1. Kvadratikus alakok

Ortogonalizálás.

F7.2.4. Definíció
Legyen B bilineáris függvény a V vektortéren. A $v, w \in V$ vektorok B*-ortogonálisak*, ha $B(v, w) = 0$. A $b_1, \ldots, b_n$ bázis B*-ortogonális*, ha $i \neq j \implies B(b_i, b_j) = 0$.
A $b_1, \ldots, b_n$ bázis nyilván pontosan akkor B*-ortogonális*, ha B mátrixa ebben a bázisban diagonális.

F7.2.3. Tétel
Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Ekkor létezik B-ortogonális bázis. Ha V euklideszi tér, akkor van B-ortogonális *ONB* is.

Bizonyítás: háromféle eljárás (lásd Freud: 7.2. Szakasz).
Módosított Gauss-elimináció, illetve Gram-Schmidt módszer.
B-ortogonális ONB keresése: *sajátértékek* segítségével.

Ortogonalizálás ONB-ben.

Bizonyítás
Tudjuk, hogy $B(v, w) = \langle v, Aw \rangle$ alkalmas $A \in \mathrm{Hom}(V)$-re, ahol A valósban szimmetrikus, komplexben önadjungált. Ezért A ONB-ben diagonalizálható (valósban főtengelytétel). Legyen $b_1, \ldots, b_n$ ilyen ONB. Belátjuk, hogy ez B-ortogonális. Ha $Ab_j = \lambda_j b_j$, akkor $B(b_i, b_j) = \langle b_i, Ab_j \rangle = \lambda_j \langle b_i, b_j \rangle$, és ez nulla, ha $i \neq j$. □

$B(b_i, b_i) = \lambda_i$, azaz B mátrixában a főátló elemei éppen az A sajátértékei.
Másképp fogalmazva: tudjuk, hogy A és B mátrixa mindegyik ONB-ben ugyanaz. Legyen M a B mátrixa egy tetszőleges ONB-ben. Ha az M mátrixot egy alkalmas ONB-ben diagonalizáljuk, akkor ugyanez az ONB B-ortogonális is lesz, és a két diagonális mátrix ugyanaz.

Négyzetösszeg alak.

F7.2.5. Tétel
Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény és $b_1, \ldots, b_n$ B-ortogonális bázis.
Ekkor $\lambda_i = B(b_i, b_i)$ valós (hiszen $B(b_i, b_i) = \overline{B(b_i, b_i)}$). Ha $\lambda_i > 0$, akkor legyen $c_i = b_i/\sqrt{\lambda_i}$. Ha $\lambda_i < 0$, akkor legyen $c_i = b_i/\sqrt{-\lambda_i}$. Ekkor $c_1, \ldots, c_n$ is B-ortogonális bázis, melyben B mátrixának főátlójában minden elem 0, 1, vagy -1.
Ebben a bázisban a B-hez tartozó kvadratikus alak előjeles „négyzetösszeg”:
ha $v = x_1 c_1 + \ldots + x_n c_n$, akkor $Q(v) = B(v, v) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i |x_i|^2$, ahol $\mu_i \in \{0, 1, -1\}$.

Valóban: akár $\lambda_i > 0$, akár $\lambda_i < 0$,

$$B(c_i, c_i) = \frac{B(b_i, b_i)}{\sqrt{|\lambda_i|}\sqrt{|\lambda_i|}} = \frac{\lambda_i}{|\lambda_i|} = \pm 1.$$ □

A tehetetlenségi tétel.

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele
Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B-ortogonális bázist, az ebben felírt mátrix főátlójában szereplő pozitív, nulla és negatív elemek száma csak B-től függ, a bázistól nem.

Bizonyítás
Elég belátni, hogy a pozitív elemek száma nem függ a bázistól. Ezt ugyanis $-B$-re alkalmazva kapjuk, hogy a negatív elemek száma sem függ a bázistól. A nullák számát a főátlóban pedig úgy kapjuk, hogy a pozitív és a negatív elemek számát kivonjuk a tér dimenziójából, tehát akkor a nullák száma sem függ a bázistól.

Lemma a tehetetlenségi tételhez.

Lemma
Legyen $v_1, \ldots, v_k$ és $w_1, \ldots, w_\ell$ két független, B-ortogonális vektorrendszer. Tegyük föl, hogy $B(v_i, v_i) > 0$ és $B(w_j, w_j) \leq 0$ minden i, j-re. Ekkor ezek a vektorok együtt is függetlenek.

Bizonyítás
Tegyük föl, hogy $\sum x_i v_i + \sum y_j w_j = 0$ (ahol x_i, y_j skalárok). Legyen $v = \sum x_i v_i$ és $w = \sum y_j w_j$, ekkor $v = -w$. Innen

$$B(v, v) = \sum B(v_i, v_i)|x_i|^2 \geq 0$$

$$B(w, w) = \sum B(w_j, w_j)|y_i|^2 \leq 0\,.$$

De $B(v, v) = B(-w, -w) = B(w, w)$, így mindkét összeg nulla.
Mivel $B(v_i, v_i) > 0$, ez csak úgy lehet, ha $x_1 = \ldots = x_k = 0$. Ezért $\sum y_j w_j = 0$, így a függetlenség miatt minden $y_j = 0$. $\square$

A tehetetlenségi tétel bizonyítása.

Tegyük föl, hogy adott két B-ortogonális bázis. Legyen $n = \dim(V)$, továbbá M_1 és M_2 a B mátrixa az első, illetve a második bázisban. Jelölje k_1, illetve k_2 rendre az M_1, illetve M_2 főátlójában a pozitív elemek számát. Be kell látni, hogy $k_1 = k_2$.
Az M_i főátlójában nyilván $n - k_i$ nempozitív elem van. Legyenek $v_1, \ldots, v_{k_1}$ az első bázisból azok a vektorok, melyekre $B(v_i, v_i) > 0$ (ezek száma tehát k_1), továbbá $w_1, \ldots, w_{n-k_2}$ a második bázisból azok a vektorok, melyekre $B(w_j, w_j) \leq 0$ (ezek száma $n - k_2$).
A lemma miatt ezek együtt is függetlenek, így $k_1 + (n - k_2) \leq \dim(V) = n$, ahonnan $k_1 \leq k_2$. A két bázist megcserélve $k_2 \leq k_1$. $\square$

Kvadratikus alak karaktere.

F7.3.2 Definíció, F7.3.3 Tétel
Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, és Q a hozzá tartozó kvadratikus alak, továbbá M a B mátrixa egy B-ortogonális bázisban.

(1) Q *pozitív definit*, ha $v \neq 0 \implies Q(v) > 0$.
(Az M mátrix főátlójában minden elem pozitív.)

(2) Q *negatív definit*, ha $v \neq 0 \implies Q(v) < 0$.
(Az M mátrix főátlójában minden elem negatív.)

(3) Q *pozitív szemidefinit*, ha $(\forall v) Q(v) \geq 0$.
(Az M mátrix főátlójában minden elem nemnegatív.)

(4) Q *negatív szemidefinit*, ha $(\forall v) Q(v) \leq 0$.
(Az M mátrix főátlójában minden elem nempozitív.)

(5) Q *indefinit*, ha pozitív és negatív értéket is felvesz.
(Az M mátrix főátlójában van pozitív és van negatív elem.)

Kvadratikus karakter és aldeterminánsok.

F7.3.4 Tétel (NB)
Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, Q a hozzá tartozó kvadratikus alak, és M a B mátrixa egy *nem feltétlenül* B*-ortogonális* bázisban. Jelölje d_k az M mátrix első k sorából és első k oszlopából készített részmátrix determinánsát.

(1) A Q pontosan akkor pozitív definit, ha minden $d_k > 0$.

(2) A Q pontosan akkor negatív definit, ha $d_1 < 0$, $d_2 > 0$, $d_3 < 0$, és így tovább, azaz $d_k > 0$ ha k páros és $d_k < 0$ ha k páratlan.

Ezt könnyű ellenőrizni, ha a bázis B-ortogonális (HF). A kvadratikus karakter jelzőit B-re is alkalmazzuk. A skaláris szorzatot tehát definiálhatjuk, mint *pozitív definit* szimmetrikus, illetve Hermite-féle bilineáris függvényt.

Illusztráció másodrendű görbékkel.

Tétel (Hajós: Bevezetés a geometriába, 47. §, NB).
Tekintsük az $ax^2 + by^2 + cxy = 1$ egyenletű görbét a síkon.
Ha a bal oldali kvadratikus alak

(1) pozitív definit, akkor a görbe *ellipszis*. Ez akkor teljesül, ha $a > 0$ és $c^2 < 4ab$.

(2) indefinit, akkor a görbe *hiperbola*. Ez akkor teljesül, ha $c^2 > 4ab$.

Magyarázat: Legyen B a fenti kvadratikus alakhoz tartozó szimmetrikus bilineáris függvény, mátrixa $M = \begin{bmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{bmatrix}$. Ennek determinánsa $ab - c^2/4$, így karaktere leolvasható. Diagonalizáljuk ezt ONB-ben, a főátló elemei legyenek u és v. Az új koordinátarendszerben az egyenlet $ux^2 + vy^2 = 1$.