# Algebra3, elemző szakirány

ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Előadó: Kiss Emil
ewkiss@cs.elte.hu

1. előadás

# A félév anyaga

- Gyűrűk és testek

# A félév anyaga

- Gyűrűk és testek
  - Ideál, faktorgyűrű, főideálgyűrű

# A félév anyaga

- Gyűrűk és testek
  - Ideál, faktorgyűrű, főideálgyűrű
  - Gauss-egészek, két négyzetszám tétel

# A félév anyaga

- Gyűrűk és testek
  - Ideál, faktorgyűrű, főideálgyűrű
  - Gauss-egészek, két négyzetszám tétel
  - Az alaptételes gyűrűk jellemzése

# A félév anyaga

- Gyűrűk és testek
  - Ideál, faktorgyűrű, főideálgyűrű
  - Gauss-egészek, két négyzetszám tétel
  - Az alaptételes gyűrűk jellemzése
  - A számfogalom lezárása

# A félév anyaga

- Gyűrűk és testek
  - Ideál, faktorgyűrű, főideálgyűrű
  - Gauss-egészek, két négyzetszám tétel
  - Az alaptételes gyűrűk jellemzése
  - A számfogalom lezárása
  - Algebrai és transzcendens számok

# A félév anyaga

- Gyűrűk és testek
  - Ideál, faktorgyűrű, főideálgyűrű
  - Gauss-egészek, két négyzetszám tétel
  - Az alaptételes gyűrűk jellemzése
  - A számfogalom lezárása
  - Algebrai és transzcendens számok
  - Testbővítések, testek konstrukciója

# A félév anyaga

- Gyűrűk és testek
  - Ideál, faktorgyűrű, főideálgyűrű
  - Gauss-egészek, két négyzetszám tétel
  - Az alaptételes gyűrűk jellemzése
  - A számfogalom lezárása
  - Algebrai és transzcendens számok
  - Testbővítések, testek konstrukciója
  - Geometriai szerkeszthetőség, algebrai egyenletek

# A félév anyaga

- Gyűrűk és testek
  - Ideál, faktorgyűrű, főideálgyűrű
  - Gauss-egészek, két négyzetszám tétel
  - Az alaptételes gyűrűk jellemzése
  - A számfogalom lezárása
  - Algebrai és transzcendens számok
  - Testbővítések, testek konstrukciója
  - Geometriai szerkeszthetőség, algebrai egyenletek
  - Véges testek, kódelmélet

# A félév anyaga

- Gyűrűk és testek
  - Ideál, faktorgyűrű, főideálgyűrű
  - Gauss-egészek, két négyzetszám tétel
  - Az alaptételes gyűrűk jellemzése
  - A számfogalom lezárása
  - Algebrai és transzcendens számok
  - Testbővítések, testek konstrukciója
  - Geometriai szerkeszthetőség, algebrai egyenletek
  - Véges testek, kódelmélet
- Lineáris algebra

# A félév anyaga

- Gyűrűk és testek
  - Ideál, faktorgyűrű, főideálgyűrű
  - Gauss-egészek, két négyzetszám tétel
  - Az alaptételes gyűrűk jellemzése
  - A számfogalom lezárása
  - Algebrai és transzcendens számok
  - Testbővítések, testek konstrukciója
  - Geometriai szerkeszthetőség, algebrai egyenletek
  - Véges testek, kódelmélet
- Lineáris algebra
  - Kvadratikus alak négyzetösszeg alakja

# A félév anyaga

- Gyűrűk és testek
  - Ideál, faktorgyűrű, főideálgyűrű
  - Gauss-egészek, két négyzetszám tétel
  - Az alaptételes gyűrűk jellemzése
  - A számfogalom lezárása
  - Algebrai és transzcendens számok
  - Testbővítések, testek konstrukciója
  - Geometriai szerkeszthetőség, algebrai egyenletek
  - Véges testek, kódelmélet
- Lineáris algebra
  - Kvadratikus alak négyzetösszeg alakja
  - Euklideszi terek: merőlegesség és skaláris szorzat

# A félév anyaga

- Gyűrűk és testek
  - Ideál, faktorgyűrű, főideálgyűrű
  - Gauss-egészek, két négyzetszám tétel
  - Az alaptételes gyűrűk jellemzése
  - A számfogalom lezárása
  - Algebrai és transzcendens számok
  - Testbővítések, testek konstrukciója
  - Geometriai szerkeszthetőség, algebrai egyenletek
  - Véges testek, kódelmélet
- Lineáris algebra
  - Kvadratikus alak négyzetösszeg alakja
  - Euklideszi terek: merőlegesség és skaláris szorzat
  - Egybevágósági transzformációk valós és komplex fölött

# A félév anyaga

- Gyűrűk és testek
  - Ideál, faktorgyűrű, főideálgyűrű
  - Gauss-egészek, két négyzetszám tétel
  - Az alaptételes gyűrűk jellemzése
  - A számfogalom lezárása
  - Algebrai és transzcendens számok
  - Testbővítések, testek konstrukciója
  - Geometriai szerkeszthetőség, algebrai egyenletek
  - Véges testek, kódelmélet
- Lineáris algebra
  - Kvadratikus alak négyzetösszeg alakja
  - Euklideszi terek: merőlegesség és skaláris szorzat
  - Egybevágósági transzformációk valós és komplex fölött
  - Diagonalizálhatóság ortonormált bázisban

# A félév anyaga

- Gyűrűk és testek
  - Ideál, faktorgyűrű, főideálgyűrű
  - Gauss-egészek, két négyzetszám tétel
  - Az alaptételes gyűrűk jellemzése
  - A számfogalom lezárása
  - Algebrai és transzcendens számok
  - Testbővítések, testek konstrukciója
  - Geometriai szerkeszthetőség, algebrai egyenletek
  - Véges testek, kódelmélet
- Lineáris algebra
  - Kvadratikus alak négyzetösszeg alakja
  - Euklideszi terek: merőlegesség és skaláris szorzat
  - Egybevágósági transzformációk valós és komplex fölött
  - Diagonalizálhatóság ortonormált bázisban
  - Polinommátrixok, a Jordan-alak kiszámítása

# Irodalom

- http://www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/

# Irodalom

- http://www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/
  - Az előadáson látott prezentáció, és nyomtatható változata

# Irodalom

- `http://www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/`
  - Az előadáson látott prezentáció, és nyomtatható változata
  - A gyakorlatokon szereplő feladatsorok

# Irodalom

- http://www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/
  - Az előadáson látott prezentáció, és nyomtatható változata
  - A gyakorlatokon szereplő feladatsorok
  - Információk a vizsgákról, zárthelyikről

# Irodalom

- http://www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/
  - Az előadáson látott prezentáció, és nyomtatható változata
  - A gyakorlatokon szereplő feladatsorok
  - Információk a vizsgákról, zárthelyikről
  - Tematikák, oktatási anyagok, ajánlott irodalom

# Irodalom

- `http://www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/`
  - Az előadáson látott prezentáció, és nyomtatható változata
  - A gyakorlatokon szereplő feladatsorok
  - Információk a vizsgákról, zárthelyikről
  - Tematikák, oktatási anyagok, ajánlott irodalom
- Kiss Emil: Bevezetés az algebrába

# Irodalom

- `http://www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/`
    - Az előadáson látott prezentáció, és nyomtatható változata
    - A gyakorlatokon szereplő feladatsorok
    - Információk a vizsgákról, zárthelyikről
    - Tematikák, oktatási anyagok, ajánlott irodalom
- Kiss Emil: Bevezetés az algebrába
    - Gyűrűk és testek

# Irodalom

- http://www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/
  - Az előadáson látott prezentáció, és nyomtatható változata
  - A gyakorlatokon szereplő feladatsorok
  - Információk a vizsgákról, zárthelyikről
  - Tematikák, oktatási anyagok, ajánlott irodalom
- Kiss Emil: Bevezetés az algebrába
  - Gyűrűk és testek
  - Polinommátrixok, Jordan-alak

# Irodalom

- `http://www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/`
  - Az előadáson látott prezentáció, és nyomtatható változata
  - A gyakorlatokon szereplő feladatsorok
  - Információk a vizsgákról, zárthelyikről
  - Tematikák, oktatási anyagok, ajánlott irodalom
- Kiss Emil: Bevezetés az algebrába
  - Gyűrűk és testek
  - Polinommátrixok, Jordan-alak
  - A gyakorlatokon szereplő feladatok megoldásai

# Irodalom

- `http://www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/`
  - Az előadáson látott prezentáció, és nyomtatható változata
  - A gyakorlatokon szereplő feladatsorok
  - Információk a vizsgákról, zárthelyikről
  - Tematikák, oktatási anyagok, ajánlott irodalom
- Kiss Emil: Bevezetés az algebrába
  - Gyűrűk és testek
  - Polinommátrixok, Jordan-alak
  - A gyakorlatokon szereplő feladatok megoldásai
- Freud Róbert: Lineáris algebra

# Irodalom

- `http://www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/`
  - Az előadáson látott prezentáció, és nyomtatható változata
  - A gyakorlatokon szereplő feladatsorok
  - Információk a vizsgákról, zárthelyikről
  - Tematikák, oktatási anyagok, ajánlott irodalom
- Kiss Emil: Bevezetés az algebrába
  - Gyűrűk és testek
  - Polinommátrixok, Jordan-alak
  - A gyakorlatokon szereplő feladatok megoldásai
- Freud Róbert: Lineáris algebra
  - A félév lineáris algebra anyaga

# Irodalom

- `http://www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/`
    - Az előadáson látott prezentáció, és nyomtatható változata
    - A gyakorlatokon szereplő feladatsorok
    - Információk a vizsgákról, zárthelyikről
    - Tematikák, oktatási anyagok, ajánlott irodalom
- Kiss Emil: Bevezetés az algebrába
    - Gyűrűk és testek
    - Polinommátrixok, Jordan-alak
    - A gyakorlatokon szereplő feladatok megoldásai
- Freud Róbert: Lineáris algebra
    - A félév lineáris algebra anyaga
    - Feladatok megoldásokkal

# Irodalom

- `http://www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/`
  - Az előadáson látott prezentáció, és nyomtatható változata
  - A gyakorlatokon szereplő feladatsorok
  - Információk a vizsgákról, zárthelyikről
  - Tematikák, oktatási anyagok, ajánlott irodalom
- Kiss Emil: Bevezetés az algebrába
  - Gyűrűk és testek
  - Polinommátrixok, Jordan-alak
  - A gyakorlatokon szereplő feladatok megoldásai
- Freud Róbert: Lineáris algebra
  - A félév lineáris algebra anyaga
  - Feladatok megoldásokkal
- Freud-Gyarmati: Számelmélet

# Irodalom

- http://www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/
  - Az előadáson látott prezentáció, és nyomtatható változata
  - A gyakorlatokon szereplő feladatsorok
  - Információk a vizsgákról, zárthelyikről
  - Tematikák, oktatási anyagok, ajánlott irodalom
- Kiss Emil: Bevezetés az algebrába
  - Gyűrűk és testek
  - Polinommátrixok, Jordan-alak
  - A gyakorlatokon szereplő feladatok megoldásai
- Freud Róbert: Lineáris algebra
  - A félév lineáris algebra anyaga
  - Feladatok megoldásokkal
- Freud-Gyarmati: Számelmélet
  - Gauss-egészek, két négyzetszám tétel, ideálok

# Irodalom

- http://www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/
  - Az előadáson látott prezentáció, és nyomtatható változata
  - A gyakorlatokon szereplő feladatsorok
  - Információk a vizsgákról, zárthelyikről
  - Tematikák, oktatási anyagok, ajánlott irodalom
- Kiss Emil: Bevezetés az algebrába
  - Gyűrűk és testek
  - Polinommátrixok, Jordan-alak
  - A gyakorlatokon szereplő feladatok megoldásai
- Freud Róbert: Lineáris algebra
  - A félév lineáris algebra anyaga
  - Feladatok megoldásokkal
- Freud-Gyarmati: Számelmélet
  - Gauss-egészek, két négyzetszám tétel, ideálok
- Czédli-Szendrei-Szendrei: Absztrakt algebrai feladatok

# A számonkérés módja

- A gyakorlati jegy:

# A számonkérés módja

- A gyakorlati jegy:
  - Csak három hiányzás megengedett.

# A számonkérés módja

- A gyakorlati jegy:
  - Csak három hiányzás megengedett.
  - Két évfolyamzárthelyi: 50 – 50%,
    az előadás idejében: okt. 17. és dec. 12.

# A számonkérés módja

- A gyakorlati jegy:
  - Csak három hiányzás megengedett.
  - Két évfolyamzárthelyi: 50 – 50%,
    az előadás idejében: okt. 17. és dec. 12.
    - az elégtelen zárthelyiket ki kell javítani;

# A számonkérés módja

- A gyakorlati jegy:
  - Csak három hiányzás megengedett.
  - Két évfolyamzárthelyi: 50 – 50%,
    az előadás idejében: okt. 17. és dec. 12.
    - az elégtelen zárthelyiket ki kell javítani;
    - javító a félév végén, a gyakorlatvezető döntése alapján;

# A számonkérés módja

- A gyakorlati jegy:
  - Csak három hiányzás megengedett.
  - Két évfolyamzárthelyi: 50 – 50%,
    az előadás idejében: okt. 17. és dec. 12.
    - az elégtelen zárthelyiket ki kell javítani;
    - javító a félév végén, a gyakorlatvezető döntése alapján;
    - Ha nem sikerül: gyakorlati jegy utóvizsga.

# A számonkérés módja

- A gyakorlati jegy:
  - Csak három hiányzás megengedett.
  - Két évfolyamzárthelyi: 50 – 50%,
    az előadás idejében: okt. 17. és dec. 12.
    - az elégtelen zárthelyiket ki kell javítani;
    - javító a félév végén, a gyakorlatvezető döntése alapján;
    - Ha nem sikerül: gyakorlati jegy utóvizsga.
- A vizsgajegy:

# A számonkérés módja

- A gyakorlati jegy:
  - Csak három hiányzás megengedett.
  - Két évfolyamzárthelyi: 50 – 50%,
    az előadás idejében: okt. 17. és dec. 12.
    - az elégtelen zárthelyiket ki kell javítani;
    - javító a félév végén, a gyakorlatvezető döntése alapján;
    - Ha nem sikerül: gyakorlati jegy utóvizsga.
- A vizsgajegy:
  - Csak érvényes gyakorlati jeggyel lehet vizsgázni.

# A számonkérés módja

- A gyakorlati jegy:
  - Csak három hiányzás megengedett.
  - Két évfolyamzárthelyi: 50 – 50%,
    az előadás idejében: okt. 17. és dec. 12.
    - az elégtelen zárthelyiket ki kell javítani;
    - javító a félév végén, a gyakorlatvezető döntése alapján;
    - Ha nem sikerül: gyakorlati jegy utóvizsga.
- A vizsgajegy:
  - Csak érvényes gyakorlati jeggyel lehet vizsgázni.
  - Szóbeli vizsga, az anyag megértését is méri!

# A számonkérés módja

- A gyakorlati jegy:
  - Csak három hiányzás megengedett.
  - Két évfolyamzárthelyi: 50 – 50%,
    az előadás idejében: okt. 17. és dec. 12.
    - az elégtelen zárthelyiket ki kell javítani;
    - javító a félév végén, a gyakorlatvezető döntése alapján;
    - Ha nem sikerül: gyakorlati jegy utóvizsga.
- A vizsgajegy:
  - Csak érvényes gyakorlati jeggyel lehet vizsgázni.
  - Szóbeli vizsga, az anyag megértését is méri!
    - Mindenki két tételt húz:

# A számonkérés módja

- A gyakorlati jegy:
  - Csak három hiányzás megengedett.
  - Két évfolyamzárthelyi: 50 – 50%,
    az előadás idejében: okt. 17. és dec. 12.
    - az elégtelen zárthelyiket ki kell javítani;
    - javító a félév végén, a gyakorlatvezető döntése alapján;
    - Ha nem sikerül: gyakorlati jegy utóvizsga.
- A vizsgajegy:
  - Csak érvényes gyakorlati jeggyel lehet vizsgázni.
  - Szóbeli vizsga, az anyag megértését is méri!
    - Mindenki két tételt húz:
    - az első egy konkrét bizonyítás;

# A számonkérés módja

- A gyakorlati jegy:
  - Csak három hiányzás megengedett.
  - Két évfolyamzárthelyi: 50 – 50%,
    az előadás idejében: okt. 17. és dec. 12.
    - az elégtelen zárthelyiket ki kell javítani;
    - javító a félév végén, a gyakorlatvezető döntése alapján;
    - Ha nem sikerül: gyakorlati jegy utóvizsga.
- A vizsgajegy:
  - Csak érvényes gyakorlati jeggyel lehet vizsgázni.
  - Szóbeli vizsga, az anyag megértését is méri!
    - Mindenki két tételt húz:
    - az első egy konkrét bizonyítás;
    - a második egy téma a félévből, ahol ki kell mondani (és alkalmazni tudni) a tételeket és a definíciókat.

# A számonkérés módja

- A gyakorlati jegy:
  - Csak három hiányzás megengedett.
  - Két évfolyamzárthelyi: 50 – 50%,
    az előadás idejében: okt. 17. és dec. 12.
    - az elégtelen zárthelyiket ki kell javítani;
    - javító a félév végén, a gyakorlatvezető döntése alapján;
    - Ha nem sikerül: gyakorlati jegy utóvizsga.
- A vizsgajegy:
  - Csak érvényes gyakorlati jeggyel lehet vizsgázni.
  - Szóbeli vizsga, az anyag megértését is méri!
    - Mindenki két tételt húz:
    - az első egy konkrét bizonyítás;
    - a második egy téma a félévből, ahol ki kell mondani (és alkalmazni tudni) a tételeket és a definíciókat.
    - Bármelyik tétel nemtudása esetén a vizsga elégtelen.

# Izomorfizmus és homomorfizmus

## Definíció

Legyenek $R$ és $S$ gyűrűk.

# Izomorfizmus és homomorfizmus

## Definíció

Legyenek $R$ és $S$ gyűrűk.
Az $R$ összeadása $+_R$, szorzása $*_R$.

# Izomorfizmus és homomorfizmus

## Definíció

Legyenek $R$ és $S$ gyűrűk.
Az $R$ összeadása $+_R$, szorzása $*_R$.
Az $S$ összeadása $+_S$, szorzása $*_S$.

# Izomorfizmus és homomorfizmus

## Definíció

Legyenek $R$ és $S$ gyűrűk.
Az $R$ összeadása $+_R$, szorzása $*_R$.
Az $S$ összeadása $+_S$, szorzása $*_S$.
A $\psi : R \to S$ leképezés gyűrűhomomorfizmus,
ha az összeadást és a szorzást is tartja:

# Izomorfizmus és homomorfizmus

## Definíció

Legyenek $R$ és $S$ gyűrűk.
Az $R$ összeadása $+_R$, szorzása $*_R$.
Az $S$ összeadása $+_S$, szorzása $*_S$.
A $\psi : R \to S$ leképezés gyűrűhomomorfizmus,
ha az összeadást és a szorzást is tartja:
$\psi(a +_R b) = \psi(a) +_S \psi(b)$ minden $a, b \in R$-re,

# Izomorfizmus és homomorfizmus

## Definíció

Legyenek $R$ és $S$ gyűrűk.
Az $R$ összeadása $+_R$, szorzása $*_R$.
Az $S$ összeadása $+_S$, szorzása $*_S$.
A $\psi : R \to S$ leképezés gyűrűhomomorfizmus,
ha az összeadást és a szorzást is tartja:
$\psi(a +_R b) = \psi(a) +_S \psi(b)$ minden $a, b \in R$-re,
$\psi(a *_R b) = \psi(a) *_S \psi(b)$ minden $a, b \in R$-re.

# Izomorfizmus és homomorfizmus

## Definíció

Legyenek $R$ és $S$ gyűrűk.
Az $R$ összeadása $+_R$, szorzása $*_R$.
Az $S$ összeadása $+_S$, szorzása $*_S$.
A $\psi : R \to S$ leképezés gyűrűhomomorfizmus,
ha az összeadást és a szorzást is tartja:
$\psi(a +_R b) = \psi(a) +_S \psi(b)$ minden $a, b \in R$-re,
$\psi(a *_R b) = \psi(a) *_S \psi(b)$ minden $a, b \in R$-re.
Ha $\psi$ kölcsönösen egyértelmű is, akkor $\psi$ izomorfizmus.

# Izomorfizmus és homomorfizmus

## Definíció

Legyenek $R$ és $S$ gyűrűk.
Az $R$ összeadása $+_R$, szorzása $*_R$.
Az $S$ összeadása $+_S$, szorzása $*_S$.
A $\psi : R \to S$ leképezés gyűrűhomomorfizmus,
ha az összeadást és a szorzást is tartja:
$\psi(a +_R b) = \psi(a) +_S \psi(b)$ minden $a, b \in R$-re,
$\psi(a *_R b) = \psi(a) *_S \psi(b)$ minden $a, b \in R$-re.
Ha $\psi$ kölcsönösen egyértelmű is, akkor $\psi$ izomorfizmus.

## Homomorfizmusok, amik nem izomorfizmusok

# Izomorfizmus és homomorfizmus

## Definíció

Legyenek $R$ és $S$ gyűrűk.
Az $R$ összeadása $+_R$, szorzása $*_R$.
Az $S$ összeadása $+_S$, szorzása $*_S$.
A $\psi : R \to S$ leképezés gyűrűhomomorfizmus,
ha az összeadást és a szorzást is tartja:
$\psi(a +_R b) = \psi(a) +_S \psi(b)$ minden $a, b \in R$-re,
$\psi(a *_R b) = \psi(a) *_S \psi(b)$ minden $a, b \in R$-re.
Ha $\psi$ kölcsönösen egyértelmű is, akkor $\psi$ izomorfizmus.

## Homomorfizmusok, amik nem izomorfizmusok

(1) $R = \mathbb{Z}$, $S = \mathbb{Z}_n$, $\varphi(k) = k$ maradéka mod $n$.

# Izomorfizmus és homomorfizmus

## Definíció

Legyenek $R$ és $S$ gyűrűk.
Az $R$ összeadása $+_R$, szorzása $*_R$.
Az $S$ összeadása $+_S$, szorzása $*_S$.
A $\psi : R \to S$ leképezés gyűrűhomomorfizmus,
ha az összeadást és a szorzást is tartja:
$\psi(a +_R b) = \psi(a) +_S \psi(b)$ minden $a, b \in R$-re,
$\psi(a *_R b) = \psi(a) *_S \psi(b)$ minden $a, b \in R$-re.
Ha $\psi$ kölcsönösen egyértelmű is, akkor $\psi$ izomorfizmus.

## Homomorfizmusok, amik nem izomorfizmusok

(1) $R = \mathbb{Z}$, $S = \mathbb{Z}_n$, $\varphi(k) = k$ maradéka mod $n$.

(2) $R = \mathbb{R}[x]$, $S = \mathbb{C}$, $\varphi(f) = f(i)$ ($\varphi$ az $i$ behelyettesítése).

# Elemi tulajdonságok

## Láttuk korábban (2.2.44. Feladat)

Legyen $\varphi : G \to H$ csoporthomomorfizmus.

# Elemi tulajdonságok

## Láttuk korábban (2.2.44. Feladat)

Legyen $\varphi : G \to H$ csoporthomomorfizmus. Ekkor $\varphi$ az egységelemet az egységelembe viszi,

# Elemi tulajdonságok

## Láttuk korábban (2.2.44. Feladat)

Legyen $\varphi : G \to H$ csoporthomomorfizmus. Ekkor $\varphi$ az egységelemet az egységelembe viszi, és inverz képe a kép inverze lesz

# Elemi tulajdonságok

**Láttuk korábban (2.2.44. Feladat)**

Legyen $\varphi : G \to H$ csoporthomomorfizmus. Ekkor $\varphi$ az egységelemet az egységelembe viszi, és inverz képe a kép inverze lesz (azaz $\varphi$ az inverzképzés műveletét is tartja).

# Elemi tulajdonságok

### Láttuk korábban (2.2.44. Feladat)

Legyen $\varphi : G \to H$ csoporthomomorfizmus. Ekkor $\varphi$ az egységelemet az egységelembe viszi, és inverz képe a kép inverze lesz (azaz $\varphi$ az inverzképzés műveletét is tartja).

### Következmény

Ha $\varphi : R \to S$ gyűrűhomomorfizmus, akkor $R$ nullelemét $S$ nullelemébe viszi,

# Elemi tulajdonságok

## Láttuk korábban (2.2.44. Feladat)

Legyen $\varphi : G \to H$ csoporthomomorfizmus. Ekkor $\varphi$ az egységelemet az egységelembe viszi, és inverz képe a kép inverze lesz (azaz $\varphi$ az inverzképzés műveletét is tartja).

## Következmény

Ha $\varphi : R \to S$ gyűrűhomomorfizmus, akkor $R$ nullelemét $S$ nullelemébe viszi, azaz $\varphi(0) = 0$,

# Elemi tulajdonságok

## Láttuk korábban (2.2.44. Feladat)

Legyen $\varphi : G \to H$ csoporthomomorfizmus. Ekkor $\varphi$ az egységelemet az egységelembe viszi, és inverz képe a kép inverze lesz (azaz $\varphi$ az inverzképzés műveletét is tartja).

## Következmény

Ha $\varphi : R \to S$ gyűrűhomomorfizmus, akkor $R$ nullelemét $S$ nullelemébe viszi, azaz $\varphi(0) = 0$, továbbá $\varphi(-r) = -\varphi(r)$.

# Elemi tulajdonságok

## Láttuk korábban (2.2.44. Feladat)

Legyen $\varphi : G \to H$ csoporthomomorfizmus. Ekkor $\varphi$ az egységelemet az egységelembe viszi, és inverz képe a kép inverze lesz (azaz $\varphi$ az inverzképzés műveletét is tartja).

## Következmény

Ha $\varphi : R \to S$ gyűrűhomomorfizmus, akkor $R$ nullelemét $S$ nullelemébe viszi, azaz $\varphi(0) = 0$, továbbá $\varphi(-r) = -\varphi(r)$.

## Példa (5.1.20. Gyakorlat)

$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, $\varphi(r) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ gyűrűhomomorfizmus,

# Elemi tulajdonságok

## Láttuk korábban (2.2.44. Feladat)

Legyen $\varphi : G \to H$ csoporthomomorfizmus. Ekkor $\varphi$ az egységelemet az egységelembe viszi, és inverz képe a kép inverze lesz (azaz $\varphi$ az inverzképzés műveletét is tartja).

## Következmény

Ha $\varphi : R \to S$ gyűrűhomomorfizmus, akkor $R$ nullelemét $S$ nullelemébe viszi, azaz $\varphi(0) = 0$, továbbá $\varphi(-r) = -\varphi(r)$.

## Példa (5.1.20. Gyakorlat)

$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, $\varphi(r) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ gyűrűhomomorfizmus,

de $\mathbb{R}$ egységelemét nem viszi $\mathbb{R}^{2\times 2}$ egységelemébe.

# Homomorfizmus képe és magja

## 5.1.3, 5.1.4. Definíció

Minden gyűrűhomomorfizmus csoporthomomorfizmus is az additív csoportok között,

# Homomorfizmus képe és magja

## 5.1.3, 5.1.4. Definíció

Minden gyűrűhomomorfizmus csoporthomomorfizmus is az additív csoportok között, így lehet **képről** és **magról** beszélni.

# Homomorfizmus képe és magja

## 5.1.3, 5.1.4. Definíció

Minden gyűrűhomomorfizmus csoporthomomorfizmus is az additív csoportok között, így lehet képről és magról beszélni. Mindkettő nyilván részgyűrű.

# Homomorfizmus képe és magja

## 5.1.3, 5.1.4. Definíció

Minden gyűrűhomomorfizmus csoporthomomorfizmus is az additív csoportok között, így lehet képről és magról beszélni. Mindkettő nyilván részgyűrű.

## 5.1.5. Tétel

Az $R$ gyűrű egy $I$ részhalmaza pontosan akkor magja egy $R$-en értelmezett homomorfizmusnak,

# Homomorfizmus képe és magja

## 5.1.3, 5.1.4. Definíció

Minden gyűrűhomomorfizmus csoporthomomorfizmus is az additív csoportok között, így lehet képről és magról beszélni. Mindkettő nyilván részgyűrű.

## 5.1.5. Tétel

Az $R$ gyűrű egy $I$ részhalmaza pontosan akkor magja egy $R$-en értelmezett homomorfizmusnak, ha részcsoport $R^+$-ban,

# Homomorfizmus képe és magja

## 5.1.3, 5.1.4. Definíció

Minden gyűrűhomomorfizmus csoporthomomorfizmus is az additív csoportok között, így lehet képről és magról beszélni. Mindkettő nyilván részgyűrű.

## 5.1.5. Tétel

Az $R$ gyűrű egy $I$ részhalmaza pontosan akkor magja egy $R$-en értelmezett homomorfizmusnak, ha részcsoport $R^+$-ban, és minden $a \in I$ és $r \in R$ esetén $ar, ra \in I$.

# Homomorfizmus képe és magja

## 5.1.3, 5.1.4. Definíció

Minden gyűrűhomomorfizmus csoporthomomorfizmus is az additív csoportok között, így lehet képről és magról beszélni. Mindkettő nyilván részgyűrű.

## 5.1.5. Tétel

Az $R$ gyűrű egy $I$ részhalmaza pontosan akkor magja egy $R$-en értelmezett homomorfizmusnak, ha részcsoport $R^+$-ban, és minden $a \in I$ és $r \in R$ esetén $ar, ra \in I$.

Legyen $\varphi : R \to S$

# Homomorfizmus képe és magja

## 5.1.3, 5.1.4. Definíció

Minden gyűrűhomomorfizmus csoporthomomorfizmus is az additív csoportok között, így lehet képről és magról beszélni. Mindkettő nyilván részgyűrű.

## 5.1.5. Tétel

Az $R$ gyűrű egy $I$ részhalmaza pontosan akkor magja egy $R$-en értelmezett homomorfizmusnak, ha részcsoport $R^+$-ban, és minden $a \in I$ és $r \in R$ esetén $ar, ra \in I$.

Legyen $\varphi : R \to S$ és $I = \mathrm{Ker}(\varphi)$

# Homomorfizmus képe és magja

## 5.1.3, 5.1.4. Definíció

Minden gyűrűhomomorfizmus csoporthomomorfizmus is az additív csoportok között, így lehet képről és magról beszélni. Mindkettő nyilván részgyűrű.

## 5.1.5. Tétel

Az $R$ gyűrű egy $I$ részhalmaza pontosan akkor magja egy $R$-en értelmezett homomorfizmusnak, ha részcsoport $R^+$-ban, és minden $a \in I$ és $r \in R$ esetén $ar, ra \in I$.

Legyen $\varphi : R \to S$ és $I = \mathrm{Ker}(\varphi) = \{r \in R : \varphi(r) = 0\}$.

# Homomorfizmus képe és magja

## 5.1.3, 5.1.4. Definíció

Minden gyűrűhomomorfizmus csoporthomomorfizmus is az additív csoportok között, így lehet képről és magról beszélni. Mindkettő nyilván részgyűrű.

## 5.1.5. Tétel

Az $R$ gyűrű egy $I$ részhalmaza pontosan akkor magja egy $R$-en értelmezett homomorfizmusnak, ha részcsoport $R^+$-ban, és minden $a \in I$ és $r \in R$ esetén $ar, ra \in I$.

Legyen $\varphi : R \to S$ és $I = \mathrm{Ker}(\varphi) = \{r \in R : \varphi(r) = 0\}$.
Ha $a \in I = \mathrm{Ker}(\varphi)$, akkor $\varphi(a) = 0$.

# Homomorfizmus képe és magja

## 5.1.3, 5.1.4. Definíció

Minden gyűrűhomomorfizmus csoporthomomorfizmus is az additív csoportok között, így lehet képről és magról beszélni. Mindkettő nyilván részgyűrű.

## 5.1.5. Tétel

Az $R$ gyűrű egy $I$ részhalmaza pontosan akkor magja egy $R$-en értelmezett homomorfizmusnak, ha részcsoport $R^+$-ban, és minden $a \in I$ és $r \in R$ esetén $ar, ra \in I$.

Legyen $\varphi : R \to S$ és $I = \mathrm{Ker}(\varphi) = \{r \in R : \varphi(r) = 0\}$.
Ha $a \in I = \mathrm{Ker}(\varphi)$, akkor $\varphi(a) = 0$.
Ezért $\varphi(ra)$

# Homomorfizmus képe és magja

## 5.1.3, 5.1.4. Definíció

Minden gyűrűhomomorfizmus csoporthomomorfizmus is az additív csoportok között, így lehet képről és magról beszélni. Mindkettő nyilván részgyűrű.

## 5.1.5. Tétel

Az $R$ gyűrű egy $I$ részhalmaza pontosan akkor magja egy $R$-en értelmezett homomorfizmusnak, ha részcsoport $R^+$-ban, és minden $a \in I$ és $r \in R$ esetén $ar, ra \in I$.

Legyen $\varphi : R \to S$ és $I = \mathrm{Ker}(\varphi) = \{r \in R : \varphi(r) = 0\}$.
Ha $a \in I = \mathrm{Ker}(\varphi)$, akkor $\varphi(a) = 0$.
Ezért $\varphi(ra) = \varphi(r)\varphi(a)$

# Homomorfizmus képe és magja

## 5.1.3, 5.1.4. Definíció

Minden gyűrűhomomorfizmus csoporthomomorfizmus is az additív csoportok között, így lehet képről és magról beszélni. Mindkettő nyilván részgyűrű.

## 5.1.5. Tétel

Az $R$ gyűrű egy $I$ részhalmaza pontosan akkor magja egy $R$-en értelmezett homomorfizmusnak, ha részcsoport $R^+$-ban, és minden $a \in I$ és $r \in R$ esetén $ar, ra \in I$.

Legyen $\varphi : R \to S$ és $I = \mathrm{Ker}(\varphi) = \{r \in R : \varphi(r) = 0\}$.
Ha $a \in I = \mathrm{Ker}(\varphi)$, akkor $\varphi(a) = 0$.
Ezért $\varphi(ra) = \varphi(r)\varphi(a) = \varphi(r)0$

# Homomorfizmus képe és magja

## 5.1.3, 5.1.4. Definíció

Minden gyűrűhomomorfizmus csoporthomomorfizmus is az additív csoportok között, így lehet képről és magról beszélni. Mindkettő nyilván részgyűrű.

## 5.1.5. Tétel

Az $R$ gyűrű egy $I$ részhalmaza pontosan akkor magja egy $R$-en értelmezett homomorfizmusnak, ha részcsoport $R^+$-ban, és minden $a \in I$ és $r \in R$ esetén $ar, ra \in I$.

Legyen $\varphi : R \to S$ és $I = \mathrm{Ker}(\varphi) = \{r \in R : \varphi(r) = 0\}$.
Ha $a \in I = \mathrm{Ker}(\varphi)$, akkor $\varphi(a) = 0$.
Ezért $\varphi(ra) = \varphi(r)\varphi(a) = \varphi(r)0 = 0$.

# Homomorfizmus képe és magja

## 5.1.3, 5.1.4. Definíció

Minden gyűrűhomomorfizmus csoporthomomorfizmus is az additív csoportok között, így lehet képről és magról beszélni. Mindkettő nyilván részgyűrű.

## 5.1.5. Tétel

Az $R$ gyűrű egy $I$ részhalmaza pontosan akkor magja egy $R$-en értelmezett homomorfizmusnak, ha részcsoport $R^+$-ban, és minden $a \in I$ és $r \in R$ esetén $ar, ra \in I$.

Legyen $\varphi : R \to S$ és $I = \mathrm{Ker}(\varphi) = \{r \in R : \varphi(r) = 0\}$.
Ha $a \in I = \mathrm{Ker}(\varphi)$, akkor $\varphi(a) = 0$.
Ezért $\varphi(ra) = \varphi(r)\varphi(a) = \varphi(r)0 = 0$.
Azaz $ra \in I$,

# Homomorfizmus képe és magja

## 5.1.3, 5.1.4. Definíció

Minden gyűrűhomomorfizmus csoporthomomorfizmus is az additív csoportok között, így lehet képről és magról beszélni. Mindkettő nyilván részgyűrű.

## 5.1.5. Tétel

Az $R$ gyűrű egy $I$ részhalmaza pontosan akkor magja egy $R$-en értelmezett homomorfizmusnak, ha részcsoport $R^+$-ban, és minden $a \in I$ és $r \in R$ esetén $ar, ra \in I$.

Legyen $\varphi : R \to S$ és $I = \mathrm{Ker}(\varphi) = \{r \in R : \varphi(r) = 0\}$.
Ha $a \in I = \mathrm{Ker}(\varphi)$, akkor $\varphi(a) = 0$.
Ezért $\varphi(ra) = \varphi(r)\varphi(a) = \varphi(r)0 = 0$.
Azaz $ra \in I$, és hasonlóan $ar \in I$.

# Homomorfizmus képe és magja

## 5.1.3, 5.1.4. Definíció

Minden gyűrűhomomorfizmus csoporthomomorfizmus is az additív csoportok között, így lehet képről és magról beszélni. Mindkettő nyilván részgyűrű.

## 5.1.5. Tétel

Az $R$ gyűrű egy $I$ részhalmaza pontosan akkor magja egy $R$-en értelmezett homomorfizmusnak, ha részcsoport $R^+$-ban, és minden $a \in I$ és $r \in R$ esetén $ar, ra \in I$.

Legyen $\varphi : R \to S$ és $I = \mathrm{Ker}(\varphi) = \{r \in R : \varphi(r) = 0\}$.
Ha $a \in I = \mathrm{Ker}(\varphi)$, akkor $\varphi(a) = 0$.
Ezért $\varphi(ra) = \varphi(r)\varphi(a) = \varphi(r)0 = 0$.
Azaz $ra \in I$, és hasonlóan $ar \in I$.
A megfordítás faktorgyűrű segítségével később.

# Ideálok

## 5.1.6. Definíció

Egy $R$ gyűrű egy $I$ részhalmaza balideál,

# Ideálok

### 5.1.6. Definíció

Egy $R$ gyűrű egy $I$ részhalmaza balideál, ha az összeadásra nézve részcsoport,

# Ideálok

## 5.1.6. Definíció

Egy $R$ gyűrű egy $I$ részhalmaza balideál, ha az összeadásra nézve részcsoport, és minden $a \in I$, $r \in R$ esetén $ra \in I$.

# Ideálok

## 5.1.6. Definíció

Egy $R$ gyűrű egy $I$ részhalmaza balideál, ha az összeadásra nézve részcsoport, és minden $a \in I$, $r \in R$ esetén $ra \in I$.
Az $I$ jobbideál, ha részcsoport, és minden $a \in I$, $r \in R$-re $ar \in I$.

# Ideálok

## 5.1.6. Definíció

Egy $R$ gyűrű egy $I$ részhalmaza balideál, ha az összeadásra nézve részcsoport, és minden $a \in I$, $r \in R$ esetén $ra \in I$.
Az $I$ jobbideál, ha részcsoport, és minden $a \in I$, $r \in R$-re $ar \in I$.
Az $I$ (kétoldali) ideál, ha bal- és jobbideál is.

# Ideálok

## 5.1.6. Definíció

Egy $R$ gyűrű egy $I$ részhalmaza balideál, ha az összeadásra nézve részcsoport, és minden $a \in I$, $r \in R$ esetén $ra \in I$.
Az $I$ jobbideál, ha részcsoport, és minden $a \in I$, $r \in R$-re $ar \in I$.
Az $I$ (kétoldali) ideál, ha bal- és jobbideál is. Jele: $I \triangleleft R$.

# Ideálok

## 5.1.6. Definíció

Egy $R$ gyűrű egy $I$ részhalmaza balideál, ha az összeadásra nézve részcsoport, és minden $a \in I$, $r \in R$ esetén $ra \in I$.
Az $I$ jobbideál, ha részcsoport, és minden $a \in I$, $r \in R$-re $ar \in I$.
Az $I$ (kétoldali) ideál, ha bal- és jobbideál is. Jele: $I \triangleleft R$.

## Példa

A páros számok ideált alkotnak $\mathbb{Z}$-ben.

# Ideálok

## 5.1.6. Definíció

Egy $R$ gyűrű egy $I$ részhalmaza balideál, ha az összeadásra nézve részcsoport, és minden $a \in I$, $r \in R$ esetén $ra \in I$.
Az $I$ jobbideál, ha részcsoport, és minden $a \in I$, $r \in R$-re $ar \in I$.
Az $I$ (kétoldali) ideál, ha bal- és jobbideál is. Jele: $I \triangleleft R$.

## Példa

A páros számok ideált alkotnak $\mathbb{Z}$-ben.
Mert páros számok összege is páros,

# Ideálok

## 5.1.6. Definíció

Egy $R$ gyűrű egy $I$ részhalmaza balideál, ha az összeadásra nézve részcsoport, és minden $a \in I$, $r \in R$ esetén $ra \in I$.
Az $I$ jobbideál, ha részcsoport, és minden $a \in I$, $r \in R$-re $ar \in I$.
Az $I$ (kétoldali) ideál, ha bal- és jobbideál is. Jele: $I \triangleleft R$.

## Példa

A páros számok ideált alkotnak $\mathbb{Z}$-ben.
Mert páros számok összege is páros, a nulla is páros,

# Ideálok

## 5.1.6. Definíció

Egy $R$ gyűrű egy $I$ részhalmaza balideál, ha az összeadásra nézve részcsoport, és minden $a \in I$, $r \in R$ esetén $ra \in I$.
Az $I$ jobbideál, ha részcsoport, és minden $a \in I$, $r \in R$-re $ar \in I$.
Az $I$ (kétoldali) ideál, ha bal- és jobbideál is. Jele: $I \lhd R$.

## Példa

A páros számok ideált alkotnak $\mathbb{Z}$-ben.
Mert páros számok összege is páros, a nulla is páros,
és páros szám ellentettje is páros,

# Ideálok

## 5.1.6. Definíció

Egy $R$ gyűrű egy $I$ részhalmaza balideál, ha az összeadásra nézve részcsoport, és minden $a \in I$, $r \in R$ esetén $ra \in I$.
Az $I$ jobbideál, ha részcsoport, és minden $a \in I$, $r \in R$-re $ar \in I$.
Az $I$ (kétoldali) ideál, ha bal- és jobbideál is. Jele: $I \lhd R$.

## Példa

A páros számok ideált alkotnak $\mathbb{Z}$-ben.
Mert páros számok összege is páros, a nulla is páros,
és páros szám ellentettje is páros, azaz részcsoport;

# Ideálok

## 5.1.6. Definíció

Egy $R$ gyűrű egy $I$ részhalmaza balideál, ha az összeadásra nézve részcsoport, és minden $a \in I$, $r \in R$ esetén $ra \in I$.
Az $I$ jobbideál, ha részcsoport, és minden $a \in I$, $r \in R$-re $ar \in I$.
Az $I$ (kétoldali) ideál, ha bal- és jobbideál is. Jele: $I \lhd R$.

## Példa

A páros számok ideált alkotnak $\mathbb{Z}$-ben.
Mert páros számok összege is páros, a nulla is páros,
és páros szám ellentettje is páros, azaz részcsoport;
továbbá páros szám minden egész számszorosa is páros.

# Ideálok

## 5.1.6. Definíció

Egy $R$ gyűrű egy $I$ részhalmaza balideál, ha az összeadásra nézve részcsoport, és minden $a \in I$, $r \in R$ esetén $ra \in I$.
Az $I$ jobbideál, ha részcsoport, és minden $a \in I$, $r \in R$-re $ar \in I$.
Az $I$ (kétoldali) ideál, ha bal- és jobbideál is. Jele: $I \triangleleft R$.

## Példa

A páros számok ideált alkotnak $\mathbb{Z}$-ben.
Mert páros számok összege is páros, a nulla is páros,
és páros szám ellentettje is páros, azaz részcsoport;
továbbá páros szám minden egész számszorosa is páros.
Általában: Legyen $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n,\ \ \varphi(k) = k$ maradéka mod $n$.

# Ideálok

## 5.1.6. Definíció

Egy $R$ gyűrű egy $I$ részhalmaza balideál, ha az összeadásra nézve részcsoport, és minden $a \in I$, $r \in R$ esetén $ra \in I$.
Az $I$ jobbideál, ha részcsoport, és minden $a \in I$, $r \in R$-re $ar \in I$.
Az $I$ (kétoldali) ideál, ha bal- és jobbideál is. Jele: $I \triangleleft R$.

## Példa

A páros számok ideált alkotnak $\mathbb{Z}$-ben.
Mert páros számok összege is páros, a nulla is páros,
és páros szám ellentettje is páros, azaz részcsoport;
továbbá páros szám minden egész számszorosa is páros.
Általában: Legyen $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, $\varphi(k) = k$ maradéka mod $n$.
Ennek magja az $n$-nel osztható számokból álló ideál.

# Ideálok

## 5.1.6. Definíció

Egy $R$ gyűrű egy $I$ részhalmaza balideál, ha az összeadásra nézve részcsoport, és minden $a \in I$, $r \in R$ esetén $ra \in I$.
Az $I$ jobbideál, ha részcsoport, és minden $a \in I$, $r \in R$-re $ar \in I$.
Az $I$ (kétoldali) ideál, ha bal- és jobbideál is. Jele: $I \triangleleft R$.

## Példa

A páros számok ideált alkotnak $\mathbb{Z}$-ben.
Mert páros számok összege is páros, a nulla is páros, és páros szám ellentettje is páros, azaz részcsoport; továbbá páros szám minden egész számszorosa is páros.
Általában: Legyen $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, $\varphi(k) = k$ maradéka mod $n$.
Ennek magja az $n$-nel osztható számokból álló ideál.
Jele: $(n)$.

# Ideálok

## 5.1.6. Definíció

Egy $R$ gyűrű egy $I$ részhalmaza balideál, ha az összeadásra nézve részcsoport, és minden $a \in I$, $r \in R$ esetén $ra \in I$.
Az $I$ jobbideál, ha részcsoport, és minden $a \in I$, $r \in R$-re $ar \in I$.
Az $I$ (kétoldali) ideál, ha bal- és jobbideál is. Jele: $I \lhd R$.

## Példa

A páros számok ideált alkotnak $\mathbb{Z}$-ben.
Mert páros számok összege is páros, a nulla is páros, és páros szám ellentettje is páros, azaz részcsoport; továbbá páros szám minden egész számszorosa is páros.
Általában: Legyen $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, $\varphi(k) = k$ maradéka mod $n$.
Ennek magja az $n$-nel osztható számokból álló ideál.
Jele: $(n)$. Speciálisan $(2) = (-2) =$ az összes páros szám.

# Főideál

## 5.1.10. Definíció

Legyen $R$ kommutatív gyűrű és $s \in R$ rögzített.

# Főideál

## 5.1.10. Definíció

Legyen $R$ kommutatív gyűrű és $s \in R$ rögzített.
Álljon $(s)$ az $s$ összes többszöröseiből:

# Főideál

## 5.1.10. Definíció

Legyen $R$ kommutatív gyűrű és $s \in R$ rögzített.
Álljon $(s)$ az $s$ összes többszöröseiből: $(s) = \{rs \ : \ r \in R\}$.

# Főideál

## 5.1.10. Definíció

Legyen $R$ kommutatív gyűrű és $s \in R$ rögzített.
Álljon $(s)$ az $s$ összes többszöröseiből: $(s) = \{rs : r \in R\}$.
Ennek neve az $s$ által generált főideál.

# Főideál

## 5.1.10. Definíció

Legyen $R$ kommutatív gyűrű és $s \in R$ rögzített.
Álljon $(s)$ az $s$ összes többszöröseiből: $(s) = \{rs : r \in R\}$.
Ennek neve az $s$ által generált főideál.

HF: Az $(s)$ halmaz tényleg mindig ideál.

# Főideál

## 5.1.10. Definíció

Legyen $R$ kommutatív gyűrű és $s \in R$ rögzített.
Álljon $(s)$ az $s$ összes többszöröseiből: $(s) = \{rs \;:\; r \in R\}$.
Ennek neve az $s$ által generált főideál.

HF: Az $(s)$ halmaz tényleg mindig ideál.

## Példa

$R = \mathbb{R}[x]$.

# Főideál

## 5.1.10. Definíció

Legyen $R$ kommutatív gyűrű és $s \in R$ rögzített.
Álljon $(s)$ az $s$ összes többszöröseiből: $(s) = \{rs : r \in R\}$.
Ennek neve az $s$ által generált főideál.

HF: Az $(s)$ halmaz tényleg mindig ideál.

## Példa

$R = \mathbb{R}[x]$. Az $(x-1)$ az $x-1$-gyel osztható polinomokból áll.

# Főideál

## 5.1.10. Definíció

Legyen $R$ kommutatív gyűrű és $s \in R$ rögzített.
Álljon $(s)$ az $s$ összes többszöröseiből: $(s) = \{rs \ : \ r \in R\}$.
Ennek neve az $s$ által generált főideál.

HF: Az $(s)$ halmaz tényleg mindig ideál.

## Példa

$R = \mathbb{R}[x]$. Az $(x - 1)$ az $x - 1$-gyel osztható polinomokból áll.
Ezek azok, melyeknek gyöke az 1

# Főideál

## 5.1.10. Definíció

Legyen $R$ kommutatív gyűrű és $s \in R$ rögzített.
Álljon $(s)$ az $s$ összes többszöröseiből: $(s) = \{rs \ : \ r \in R\}$.
Ennek neve az $s$ által generált főideál.

HF: Az $(s)$ halmaz tényleg mindig ideál.

## Példa

$R = \mathbb{R}[x]$. Az $(x-1)$ az $x-1$-gyel osztható polinomokból áll.
Ezek azok, melyeknek gyöke az 1 (gyöktényező kiemelhető).

# Főideál

## 5.1.10. Definíció

Legyen $R$ kommutatív gyűrű és $s \in R$ rögzített.
Álljon $(s)$ az $s$ összes többszöröseiből: $(s) = \{rs \ : \ r \in R\}$.
Ennek neve az $s$ által generált főideál.

HF: Az $(s)$ halmaz tényleg mindig ideál.

## Példa

$R = \mathbb{R}[x]$. Az $(x-1)$ az $x-1$-gyel osztható polinomokból áll.
Ezek azok, melyeknek gyöke az 1 (gyöktényező kiemelhető).
Ezért ha $\varphi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$, $\varphi(f) = f(1)$

# Főideál

## 5.1.10. Definíció

Legyen $R$ kommutatív gyűrű és $s \in R$ rögzített.
Álljon $(s)$ az $s$ összes többszöröseiből: $(s) = \{rs \ : \ r \in R\}$.
Ennek neve az $s$ által generált főideál.

HF: Az $(s)$ halmaz tényleg mindig ideál.

## Példa

$R = \mathbb{R}[x]$. Az $(x - 1)$ az $x - 1$-gyel osztható polinomokból áll.
Ezek azok, melyeknek gyöke az 1 (gyöktényező kiemelhető).
Ezért ha $\varphi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$, $\varphi(f) = f(1)$ ($\varphi$ az 1 behelyettesítése),

# Főideál

## 5.1.10. Definíció

Legyen $R$ kommutatív gyűrű és $s \in R$ rögzített.
Álljon $(s)$ az $s$ összes többszöröseiből: $(s) = \{rs \ : \ r \in R\}$.
Ennek neve az $s$ által generált főideál.

HF: Az $(s)$ halmaz tényleg mindig ideál.

## Példa

$R = \mathbb{R}[x]$. Az $(x-1)$ az $x-1$-gyel osztható polinomokból áll.
Ezek azok, melyeknek gyöke az 1 (gyöktényező kiemelhető).
Ezért ha $\varphi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$, $\varphi(f) = f(1)$ ($\varphi$ az 1 behelyettesítése),
akkor $\mathrm{Ker}(\varphi) = (x-1)$.

# Főideál

## 5.1.10. Definíció

Legyen $R$ kommutatív gyűrű és $s \in R$ rögzített.
Álljon $(s)$ az $s$ összes többszöröseiből: $(s) = \{rs \ : \ r \in R\}$.
Ennek neve az $s$ által generált főideál.

HF: Az $(s)$ halmaz tényleg mindig ideál.

## Példa

$R = \mathbb{R}[x]$. Az $(x-1)$ az $x-1$-gyel osztható polinomokból áll.
Ezek azok, melyeknek gyöke az 1 (gyöktényező kiemelhető).
Ezért ha $\varphi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$, $\varphi(f) = f(1)$ ($\varphi$ az 1 behelyettesítése),
akkor $\mathrm{Ker}(\varphi) = (x-1)$.

HF: Legyen $\varphi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{C}$, $\varphi(f) = f(i)$

# Főideál

## 5.1.10. Definíció

Legyen $R$ kommutatív gyűrű és $s \in R$ rögzített.
Álljon $(s)$ az $s$ összes többszöröseiből: $(s) = \{rs : r \in R\}$.
Ennek neve az $s$ által generált főideál.

HF: Az $(s)$ halmaz tényleg mindig ideál.

## Példa

$R = \mathbb{R}[x]$. Az $(x-1)$ az $x-1$-gyel osztható polinomokból áll.
Ezek azok, melyeknek gyöke az 1 (gyöktényező kiemelhető).
Ezért ha $\varphi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$, $\varphi(f) = f(1)$ ($\varphi$ az 1 behelyettesítése),
akkor $\mathrm{Ker}(\varphi) = (x-1)$.

HF: Legyen $\varphi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{C}$, $\varphi(f) = f(i)$ ($\varphi$ az $i$ behelyettesítése).

# Főideál

## 5.1.10. Definíció

Legyen $R$ kommutatív gyűrű és $s \in R$ rögzített.
Álljon $(s)$ az $s$ összes többszöröseiből: $(s) = \{rs \,:\, r \in R\}$.
Ennek neve az $s$ által generált főideál.

HF: Az $(s)$ halmaz tényleg mindig ideál.

## Példa

$R = \mathbb{R}[x]$. Az $(x-1)$ az $x-1$-gyel osztható polinomokból áll.
Ezek azok, melyeknek gyöke az 1 (gyöktényező kiemelhető).
Ezért ha $\varphi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$, $\varphi(f) = f(1)$ ($\varphi$ az 1 behelyettesítése), akkor $\mathrm{Ker}(\varphi) = (x-1)$.

HF: Legyen $\varphi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{C}$, $\varphi(f) = f(i)$ ($\varphi$ az $i$ behelyettesítése).
Ekkor $\mathrm{Ker}(\varphi) = (x^2+1)$.

# Főideál

## 5.1.10. Definíció

Legyen $R$ kommutatív gyűrű és $s \in R$ rögzített.
Álljon $(s)$ az $s$ összes többszöröseiből: $(s) = \{rs : r \in R\}$.
Ennek neve az $s$ által generált főideál.

HF: Az $(s)$ halmaz tényleg mindig ideál.

## Példa

$R = \mathbb{R}[x]$. Az $(x-1)$ az $x-1$-gyel osztható polinomokból áll.
Ezek azok, melyeknek gyöke az 1 (gyöktényező kiemelhető).
Ezért ha $\varphi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$, $\varphi(f) = f(1)$ ($\varphi$ az 1 behelyettesítése),
akkor $\mathrm{Ker}(\varphi) = (x-1)$.

HF: Legyen $\varphi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{C}$, $\varphi(f) = f(i)$ ($\varphi$ az $i$ behelyettesítése).
Ekkor $\mathrm{Ker}(\varphi) = (x^2+1)$. Segítség: ha $i$ gyöke $f \in \mathbb{R}[x]$-nek,
akkor a konjugáltja, azaz $-i$ is gyöke $f$-nek (4.7.7. Gyakorlat).

# Testek ideáljai

### 5.3.2. Állítás

Egy testnek csak a triviális ideáljai vannak: $(0)$ és önmaga.

# Testek ideáljai

## 5.3.2. Állítás

Egy testnek csak a triviális ideáljai vannak: $(0)$ és önmaga.

## Bizonyítás

Legyen $T$ test és $I$ ideálja $F$-nek, amely nem csak a nullából áll.

# Testek ideáljai

## 5.3.2. Állítás

Egy testnek csak a triviális ideáljai vannak: $(0)$ és önmaga.

## Bizonyítás

Legyen $T$ test és $I$ ideálja $F$-nek, amely nem csak a nullából áll.
Ha $0 \neq s \in I$, akkor $1 = ss^{-1} \in I$,

# Testek ideáljai

## 5.3.2. Állítás

Egy testnek csak a triviális ideáljai vannak: $(0)$ és önmaga.

## Bizonyítás

Legyen $T$ test és $I$ ideálja $F$-nek, amely nem csak a nullából áll.
Ha $0 \neq s \in I$, akkor $1 = ss^{-1} \in I$, hiszen $I$ ideál.

# Testek ideáljai

## 5.3.2. Állítás

Egy testnek csak a triviális ideáljai vannak: $(0)$ és önmaga.

## Bizonyítás

Legyen $T$ test és $I$ ideálja $F$-nek, amely nem csak a nullából áll.
Ha $0 \neq s \in I$, akkor $1 = ss^{-1} \in I$, hiszen $I$ ideál.
Tehát minden $r \in T$-re $r = 1r \in I$.

# Testek ideáljai

## 5.3.2. Állítás

Egy testnek csak a triviális ideáljai vannak: $(0)$ és önmaga.

## Bizonyítás

Legyen $T$ test és $I$ ideálja $F$-nek, amely nem csak a nullából áll.
Ha $0 \neq s \in I$, akkor $1 = ss^{-1} \in I$, hiszen $I$ ideál.
Tehát minden $r \in T$-re $r = 1r \in I$. Ezért $I = T$. $\square$

# Testek ideáljai

## 5.3.2. Állítás

Egy testnek csak a triviális ideáljai vannak: $(0)$ és önmaga.

## Bizonyítás

Legyen $T$ test és $I$ ideálja $F$-nek, amely nem csak a nullából áll.
Ha $0 \neq s \in I$, akkor $1 = ss^{-1} \in I$, hiszen $I$ ideál.
Tehát minden $r \in T$-re $r = 1r \in I$. Ezért $I = T$. $\square$

HF: Ferdetestnek minden balideálja és jobbideálja triviális.

# Testek ideáljai

### 5.3.2. Állítás

Egy testnek csak a triviális ideáljai vannak: $(0)$ és önmaga.

### Bizonyítás

Legyen $T$ test és $I$ ideálja $F$-nek, amely nem csak a nullából áll.
Ha $0 \neq s \in I$, akkor $1 = ss^{-1} \in I$, hiszen $I$ ideál.
Tehát minden $r \in T$-re $r = 1r \in I$. Ezért $I = T$. $\square$

HF: Ferdetestnek minden balideálja és jobbideálja triviális.

### 5.3.1. Definíció

Az $R$ egyszerű gyűrű, ha pontosan két ideálja van: $(0)$ és $R$.

# Testek ideáljai

### 5.3.2. Állítás

Egy testnek csak a triviális ideáljai vannak: $(0)$ és önmaga.

### Bizonyítás

Legyen $T$ test és $I$ ideálja $F$-nek, amely nem csak a nullából áll.
Ha $0 \neq s \in I$, akkor $1 = ss^{-1} \in I$, hiszen $I$ ideál.
Tehát minden $r \in T$-re $r = 1r \in I$. Ezért $I = T$. $\square$

HF: Ferdetestnek minden balideálja és jobbideálja triviális.

### 5.3.1. Definíció

Az $R$ egyszerű gyűrű, ha pontosan két ideálja van: $(0)$ és $R$.

Főpélda (5.3.3): (Ferde)test fölötti teljes mátrixgyűrű egyszerű.

# Kommutatív egyszerű gyűrűk

**Tétel (5.3.9. Következmény)**

Minden kommutatív,

# Kommutatív egyszerű gyűrűk

**Tétel (5.3.9. Következmény)**

Minden kommutatív, egységelemes,

# Kommutatív egyszerű gyűrűk

**Tétel (5.3.9. Következmény)**

Minden kommutatív, egységelemes, egyszerű gyűrű

# Kommutatív egyszerű gyűrűk

**Tétel (5.3.9. Következmény)**

Minden kommutatív, egységelemes, egyszerű gyűrű test.

# Kommutatív egyszerű gyűrűk

**Tétel (5.3.9. Következmény)**

Minden kommutatív, egységelemes, egyszerű gyűrű test.

**Bizonyítás**

Ha $R$ kommutatív, egységelemes, egyszerű gyűrű és $0 \neq s \in R$,

# Kommutatív egyszerű gyűrűk

## Tétel (5.3.9. Következmény)

Minden kommutatív, egységelemes, egyszerű gyűrű test.

## Bizonyítás

Ha $R$ kommutatív, egységelemes, egyszerű gyűrű és $0 \neq s \in R$, akkor $s = 1s \in (s)$

# Kommutatív egyszerű gyűrűk

## Tétel (5.3.9. Következmény)

Minden kommutatív, egységelemes, egyszerű gyűrű test.

## Bizonyítás

Ha $R$ kommutatív, egységelemes, egyszerű gyűrű és $0 \neq s \in R$, akkor $s = 1s \in (s)$ miatt az $(s)$ ideál nem $(0)$,

# Kommutatív egyszerű gyűrűk

## Tétel (5.3.9. Következmény)

Minden kommutatív, egységelemes, egyszerű gyűrű test.

## Bizonyítás

Ha $R$ kommutatív, egységelemes, egyszerű gyűrű és $0 \neq s \in R$, akkor $s = 1s \in (s)$ miatt az $(s)$ ideál nem $(0)$, és így $(s) = R$.

# Kommutatív egyszerű gyűrűk

## Tétel (5.3.9. Következmény)

Minden kommutatív, egységelemes, egyszerű gyűrű test.

## Bizonyítás

Ha $R$ kommutatív, egységelemes, egyszerű gyűrű és $0 \neq s \in R$, akkor $s = 1s \in (s)$ miatt az $(s)$ ideál nem $(0)$, és így $(s) = R$. Ezért $1 \in (s)$,

# Kommutatív egyszerű gyűrűk

## Tétel (5.3.9. Következmény)

Minden kommutatív, egységelemes, egyszerű gyűrű test.

## Bizonyítás

Ha $R$ kommutatív, egységelemes, egyszerű gyűrű és $0 \neq s \in R$, akkor $s = 1s \in (s)$ miatt az $(s)$ ideál nem $(0)$, és így $(s) = R$. Ezért $1 \in (s)$, vagyis van olyan $r \in R$, hogy $sr = 1$.

# Kommutatív egyszerű gyűrűk

## Tétel (5.3.9. Következmény)

Minden kommutatív, egységelemes, egyszerű gyűrű test.

## Bizonyítás

Ha $R$ kommutatív, egységelemes, egyszerű gyűrű és $0 \neq s \in R$, akkor $s = 1s \in (s)$ miatt az $(s)$ ideál nem $(0)$, és így $(s) = R$. Ezért $1 \in (s)$, vagyis van olyan $r \in R$, hogy $sr = 1$. Tehát az $s$ elem invertálható,

# Kommutatív egyszerű gyűrűk

## Tétel (5.3.9. Következmény)

Minden kommutatív, egységelemes, egyszerű gyűrű test.

## Bizonyítás

Ha $R$ kommutatív, egységelemes, egyszerű gyűrű és $0 \neq s \in R$, akkor $s = 1s \in (s)$ miatt az $(s)$ ideál nem $(0)$, és így $(s) = R$. Ezért $1 \in (s)$, vagyis van olyan $r \in R$, hogy $sr = 1$. Tehát az $s$ elem invertálható, és így $R$ test. $\square$

# Kommutatív egyszerű gyűrűk

## Tétel (5.3.9. Következmény)

Minden kommutatív, egységelemes, egyszerű gyűrű test.

## Bizonyítás

Ha $R$ kommutatív, egységelemes, egyszerű gyűrű és $0 \neq s \in R$, akkor $s = 1s \in (s)$ miatt az $(s)$ ideál nem $(0)$, és így $(s) = R$.
Ezért $1 \in (s)$, vagyis van olyan $r \in R$, hogy $sr = 1$.
Tehát az $s$ elem invertálható, és így $R$ test. $\square$

## Általánosítás (5.3.8. Tétel, NB)

Legyen $R$ gyűrű, amelynek csak a két triviális balideálja van.

# Kommutatív egyszerű gyűrűk

## Tétel (5.3.9. Következmény)

Minden kommutatív, egységelemes, egyszerű gyűrű test.

## Bizonyítás

Ha $R$ kommutatív, egységelemes, egyszerű gyűrű és $0 \neq s \in R$, akkor $s = 1s \in (s)$ miatt az $(s)$ ideál nem $(0)$, és így $(s) = R$. Ezért $1 \in (s)$, vagyis van olyan $r \in R$, hogy $sr = 1$. Tehát az $s$ elem invertálható, és így $R$ test. $\square$

## Általánosítás (5.3.8. Tétel, NB)

Legyen $R$ gyűrű, amelynek csak a két triviális balideálja van. Ekkor $R$ vagy ferdetest,

# Kommutatív egyszerű gyűrűk

## Tétel (5.3.9. Következmény)

Minden kommutatív, egységelemes, egyszerű gyűrű test.

## Bizonyítás

Ha $R$ kommutatív, egységelemes, egyszerű gyűrű és $0 \neq s \in R$, akkor $s = 1s \in (s)$ miatt az $(s)$ ideál nem $(0)$, és így $(s) = R$. Ezért $1 \in (s)$, vagyis van olyan $r \in R$, hogy $sr = 1$. Tehát az $s$ elem invertálható, és így $R$ test. $\square$

## Általánosítás (5.3.8. Tétel, NB)

Legyen $R$ gyűrű, amelynek csak a két triviális balideálja van. Ekkor $R$ vagy ferdetest, vagy olyan prímelemű gyűrű,

# Kommutatív egyszerű gyűrűk

## Tétel (5.3.9. Következmény)

Minden kommutatív, egységelemes, egyszerű gyűrű test.

## Bizonyítás

Ha $R$ kommutatív, egységelemes, egyszerű gyűrű és $0 \neq s \in R$, akkor $s = 1s \in (s)$ miatt az $(s)$ ideál nem $(0)$, és így $(s) = R$. Ezért $1 \in (s)$, vagyis van olyan $r \in R$, hogy $sr = 1$. Tehát az $s$ elem invertálható, és így $R$ test. $\square$

## Általánosítás (5.3.8. Tétel, NB)

Legyen $R$ gyűrű, amelynek csak a két triviális balideálja van. Ekkor $R$ vagy ferdetest, vagy olyan prímelemű gyűrű, amelyben bármely két elem szorzata nulla.

# Ideálok és nullosztók

## Emlékeztető (2.2.27. Definíció)

Ha $R$ gyűrű, $r, s \in R$ egyik sem nulla, de $rs = 0$,

# Ideálok és nullosztók

## Emlékeztető (2.2.27. Definíció)

Ha $R$ gyűrű, $r, s \in R$ egyik sem nulla, de $rs = 0$,
akkor $r$ baloldali, nullosztó.

# Ideálok és nullosztók

## Emlékeztető (2.2.27. Definíció)

Ha $R$ gyűrű, $r, s \in R$ egyik sem nulla, de $rs = 0$, akkor $r$ baloldali, $s$ jobboldali nullosztó.

# Ideálok és nullosztók

## Emlékeztető (2.2.27. Definíció)

Ha $R$ gyűrű, $r, s \in R$ egyik sem nulla, de $rs = 0$, akkor $r$ baloldali, $s$ jobboldali nullosztó.

## 5.3.7. Lemma

Legyen $r \in R$ rögzített. Ekkor $\{x \in R : xr = 0\}$ balideál,

# Ideálok és nullosztók

## Emlékeztető (2.2.27. Definíció)

Ha $R$ gyűrű, $r, s \in R$ egyik sem nulla, de $rs = 0$, akkor $r$ baloldali, $s$ jobboldali nullosztó.

## 5.3.7. Lemma

Legyen $r \in R$ rögzített. Ekkor $\{x \in R \ : \ xr = 0\}$ balideál, pontatlanul: az „$r$-hez tartozó” bal nullosztók balideált alkotnak.

# Ideálok és nullosztók

## Emlékeztető (2.2.27. Definíció)

Ha $R$ gyűrű, $r, s \in R$ egyik sem nulla, de $rs = 0$, akkor $r$ baloldali, $s$ jobboldali nullosztó.

## 5.3.7. Lemma

Legyen $r \in R$ rögzített. Ekkor $\{x \in R : xr = 0\}$ balideál, pontatlanul: az „$r$-hez tartozó” bal nullosztók balideált alkotnak.

## Bizonyítás

Ha $xr = 0$ és $yr = 0$,

# Ideálok és nullosztók

## Emlékeztető (2.2.27. Definíció)

Ha $R$ gyűrű, $r, s \in R$ egyik sem nulla, de $rs = 0$, akkor $r$ baloldali, $s$ jobboldali nullosztó.

## 5.3.7. Lemma

Legyen $r \in R$ rögzített. Ekkor $\{x \in R : xr = 0\}$ balideál, pontatlanul: az „$r$-hez tartozó” bal nullosztók balideált alkotnak.

## Bizonyítás

Ha $xr = 0$ és $yr = 0$, akkor nyilván $(x \pm y)r = 0$.

# Ideálok és nullosztók

## Emlékeztető (2.2.27. Definíció)

Ha $R$ gyűrű, $r, s \in R$ egyik sem nulla, de $rs = 0$,
akkor $r$ baloldali, $s$ jobboldali nullosztó.

## 5.3.7. Lemma

Legyen $r \in R$ rögzített. Ekkor $\{x \in R : xr = 0\}$ balideál,
pontatlanul: az „$r$-hez tartozó” bal nullosztók balideált alkotnak.

## Bizonyítás

Ha $xr = 0$ és $yr = 0$, akkor nyilván $(x \pm y)r = 0$.
Ha $xr = 0$ és $s \in R$,

# Ideálok és nullosztók

## Emlékeztető (2.2.27. Definíció)

Ha $R$ gyűrű, $r, s \in R$ egyik sem nulla, de $rs = 0$, akkor $r$ baloldali, $s$ jobboldali nullosztó.

## 5.3.7. Lemma

Legyen $r \in R$ rögzített. Ekkor $\{x \in R : xr = 0\}$ balideál, pontatlanul: az „$r$-hez tartozó” bal nullosztók balideált alkotnak.

## Bizonyítás

Ha $xr = 0$ és $yr = 0$, akkor nyilván $(x \pm y)r = 0$.
Ha $xr = 0$ és $s \in R$, akkor pedig $(sx)r$

# Ideálok és nullosztók

## Emlékeztető (2.2.27. Definíció)

Ha $R$ gyűrű, $r, s \in R$ egyik sem nulla, de $rs = 0$,
akkor $r$ baloldali, $s$ jobboldali nullosztó.

## 5.3.7. Lemma

Legyen $r \in R$ rögzített. Ekkor $\{x \in R \,:\, xr = 0\}$ balideál,
pontatlanul: az „$r$-hez tartozó” bal nullosztók balideált alkotnak.

## Bizonyítás

Ha $xr = 0$ és $yr = 0$, akkor nyilván $(x \pm y)r = 0$.
Ha $xr = 0$ és $s \in R$, akkor pedig $(sx)r = s(xr)$

# Ideálok és nullosztók

## Emlékeztető (2.2.27. Definíció)

Ha $R$ gyűrű, $r, s \in R$ egyik sem nulla, de $rs = 0$,
akkor $r$ baloldali, $s$ jobboldali nullosztó.

## 5.3.7. Lemma

Legyen $r \in R$ rögzített. Ekkor $\{x \in R : xr = 0\}$ balideál,
pontatlanul: az „$r$-hez tartozó” bal nullosztók balideált alkotnak.

## Bizonyítás

Ha $xr = 0$ és $yr = 0$, akkor nyilván $(x \pm y)r = 0$.
Ha $xr = 0$ és $s \in R$, akkor pedig $(sx)r = s(xr) = s0 = 0$. $\square$

# Ideálok és nullosztók

## Emlékeztető (2.2.27. Definíció)

Ha $R$ gyűrű, $r, s \in R$ egyik sem nulla, de $rs = 0$,
akkor $r$ baloldali, $s$ jobboldali nullosztó.

## 5.3.7. Lemma

Legyen $r \in R$ rögzített. Ekkor $\{x \in R : xr = 0\}$ balideál,
pontatlanul: az „$r$-hez tartozó” bal nullosztók balideált alkotnak.

## Bizonyítás

Ha $xr = 0$ és $yr = 0$, akkor nyilván $(x \pm y)r = 0$.
Ha $xr = 0$ és $s \in R$, akkor pedig $(sx)r = s(xr) = s0 = 0$. $\square$

Elnevezés: Ez az $r$ elem bal oldali annullátora.

# Ideálok és nullosztók

## Emlékeztető (2.2.27. Definíció)

Ha $R$ gyűrű, $r, s \in R$ egyik sem nulla, de $rs = 0$,
akkor $r$ baloldali, $s$ jobboldali nullosztó.

## 5.3.7. Lemma

Legyen $r \in R$ rögzített. Ekkor $\{x \in R : xr = 0\}$ balideál,
pontatlanul: az „$r$-hez tartozó” bal nullosztók balideált alkotnak.

## Bizonyítás

Ha $xr = 0$ és $yr = 0$, akkor nyilván $(x \pm y)r = 0$.
Ha $xr = 0$ és $s \in R$, akkor pedig $(sx)r = s(xr) = s0 = 0$. $\square$

Elnevezés: Ez az $r$ elem bal oldali annullátora.
Fontos szerepet játszik a balideálmentes gyűrűk leírásában.

# Véges nullosztómentes gyűrű test

### 5.3.5. Tétel

Minden véges, nullosztómentes gyűrű test.

# Véges nullosztómentes gyűrű test

## 5.3.5. Tétel

Minden véges, nullosztómentes gyűrű test.

## Wedderburn tétele (6.7.13. Tétel, NB)

Minden véges ferdetest kommutatív.

# Véges nullosztómentes gyűrű test

### 5.3.5. Tétel

Minden véges, nullosztómentes gyűrű test.

### Wedderburn tétele (6.7.13. Tétel, NB)

Minden véges ferdetest kommutatív.

Nehéz tétel, a nagyon szép bizonyítás benne van a jegyzetben.

# Véges nullosztómentes gyűrű test

**5.3.5. Tétel**

Minden véges, nullosztómentes gyűrű test.

**Wedderburn tétele (6.7.13. Tétel, NB)**

Minden véges ferdetest kommutatív.

Nehéz tétel, a nagyon szép bizonyítás benne van a jegyzetben.
Így elég belátni, hogy véges nullosztómentes gyűrű ferdetest.

# Véges nullosztómentes gyűrű test

### 5.3.5. Tétel

Minden véges, nullosztómentes gyűrű test.

### Wedderburn tétele (6.7.13. Tétel, NB)

Minden véges ferdetest kommutatív.

Nehéz tétel, a nagyon szép bizonyítás benne van a jegyzetben.
Így elég belátni, hogy véges nullosztómentes gyűrű ferdetest.

### Emlékeztető (2.2.8. Gyakorlat)

Nullosztómentes gyűrűben érvényes az egyszerűsítési szabály:

# Véges nullosztómentes gyűrű test

## 5.3.5. Tétel

Minden véges, nullosztómentes gyűrű test.

## Wedderburn tétele (6.7.13. Tétel, NB)

Minden véges ferdetest kommutatív.

Nehéz tétel, a nagyon szép bizonyítás benne van a jegyzetben. Így elég belátni, hogy véges nullosztómentes gyűrű ferdetest.

## Emlékeztető (2.2.8. Gyakorlat)

Nullosztómentes gyűrűben érvényes az egyszerűsítési szabály: ha $ac = bc$

# Véges nullosztómentes gyűrű test

## 5.3.5. Tétel

Minden véges, nullosztómentes gyűrű test.

## Wedderburn tétele (6.7.13. Tétel, NB)

Minden véges ferdetest kommutatív.

Nehéz tétel, a nagyon szép bizonyítás benne van a jegyzetben. Így elég belátni, hogy véges nullosztómentes gyűrű ferdetest.

## Emlékeztető (2.2.8. Gyakorlat)

Nullosztómentes gyűrűben érvényes az egyszerűsítési szabály:
ha $ac = bc$ de $c \neq 0$,

# Véges nullosztómentes gyűrű test

## 5.3.5. Tétel

Minden véges, nullosztómentes gyűrű test.

## Wedderburn tétele (6.7.13. Tétel, NB)

Minden véges ferdetest kommutatív.

Nehéz tétel, a nagyon szép bizonyítás benne van a jegyzetben.
Így elég belátni, hogy véges nullosztómentes gyűrű ferdetest.

## Emlékeztető (2.2.8. Gyakorlat)

Nullosztómentes gyűrűben érvényes az egyszerűsítési szabály:
ha $ac = bc$ de $c \neq 0$, akkor $a = b$.

# Véges nullosztómentes gyűrű test

## 5.3.5. Tétel

Minden véges, nullosztómentes gyűrű test.

## Wedderburn tétele (6.7.13. Tétel, NB)

Minden véges ferdetest kommutatív.

Nehéz tétel, a nagyon szép bizonyítás benne van a jegyzetben. Így elég belátni, hogy véges nullosztómentes gyűrű ferdetest.

## Emlékeztető (2.2.8. Gyakorlat)

Nullosztómentes gyűrűben érvényes az egyszerűsítési szabály: ha $ac = bc$ (vagy $ca = cb$), de $c \neq 0$, akkor $a = b$.

# Véges nullosztómentes gyűrű test

## 5.3.5. Tétel

Minden véges, nullosztómentes gyűrű test.

## Wedderburn tétele (6.7.13. Tétel, NB)

Minden véges ferdetest kommutatív.

Nehéz tétel, a nagyon szép bizonyítás benne van a jegyzetben.
Így elég belátni, hogy véges nullosztómentes gyűrű ferdetest.

## Emlékeztető (2.2.8. Gyakorlat)

Nullosztómentes gyűrűben érvényes az egyszerűsítési szabály: ha $ac = bc$ (vagy $ca = cb$), de $c \neq 0$, akkor $a = b$.

Bizonyítás: Ha $ac = bc$, akkor $(a - b)c = 0$.

# Véges nullosztómentes gyűrű test

### 5.3.5. Tétel

Minden véges, nullosztómentes gyűrű test.

### Wedderburn tétele (6.7.13. Tétel, NB)

Minden véges ferdetest kommutatív.

Nehéz tétel, a nagyon szép bizonyítás benne van a jegyzetben.
Így elég belátni, hogy véges nullosztómentes gyűrű ferdetest.

### Emlékeztető (2.2.8. Gyakorlat)

Nullosztómentes gyűrűben érvényes az egyszerűsítési szabály:
ha $ac = bc$ (vagy $ca = cb$), de $c \neq 0$, akkor $a = b$.

Bizonyítás: Ha $ac = bc$, akkor $(a - b)c = 0$. Mivel $c \neq 0$,

# Véges nullosztómentes gyűrű test

**5.3.5. Tétel**

Minden véges, nullosztómentes gyűrű test.

**Wedderburn tétele (6.7.13. Tétel, NB)**

Minden véges ferdetest kommutatív.

Nehéz tétel, a nagyon szép bizonyítás benne van a jegyzetben.
Így elég belátni, hogy véges nullosztómentes gyűrű ferdetest.

**Emlékeztető (2.2.8. Gyakorlat)**

Nullosztómentes gyűrűben érvényes az egyszerűsítési szabály: ha $ac = bc$ (vagy $ca = cb$), de $c \neq 0$, akkor $a = b$.

Bizonyítás: Ha $ac = bc$, akkor $(a - b)c = 0$. Mivel $c \neq 0$, a nullosztómentesség miatt $a - b = 0$. $\square$

# Véges nullosztómentes gyűrűk (bizonyítás)

## 5.3.4. Lemma

Ha $R$ nullosztómentes, $e \in R$, és van olyan $0 \neq r \in R$, melyre $er = r$,

# Véges nullosztómentes gyűrűk (bizonyítás)

## 5.3.4. Lemma

Ha $R$ nullosztómentes, $e \in R$, és van olyan $0 \neq r \in R$, melyre $er = r$, akkor $e$ egységelem.

# Véges nullosztómentes gyűrűk (bizonyítás)

## 5.3.4. Lemma

Ha $R$ nullosztómentes, $e \in R$, és van olyan $0 \neq r \in R$, melyre $er = r$, akkor $e$ egységelem.

Bizonyítás: Minden $t$-re $ter = tr$,

# Véges nullosztómentes gyűrűk (bizonyítás)

## 5.3.4. Lemma

Ha $R$ nullosztómentes, $e \in R$, és van olyan $0 \neq r \in R$, melyre $er = r$, akkor $e$ egységelem.

Bizonyítás: Minden $t$-re $ter = tr$, az $r$-rel egyszerűsítve $te = t$.

# Véges nullosztómentes gyűrűk (bizonyítás)

## 5.3.4. Lemma

Ha $R$ nullosztómentes, $e \in R$, és van olyan $0 \neq r \in R$, melyre $er = r$, akkor $e$ egységelem.

Bizonyítás: Minden $t$-re $ter = tr$, az $r$-rel egyszerűsítve $te = t$. Tehát $e$ jobboldali egységelem.

# Véges nullosztómentes gyűrűk (bizonyítás)

## 5.3.4. Lemma

Ha $R$ nullosztómentes, $e \in R$, és van olyan $0 \neq r \in R$, melyre $er = r$, akkor $e$ egységelem.

Bizonyítás: Minden $t$-re $ter = tr$, az $r$-rel egyszerűsítve $te = t$. Tehát $e$ jobboldali egységelem. Speciálisan $re = r$.

# Véges nullosztómentes gyűrűk (bizonyítás)

## 5.3.4. Lemma

Ha $R$ nullosztómentes, $e \in R$, és van olyan $0 \neq r \in R$, melyre $er = r$, akkor $e$ egységelem.

Bizonyítás: Minden $t$-re $ter = tr$, az $r$-rel egyszerűsítve $te = t$. Tehát $e$ jobboldali egységelem. Speciálisan $re = r$. Ugyanezt balról csinálva kapjuk, hogy $e$ bal egységelem is. $\square$

# Véges nullosztómentes gyűrűk (bizonyítás)

## 5.3.4. Lemma

Ha $R$ nullosztómentes, $e \in R$, és van olyan $0 \neq r \in R$, melyre $er = r$, akkor $e$ egységelem.

Bizonyítás: Minden $t$-re $ter = tr$, az $r$-rel egyszerűsítve $te = t$. Tehát $e$ jobboldali egységelem. Speciálisan $re = r$. Ugyanezt balról csinálva kapjuk, hogy $e$ bal egységelem is. □

## Bizonyítás (véges nullosztómentes gyűrű test)

Legyen $R = \{r_1, \ldots, r_n\}$ és $0 \neq r$.

# Véges nullosztómentes gyűrűk (bizonyítás)

## 5.3.4. Lemma

Ha $R$ nullosztómentes, $e \in R$, és van olyan $0 \neq r \in R$, melyre $er = r$, akkor $e$ egységelem.

Bizonyítás: Minden $t$-re $ter = tr$, az $r$-rel egyszerűsítve $te = t$. Tehát $e$ jobboldali egységelem. Speciálisan $re = r$. Ugyanezt balról csinálva kapjuk, hogy $e$ bal egységelem is. $\square$

## Bizonyítás (véges nullosztómentes gyűrű test)

Legyen $R = \{r_1, \ldots, r_n\}$ és $0 \neq r$. Ekkor $r_1 r, \ldots, r_n r$ a nullosztómentesség miatt csupa különböző elem.

# Véges nullosztómentes gyűrűk (bizonyítás)

## 5.3.4. Lemma

Ha $R$ nullosztómentes, $e \in R$, és van olyan $0 \neq r \in R$, melyre $er = r$, akkor $e$ egységelem.

Bizonyítás: Minden $t$-re $ter = tr$, az $r$-rel egyszerűsítve $te = t$. Tehát $e$ jobboldali egységelem. Speciálisan $re = r$. Ugyanezt balról csinálva kapjuk, hogy $e$ bal egységelem is. □

## Bizonyítás (véges nullosztómentes gyűrű test)

Legyen $R = \{r_1, \dots, r_n\}$ és $0 \neq r$. Ekkor $r_1 r, \dots, r_n r$ a nullosztómentesség miatt csupa különböző elem. Mivel $R$ véges, minden elemét megkapjuk.

# Véges nullosztómentes gyűrűk (bizonyítás)

## 5.3.4. Lemma

Ha $R$ nullosztómentes, $e \in R$, és van olyan $0 \neq r \in R$, melyre $er = r$, akkor $e$ egységelem.

Bizonyítás: Minden $t$-re $ter = tr$, az $r$-rel egyszerűsítve $te = t$.
Tehát $e$ jobboldali egységelem. Speciálisan $re = r$.
Ugyanezt balról csinálva kapjuk, hogy $e$ bal egységelem is. $\square$

## Bizonyítás (véges nullosztómentes gyűrű test)

Legyen $R = \{r_1, \ldots, r_n\}$ és $0 \neq r$. Ekkor $r_1 r, \ldots, r_n r$ a nullosztómentesség miatt csupa különböző elem.
Mivel $R$ véges, minden elemét megkapjuk.
Speciálisan $r = r_i r$ esetén a Lemma miatt $e = r_i$ egységelem.

# Véges nullosztómentes gyűrűk (bizonyítás)

## 5.3.4. Lemma

Ha $R$ nullosztómentes, $e \in R$, és van olyan $0 \neq r \in R$, melyre $er = r$, akkor $e$ egységelem.

Bizonyítás: Minden $t$-re $ter = tr$, az $r$-rel egyszerűsítve $te = t$. Tehát $e$ jobboldali egységelem. Speciálisan $re = r$. Ugyanezt balról csinálva kapjuk, hogy $e$ bal egységelem is. □

## Bizonyítás (véges nullosztómentes gyűrű test)

Legyen $R = \{r_1, \ldots, r_n\}$ és $0 \neq r$. Ekkor $r_1 r, \ldots, r_n r$ a nullosztómentesség miatt csupa különböző elem. Mivel $R$ véges, minden elemét megkapjuk. Speciálisan $r = r_i r$ esetén a Lemma miatt $e = r_i$ egységelem. Továbbá $e = r_j r$ esetén $r$-nek balinverze $r_j$.

# Véges nullosztómentes gyűrűk (bizonyítás)

## 5.3.4. Lemma

Ha $R$ nullosztómentes, $e \in R$, és van olyan $0 \neq r \in R$, melyre $er = r$, akkor $e$ egységelem.

Bizonyítás: Minden $t$-re $ter = tr$, az $r$-rel egyszerűsítve $te = t$. Tehát $e$ jobboldali egységelem. Speciálisan $re = r$. Ugyanezt balról csinálva kapjuk, hogy $e$ bal egységelem is. □

## Bizonyítás (véges nullosztómentes gyűrű test)

Legyen $R = \{r_1, \ldots, r_n\}$ és $0 \neq r$. Ekkor $r_1 r, \ldots, r_n r$ a nullosztómentesség miatt csupa különböző elem.
Mivel $R$ véges, minden elemét megkapjuk.
Speciálisan $r = r_i r$ esetén a Lemma miatt $e = r_i$ egységelem.
Továbbá $e = r_j r$ esetén $r$-nek balinverze $r_j$.
Ugyanezt a másik oldalról csinálva jobbinverzet kapunk. □