Legyen $H \subseteq V$. Ekkor $H^\perp$ jelöli azon vektorok halmazát, amelyek minden H-beli vektorra merőlegesek. Ez altér (HF). Ha H altér, akkor $H^\perp$ a H ortogonális kiegészítő altere.

F8.1.7. Tétel

Minden U altérre $V = U \oplus U^\perp$.
Azaz V minden eleme egyértelműen felírható egy U-beli és egy U-ra merőleges vektor összegeként.

Ortogonális kiegészítő altér

F8.1.6. Definíció

Legyen $H \subseteq V$. Ekkor $H^\perp$ jelöli azon vektorok halmazát, amelyek minden H-beli vektorra merőlegesek. Ez altér (HF). Ha H altér, akkor $H^\perp$ a H ortogonális kiegészítő altere.

F8.1.7. Tétel

Minden U altérre $V = U \oplus U^\perp$.
Azaz V minden eleme egyértelműen felírható egy U-beli és egy U-ra merőleges vektor összegeként.

Bizonyítás

Nyilván $v \in U \cap U^\perp$ esetén $\langle v, v \rangle = 0$.

Ortogonális kiegészítő altér

F8.1.6. Definíció

Legyen $H \subseteq V$. Ekkor $H^\perp$ jelöli azon vektorok halmazát, amelyek minden H-beli vektorra merőlegesek. Ez altér (HF). Ha H altér, akkor $H^\perp$ a H ortogonális kiegészítő altere.

F8.1.7. Tétel

Minden U altérre $V = U \oplus U^\perp$.
Azaz V minden eleme egyértelműen felírható egy U-beli és egy U-ra merőleges vektor összegeként.

Bizonyítás

Nyilván $v \in U \cap U^\perp$ esetén $\langle v, v \rangle = 0$.
Innen $v = 0$,

Ortogonális kiegészítő altér

F8.1.6. Definíció

Legyen $H \subseteq V$. Ekkor $H^\perp$ jelöli azon vektorok halmazát, amelyek minden H-beli vektorra merőlegesek. Ez altér (HF). Ha H altér, akkor $H^\perp$ a H ortogonális kiegészítő altere.

F8.1.7. Tétel

Minden U altérre $V = U \oplus U^\perp$.
Azaz V minden eleme egyértelműen felírható egy U-beli és egy U-ra merőleges vektor összegeként.

Bizonyítás

Nyilván $v \in U \cap U^\perp$ esetén $\langle v, v \rangle = 0$.
Innen $v = 0$, tehát $U \cap U^\perp = \{0\}$.

Ortogonális kiegészítő altér

F8.1.6. Definíció

Legyen $H \subseteq V$. Ekkor $H^{\perp}$ jelöli azon vektorok halmazát, amelyek minden H-beli vektorra merőlegesek. Ez altér (HF). Ha H altér, akkor $H^{\perp}$ a H ortogonális kiegészítő altere.

F8.1.7. Tétel

Minden U altérre $V = U \oplus U^{\perp}$.
Azaz V minden eleme egyértelműen felírható egy U-beli és egy U-ra merőleges vektor összegeként.

Bizonyítás

Nyilván $v \in U \cap U^{\perp}$ esetén $\langle v, v \rangle = 0$.
Innen $v = 0$, tehát $U \cap U^{\perp} = \{0\}$. Kell még: $U + U^{\perp} = V$.

Ortogonális kiegészítő altér: bizonyítás

Bizonyítás (folytatás)

Legyen $b_1, \ldots, b_m$ ortonormált bázis U-ban.

Ortogonális kiegészítő altér: bizonyítás

Bizonyítás (folytatás)

Legyen $b_1, \ldots, b_m$ ortonormált bázis U-ban.
Ha $v \in V$, akkor legyen $u = \langle b_1, v\rangle b_1 + \ldots + \langle b_m, v\rangle b_m$.

Ortogonális kiegészítő altér: bizonyítás

Bizonyítás (folytatás)

Legyen $b_1, \ldots, b_m$ ortonormált bázis U-ban.
Ha $v \in V$, akkor legyen $u = \langle b_1, v\rangle b_1 + \ldots + \langle b_m, v\rangle b_m$.
A Gram-Schmidt-eljárásban láttuk, hogy $w = v - u$ merőleges mindegyik b_j-re,

Ortogonális kiegészítő altér: bizonyítás

Bizonyítás (folytatás)

Legyen $b_1, \ldots, b_m$ ortonormált bázis U-ban.
Ha $v \in V$, akkor legyen $u = \langle b_1, v\rangle b_1 + \ldots + \langle b_m, v\rangle b_m$.
A Gram-Schmidt-eljárásban láttuk, hogy $w = v - u$ merőleges mindegyik b_j-re, és ezért az összes lineáris kombinációikra is.

Ortogonális kiegészítő altér: bizonyítás

Bizonyítás (folytatás)

Legyen $b_1, \ldots, b_m$ ortonormált bázis U-ban.
Ha $v \in V$, akkor legyen $u = \langle b_1, v\rangle b_1 + \ldots + \langle b_m, v\rangle b_m$.
A Gram-Schmidt-eljárásban láttuk, hogy $w = v - u$ merőleges mindegyik b_j-re, és ezért az összes lineáris kombinációikra is.
Így $w \in U^\perp$,

Ortogonális kiegészítő altér: bizonyítás

Bizonyítás (folytatás)

Legyen $b_1, \ldots, b_m$ ortonormált bázis U-ban.
Ha $v \in V$, akkor legyen $u = \langle b_1, v\rangle b_1 + \ldots + \langle b_m, v\rangle b_m$.
A Gram-Schmidt-eljárásban láttuk, hogy $w = v - u$ merőleges mindegyik b_j-re, és ezért az összes lineáris kombinációikra is.
Így $w \in U^\perp$, és $u \in U$ miatt $v = u + w$ a kívánt felbontás. $\square$

Ortogonális kiegészítő altér: bizonyítás

Bizonyítás (folytatás)

Legyen $b_1, \ldots, b_m$ ortonormált bázis U-ban.
Ha $v \in V$, akkor legyen $u = \langle b_1, v\rangle b_1 + \ldots + \langle b_m, v\rangle b_m$.
A Gram-Schmidt-eljárásban láttuk, hogy $w = v - u$ merőleges mindegyik b_j-re, és ezért az összes lineáris kombinációikra is.
Így $w \in U^\perp$, és $u \in U$ miatt $v = u + w$ a kívánt felbontás. $\square$

Az u-t a v vektor U-ra vett merőleges vetületének hívjuk.

Ortogonális kiegészítő altér: bizonyítás

Bizonyítás (folytatás)

Legyen $b_1, \ldots, b_m$ ortonormált bázis U-ban.
Ha $v \in V$, akkor legyen $u = \langle b_1, v\rangle b_1 + \ldots + \langle b_m, v\rangle b_m$.
A Gram-Schmidt-eljárásban láttuk, hogy $w = v - u$ merőleges mindegyik b_j-re, és ezért az összes lineáris kombinációikra is.
Így $w \in U^{\perp}$, és $u \in U$ miatt $v = u + w$ a kívánt felbontás. $\square$

Az u-t a v vektor U-ra vett merőleges vetületének hívjuk.
Megjegyzés: Egészítsük ki $b_1, \ldots, b_m$-et a Gram–Schmidt-eljárással V egy $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált bázisává.

Ortogonális kiegészítő altér: bizonyítás

Bizonyítás (folytatás)

Legyen $b_1, \ldots, b_m$ ortonormált bázis U-ban.
Ha $v \in V$, akkor legyen $u = \langle b_1, v\rangle b_1 + \ldots + \langle b_m, v\rangle b_m$.
A Gram-Schmidt-eljárásban láttuk, hogy $w = v - u$ merőleges mindegyik b_j-re, és ezért az összes lineáris kombinációikra is.
Így $w \in U^\perp$, és $u \in U$ miatt $v = u + w$ a kívánt felbontás. $\square$

Az u-t a v vektor U-ra vett merőleges vetületének hívjuk.
Megjegyzés: Egészítsük ki $b_1, \ldots, b_m$-et a Gram–Schmidt-eljárással V egy $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált bázisává.
Ekkor $U^\perp$ a $b_{m+1}, \ldots, b_n$ által generált altér (HF).

Ortogonális kiegészítő altér: bizonyítás

Bizonyítás (folytatás)

Legyen $b_1, \dots, b_m$ ortonormált bázis U-ban.
Ha $v \in V$, akkor legyen $u = \langle b_1, v\rangle b_1 + \dots + \langle b_m, v\rangle b_m$.
A Gram-Schmidt-eljárásban láttuk, hogy $w = v - u$ merőleges mindegyik b_j-re, és ezért az összes lineáris kombinációikra is.
Így $w \in U^\perp$, és $u \in U$ miatt $v = u + w$ a kívánt felbontás. $\square$

Az u-t a v vektor U-ra vett merőleges vetületének hívjuk.
Megjegyzés: Egészítsük ki $b_1, \dots, b_m$-et a Gram–Schmidt-eljárással V egy $b_1, \dots, b_n$ ortonormált bázisává.
Ekkor $U^\perp$ a $b_{m+1}, \dots, b_n$ által generált altér (HF).

F8.1.9. Feladat (HF)

$(U^\perp)^\perp = U$,

Ortogonális kiegészítő altér: bizonyítás

Bizonyítás (folytatás)

Legyen $b_1, \ldots, b_m$ ortonormált bázis U-ban.
Ha $v \in V$, akkor legyen $u = \langle b_1, v\rangle b_1 + \ldots + \langle b_m, v\rangle b_m$.
A Gram-Schmidt-eljárásban láttuk, hogy $w = v - u$ merőleges mindegyik b_j-re, és ezért az összes lineáris kombinációikra is.
Így $w \in U^\perp$, és $u \in U$ miatt $v = u + w$ a kívánt felbontás. $\square$

Az u-t a v vektor U-ra vett merőleges vetületének hívjuk.
Megjegyzés: Egészítsük ki $b_1, \ldots, b_m$-et a Gram–Schmidt-eljárással V egy $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált bázisává.
Ekkor $U^\perp$ a $b_{m+1}, \ldots, b_n$ által generált altér (HF).

F8.1.9. Feladat (HF)

$(U^\perp)^\perp = U$, $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$,

Ortogonális kiegészítő altér: bizonyítás

Bizonyítás (folytatás)

Legyen $b_1, \ldots, b_m$ ortonormált bázis U-ban.
Ha $v \in V$, akkor legyen $u = \langle b_1, v\rangle b_1 + \ldots + \langle b_m, v\rangle b_m$.
A Gram-Schmidt-eljárásban láttuk, hogy $w = v - u$ merőleges mindegyik b_j-re, és ezért az összes lineáris kombinációikra is.
Így $w \in U^\perp$, és $u \in U$ miatt $v = u + w$ a kívánt felbontás. $\square$

Az u-t a v vektor U-ra vett merőleges vetületének hívjuk.
Megjegyzés: Egészítsük ki $b_1, \ldots, b_m$-et a Gram–Schmidt-eljárással V egy $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált bázisává.
Ekkor $U^\perp$ a $b_{m+1}, \ldots, b_n$ által generált altér (HF).

F8.1.9. Feladat (HF)

$(U^\perp)^\perp = U$, $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$, $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$.

Komplex euklideszi tér

Freud, 8.3. szakasz

Legyen V vektortér $\mathbb{C}$ fölött

Komplex euklideszi tér

Freud, 8.3. szakasz

Legyen V vektortér $\mathbb{C}$ fölött és $b_1, \dots, b_n$ bázis V-ben.

Komplex euklideszi tér

Freud, 8.3. szakasz

Legyen V vektortér $\mathbb{C}$ fölött és $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben.
Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$,

Komplex euklideszi tér

Freud, 8.3. szakasz

Legyen V vektortér $\mathbb{C}$ fölött és $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben.
Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$, akkor
$\langle v, w \rangle = \overline{\lambda_1}\mu_1 + \ldots + \overline{\lambda_n}\mu_n$

Komplex euklideszi tér

Freud, 8.3. szakasz

Legyen V vektortér $\mathbb{C}$ fölött és $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben.
Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$, akkor
$\langle v, w \rangle = \overline{\lambda_1}\mu_1 + \ldots + \overline{\lambda_n}\mu_n$ e bázishoz tartozó skaláris szorzat.

Komplex euklideszi tér

Freud, 8.3. szakasz

Legyen V vektortér $\mathbb{C}$ fölött és $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben.
Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$, akkor
$\langle v, w \rangle = \overline{\lambda_1} \mu_1 + \ldots + \overline{\lambda_n} \mu_n$ e bázishoz tartozó skaláris szorzat.
A kétváltozós $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{C}$ függvény skaláris szorzat,

Komplex euklideszi tér

Freud, 8.3. szakasz

Legyen V vektortér $\mathbb{C}$ fölött és $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben.
Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$, akkor
$\langle v, w \rangle = \overline{\lambda_1}\mu_1 + \ldots + \overline{\lambda_n}\mu_n$ e bázishoz tartozó skaláris szorzat.
A kétváltozós $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{C}$ függvény skaláris szorzat,
ha tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda \in \mathbb{C}$ esetén

Komplex euklideszi tér

Freud, 8.3. szakasz

Legyen V vektortér $\mathbb{C}$ fölött és $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben.
Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$, akkor $\langle v, w \rangle = \overline{\lambda_1}\mu_1 + \ldots + \overline{\lambda_n}\mu_n$ e bázishoz tartozó skaláris szorzat.
A kétváltozós $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{C}$ függvény skaláris szorzat, ha tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda \in \mathbb{C}$ esetén

(1) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$.

Komplex euklideszi tér

Freud, 8.3. szakasz

Legyen V vektortér $\mathbb{C}$ fölött és $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben.
Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$, akkor
$\langle v, w \rangle = \overline{\lambda_1}\mu_1 + \ldots + \overline{\lambda_n}\mu_n$ e bázishoz tartozó skaláris szorzat.
A kétváltozós $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{C}$ függvény skaláris szorzat, ha tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda \in \mathbb{C}$ esetén

(1) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$.

(2) $\langle \lambda v, w \rangle = \overline{\lambda} \langle v, w \rangle$.

Komplex euklideszi tér

Freud, 8.3. szakasz

Legyen V vektortér $\mathbb{C}$ fölött és $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben.
Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$, akkor $\langle v, w\rangle = \overline{\lambda_1}\mu_1 + \ldots + \overline{\lambda_n}\mu_n$ e bázishoz tartozó skaláris szorzat.
A kétváltozós $(v, w) \mapsto \langle v, w\rangle \in \mathbb{C}$ függvény skaláris szorzat, ha tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda \in \mathbb{C}$ esetén

(1) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$.

(2) $\langle \lambda v, w\rangle = \overline{\lambda}\langle v, w\rangle$.

(3) $\langle w, u + v\rangle = \langle w, u\rangle + \langle w, v\rangle$.

Komplex euklideszi tér

Freud, 8.3. szakasz

Legyen V vektortér $\mathbb{C}$ fölött és $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben.
Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$, akkor
$\langle v, w\rangle = \overline{\lambda_1}\mu_1 + \ldots + \overline{\lambda_n}\mu_n$ e bázishoz tartozó skaláris szorzat.
A kétváltozós $(v, w) \mapsto \langle v, w\rangle \in \mathbb{C}$ függvény skaláris szorzat, ha tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda \in \mathbb{C}$ esetén

(1) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$.

(2) $\langle \lambda v, w\rangle = \overline{\lambda}\langle v, w\rangle$.

(3) $\langle w, u + v\rangle = \langle w, u\rangle + \langle w, v\rangle$.

(4) $\langle w, \lambda v\rangle = \lambda\langle w, v\rangle$.

Komplex euklideszi tér

Freud, 8.3. szakasz

Legyen V vektortér $\mathbb{C}$ fölött és $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben.
Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$, akkor
$\langle v, w\rangle = \overline{\lambda_1}\mu_1 + \ldots + \overline{\lambda_n}\mu_n$ e bázishoz tartozó skaláris szorzat.
A kétváltozós $(v, w) \mapsto \langle v, w\rangle \in \mathbb{C}$ függvény skaláris szorzat, ha tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda \in \mathbb{C}$ esetén

(1) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$.

(2) $\langle \lambda v, w\rangle = \overline{\lambda}\langle v, w\rangle$.

(3) $\langle w, u + v\rangle = \langle w, u\rangle + \langle w, v\rangle$.

(4) $\langle w, \lambda v\rangle = \lambda\langle w, v\rangle$.

(5) $\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}$

Komplex euklideszi tér

Freud, 8.3. szakasz

Legyen V vektortér $\mathbb{C}$ fölött és $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben.
Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$, akkor
$\langle v, w \rangle = \overline{\lambda_1}\mu_1 + \ldots + \overline{\lambda_n}\mu_n$ e bázishoz tartozó skaláris szorzat.
A kétváltozós $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{C}$ függvény skaláris szorzat, ha tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda \in \mathbb{C}$ esetén

(1) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$.

(2) $\langle \lambda v, w \rangle = \overline{\lambda} \langle v, w \rangle$.

(3) $\langle w, u + v \rangle = \langle w, u \rangle + \langle w, v \rangle$.

(4) $\langle w, \lambda v \rangle = \lambda \langle w, v \rangle$.

(5) $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$ (Hermite-féle).

Komplex euklideszi tér

Freud, 8.3. szakasz

Legyen V vektortér $\mathbb{C}$ fölött és $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben.
Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$, akkor $\langle v, w \rangle = \overline{\lambda_1}\mu_1 + \ldots + \overline{\lambda_n}\mu_n$ e bázishoz tartozó skaláris szorzat.
A kétváltozós $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{C}$ függvény skaláris szorzat, ha tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda \in \mathbb{C}$ esetén

(1) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$.

(2) $\langle \lambda v, w \rangle = \overline{\lambda} \langle v, w \rangle$.

(3) $\langle w, u + v \rangle = \langle w, u \rangle + \langle w, v \rangle$.

(4) $\langle w, \lambda v \rangle = \lambda \langle w, v \rangle$.

(5) $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$ (Hermite-féle).

(6) $\langle v, v \rangle \geq 0$

Komplex euklideszi tér

Freud, 8.3. szakasz

Legyen V vektortér $\mathbb{C}$ fölött és $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben.
Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$, akkor
$\langle v, w \rangle = \overline{\lambda_1}\mu_1 + \ldots + \overline{\lambda_n}\mu_n$ e bázishoz tartozó skaláris szorzat.
A kétváltozós $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{C}$ függvény skaláris szorzat, ha tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda \in \mathbb{C}$ esetén

(1) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$.

(2) $\langle \lambda v, w \rangle = \overline{\lambda} \langle v, w \rangle$.

(3) $\langle w, u + v \rangle = \langle w, u \rangle + \langle w, v \rangle$.

(4) $\langle w, \lambda v \rangle = \lambda \langle w, v \rangle$.

(5) $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$ (Hermite-féle).

(6) $\langle v, v \rangle \geq 0$ és $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$

Komplex euklideszi tér

Freud, 8.3. szakasz

Legyen V vektortér $\mathbb{C}$ fölött és $b_1, \dots, b_n$ bázis V-ben.
Ha $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \dots + \mu_n b_n$, akkor
$\langle v, w \rangle = \overline{\lambda_1}\mu_1 + \dots + \overline{\lambda_n}\mu_n$ e bázishoz tartozó skaláris szorzat.
A kétváltozós $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{C}$ függvény skaláris szorzat, ha tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda \in \mathbb{C}$ esetén

(1) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$.

(2) $\langle \lambda v, w \rangle = \overline{\lambda} \langle v, w \rangle$.

(3) $\langle w, u + v \rangle = \langle w, u \rangle + \langle w, v \rangle$.

(4) $\langle w, \lambda v \rangle = \lambda \langle w, v \rangle$.

(5) $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$ (Hermite-féle).

(6) $\langle v, v \rangle \geq 0$ és $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$ (pozitív definit).

Komplex euklideszi tér

Freud, 8.3. szakasz

Legyen V vektortér $\mathbb{C}$ fölött és $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben.
Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$, akkor
$\langle v, w \rangle = \overline{\lambda_1}\mu_1 + \ldots + \overline{\lambda_n}\mu_n$ e bázishoz tartozó skaláris szorzat.
A kétváltozós $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{C}$ függvény skaláris szorzat, ha tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda \in \mathbb{C}$ esetén

(1) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$.

(2) $\langle \lambda v, w \rangle = \overline{\lambda} \langle v, w \rangle$.

(3) $\langle w, u + v \rangle = \langle w, u \rangle + \langle w, v \rangle$.

(4) $\langle w, \lambda v \rangle = \lambda \langle w, v \rangle$.

(5) $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$ (Hermite-féle).

(6) $\langle v, v \rangle \geq 0$ és $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$ (pozitív definit).

Szöget nem definiálunk.

Komplex euklideszi tér

Freud, 8.3. szakasz

Legyen V vektortér $\mathbb{C}$ fölött és $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben.
Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$, akkor
$\langle v, w \rangle = \overline{\lambda_1}\mu_1 + \ldots + \overline{\lambda_n}\mu_n$ e bázishoz tartozó skaláris szorzat.
A kétváltozós $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{C}$ függvény skaláris szorzat, ha tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda \in \mathbb{C}$ esetén

(1) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$.

(2) $\langle \lambda v, w \rangle = \overline{\lambda} \langle v, w \rangle$.

(3) $\langle w, u + v \rangle = \langle w, u \rangle + \langle w, v \rangle$.

(4) $\langle w, \lambda v \rangle = \lambda \langle w, v \rangle$.

(5) $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$ (Hermite-féle).

(6) $\langle v, v \rangle \geq 0$ és $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$ (pozitív definit).

Szöget nem definiálunk. A többi eddigi működik $\mathbb{C}$ fölött is.