1. Önadjungált és szimmetrikus transzformációk

Önadjungált transzformációk.

F8.5.4. Definíció
Legyen A lineáris transzformáció egy komplex euklideszi téren.
Az A *önadjungált*, ha $A^* = A$.

Emlékeztető: Unitér transzformáció: $A^* = A^{-1}$.
Unitér $\iff$ normális, és minden sajátérték abszolút értéke 1.

F8.5.1. Feladat
Az A akkor és csak akkor önadjungált, ha normális, és minden (komplex feletti) sajátértéke valós.

Bizonyítás: Ha $\mathbf{b}$ ONB és $[A]_{\mathbf{b}}$ diagonális, akkor $[A^*] = [A]$ azt jelenti, hogy minden λ sajátértékre $\overline{\lambda} = \lambda$, azaz λ valós (hiszen a komplex sajátértékek a mátrix főátlójának elemei). A felcserélhető önmagával így $A^* = A \implies A$ normális. $\square$

Szimmetrikus transzformációk.

F8.6.2. Definíció
Legyen A lineáris transzformáció egy valós euklideszi téren.
Az A *szimmetrikus*, ha $A^* = A$.

Ez azt jelenti, hogy minden ortonormált bázisban a mátrixa önmagának transzponáltja, vagyis szimmetrikus mátrix.

F8.6.2. Főtengelytétel
Az A akkor és csak akkor diagonalizálható (valós felett) *ortonormált bázisban*, ha szimmetrikus.

Bizonyítás
Ha $\mathbf{b}$ ONB és $[A]_{\mathbf{b}}$ diagonális, akkor ez a mátrix szimmetrikus, ezért A is szimmetrikus transzformáció.

A főtengelytétel bizonyítása.

Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus, azaz $A^* = A$. Legyen $\mathbf{b}$ ONB és $M = [A]_{\mathbf{b}}$, ekkor M szimmetrikus mátrix. Mivel M valós mátrix, ezért önadjungált, és így a most bizonyított tétel miatt a komplex sajátértékei mind valósak. Tehát A karakterisztikus polinomjának gyökei valósak, és így A-nak is van egy λ *valós* sajátértéke. Ha v ehhez tartozó sajátvektor, és W az általa generált altér, akkor W A-invariáns, ezért $W^\perp$ $A^* = A$-invariáns. Ezért ugyanaz az indukció működik, mint a normális transzformációk esetében. $\square$

Megjegyzés: Az $Mv = \lambda v$ lineáris egyenletrendszer, aminek megoldása a λ-hoz tartozó sajátvektorokat adja. Azt azonban be kell látni, hogy van „elegendő” ortonormált valós sajátvektor. Ez a fenti bizonyítás vége.

2. Kvadratikus alakok

A főtengelytétel elnevezés magyarázata.

Miért nevezzük az előbbi eredményt főtengelytételnek?

Tekintsük az $x^2 + 2y^2 = 1$ egyenletű *ellipszist* a síkon. A két tengely a két koordinátatengely, így merőlegesek. A fenti egyenletet átírhatjuk skaláris szorzat segítségével.

Legyen $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, ekkor $Mv = \begin{bmatrix} x \\ 2y \\ -1 \end{bmatrix}$,

és így $0 = x^2 + 2y^2 - 1 = \langle v, Mv \rangle$. A két tengelyirány éppen M két sajátvektorának felel meg. Hasonlóan felírhatunk minden *másodfokú* síkgörbét, és a tengelyeket a mátrix sajátvektoraiként kapjuk. Merőlegesek, mert a mátrixot szimmetrikusnak választhatjuk! Jobb az $x^2 + 2y^2 = z^2$ egyenletet nézni: ez egy *kúp*. Az ellipszist ebből a $z = 1$ sík metszi ki.

Valós kvadratikus alak.

F7.3.1. Definíció
Kvadratikus alak: homogén másodfokú polinom.
$Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{i,j} r_{ij} x_i x_j$, ahol $r_{ij} \in \mathbb{R}$.

Példa: $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 + 7x_3^2$.

Legyen $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, ekkor $Q = \langle v, Mv \rangle$.

De Q felírható *szimmetrikus* mátrixszal is:

Legyen $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$, ekkor $Q = \langle v, Mv \rangle$.

Felírás *mátrixszorzással*: $Q = v^T M v$ (HF).

Kvadratikus alak mátrixos alakja.

Legyen $M = ((\lambda_{ij})) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{bmatrix}$. Ekkor
$\langle v, Mw \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} x_i y_j = v^T M w$, így
$\langle v, Mv \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} x_i x_j = v^T M v$ (HF).

Megjegyzés: Mivel $x_i x_j = x_j x_i$, ezért a $\sum \lambda_{ij} x_i x_j$ polinomból nem lehet egyértelműen visszakapni az M mátrixot, hanem csak $\lambda_{ij} + \lambda_{ji}$ van meghatározva ($i \neq j$ esetén). Ha $x_i x_j = x_j x_i$ együtthatója a polinomban *összevonva* r_{ij},
akkor legyen $\lambda_{ij} = \lambda_{ji} = r_{ij}/2$. Ezzel beláttuk:

Minden (valós) kvadratikus alak *egyértelműen* felírható $\langle v, Mv \rangle = v^T M v$ alakban, ahol M *szimmetrikus* mátrix.

3. Bilineáris függvények

Algebrai tulajdonságok.

Legyen $M = ((\lambda_{ij})) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$,
továbbá $B(v, w) = \langle v, Mw \rangle = v^T M w = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i y_j$.
Ekkor tetszőleges $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén (HF):

(1) $B(u + v, w) = B(u, w) + B(v, w)$.

(2) $B(\lambda v, w) = \lambda B(v, w)$.

(3) $B(w, u + v) = B(w, u) + B(w, v)$.

(4) $B(w, \lambda v) = \lambda B(w, v)$.

(5) Ha M szimmetrikus mátrix, akkor $B(v, w) = B(w, v)$ (azaz B *szimmetrikus*).

Ez tehát a valós skaláris szorzat egy általánosítása.

Valós bilineáris függvény.

F7.1.1. Definíció
Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ fölött és B kétváltozós, V-n értelmezett, $\mathbb{R}$-be képező függvény. A B függvény *bilineáris*, ha mindkét változóban lineáris (az iménti (1) – (4) tulajdonság). A B *szimmetrikus*, ha $B(v, w) = B(w, v)$ minden v, w-re.
$Q(v) = B(v, v)$ a B-hez tartozó *kvadratikus alak* ($Q : V \to \mathbb{R}$).

Állítás (HF)
Legyen $b_1, \dots, b_n$ bázis V-ben,
$v = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n$ és $w = y_1 b_1 + \dots + y_n b_n$.
Ekkor $B(v, w) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i y_j$, ahol $\lambda_{ij} = B(b_i, b_j)$,
továbbá $Q(v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_i x_j$.
A B pontosan akkor szimmetrikus, ha $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$ minden i, j-re.

Bilineáris függvény mátrixa.

F7.1.3. Definíció
Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben. Ekkor a B bilineáris függvény *mátrixa* ebben a bázisban $[B]_{\mathbf{b}} = \big(\big(B(b_i, b_j)\big)\big)$.

F7.1.4. Tétel
B-t a mátrixa egyértelműen meghatározza. Megfordítva, minden M mátrixhoz tartozik bilineáris függvény, amit $v = x_1b_1 + \ldots + x_nb_n$ és $w = y_1b_1 + \ldots + y_nb_n$ esetén $B(v, w) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} x_i y_j$ definiál, ahol $M = ((\lambda_{ij}))$. $\square$

A lineáris leképezések előírhatósági tételére hasonlít (F5.3.1).
A $Q(v) = B(v, v) = \sum \lambda_{ij} x_i x_j$ „absztrakt" kvadratikus alak több bilineáris függvényből is származtatható, és ezek között pontosan *egy* lesz szimmetrikus.

Bilineáris és lineáris függvény.

Következmény
Legyen V valós euklideszi tér, $\mathbf{b} = b_1, \ldots, b_n$ ONB, B bilineáris függvény V-n, $[B]_{\mathbf{b}} = M$, és A az a lineáris transzformáció V-n, melyre $[A]_{\mathbf{b}} = M$. Ekkor tetszőleges $v, w \in V$ esetén $B(v, w) = \langle v, A(w)\rangle$. Ez a kapcsolat kölcsönösen egyértelmű a bilineáris függvények és V lineáris transzformációi között. B akkor és csak akkor *szimmetrikus*, ha M szimmetrikus, akkor és csak akkor, ha A szimmetrikus.

Bizonyítás
Ha $M = ((\lambda_{ij}))$, akkor $\langle b_i, A(b_j)\rangle = \lambda_{ij}$, mert $\mathbf{b}$ ONB. Legyen $v = x_1b_1 + \ldots + x_nb_n$ és $w = y_1b_1 + \ldots + y_nb_n$. Ekkor $B(v, w) = \langle v, A(w)\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} x_i y_j$. $\square$

Komplex bilineáris függvény.

Változások a valóshoz képest (F7.4. szakasz)
A bilineáris függvény definíciójában $B(\lambda v, w) = \overline{\lambda} B(v, w)$.
Emiatt $B(v, w) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} \overline{x_i} y_j$ és $Q(v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} \overline{x_i} x_j$.
Itt $\overline{x_i} x_j \neq \overline{x_j} x_i$, ezért a λ_{ij} együtthatót már a kvadratikus alak is egyértelműen meghatározza. Vagyis minden kvadratikus alak pontosan egy bilineáris függvényből származik.

F7.1.4. Tétel (HF, NB)
Komplex felett a B bilineáris függvényhez tartozó $B(v, v)$ kvadratikus alak értékkészlete akkor és csak akkor valós, ha B *Hermite-féle*:
minden $v, w \in V$-re $B(v, w) = \overline{B(w, v)}$.
Ezek pontosan azok, amelyek mátrixa *önadjungált*, vagyis $B(v, w) = \langle v, A(w)\rangle$, ahol A önadjungált transzformáció.