1. Transzformáció adjungáltja

Transzformáció mátrixa.
Rövidítés: *ONB* = OrtoNormált Bázis.

Állítás
Legyen V euklideszi tér, $b_1, \ldots, b_n$ ONB és $A \in \mathrm{Hom}(V)$. Ekkor A mátrixa a $b_1, \ldots, b_n$ bázisban $[A]_{\mathbf{b}} = \big(\big(\langle b_i, A(b_j)\rangle\big)\big)$
(vagyis az i-edik sor j-edik eleme $\langle b_i, A(b_j)\rangle$).

Bizonyítás
Ha az A mátrixában az i-edik sor j-edik eleme λ_{ij}, akkor $A(b_j) = \lambda_{1j} b_1 + \ldots + \lambda_{nj} b_n$. Tudjuk, hogy $A(b_j)$-nek az i-edik koordinátája $\langle b_i, A(b_j)\rangle$. $\square$

Megjegyzés: a fenti komplex fölött is igaz, $\langle b_i, A(b_j)\rangle = \lambda_{ij}$, mert a skaláris szorzat a *második* tényezőben lineáris. Itt azonban fontos a tényezők sorrendje a skaláris szorzatban!

Transzponált konjugált.

Freud, 8.4.1. és 8.4.2. Tétel
Legyen V euklideszi tér, $b_1, \ldots, b_n$ ONB és $A, B \in \mathrm{Hom}(V)$. Ekkor $[A]_{\mathbf{b}}$ és $[B]_{\mathbf{b}}$ pontosan akkor egymás transzponált konjugáltjai, ha $\langle B(v), w\rangle = \langle v, A(w)\rangle$ minden $v, w \in V$-re.

Az (egyértelműen meghatározott) B az A *adjungáltja*, jele A^*.
Az M mátrix adjungáltja a transzponált konjugáltja, jele M^*.
Megjegyzés: valós fölött a konjugálás persze fölösleges.

Bizonyítás
A v és w vektorokat a $b_1, \ldots, b_n$ bázisban felírva látszik,
hogy a $\langle B(v), w\rangle = \langle v, A(w)\rangle$ egyenlőséget elég akkor megkövetelni, ha v és w is bázisvektor (HF).
Mivel $\langle B(b_i), b_j\rangle = \overline{\langle b_j, B(b_i)\rangle}$, és ez a $[B]_{\mathbf{b}}$ transzponált konjugáltjában az i-edik sor j-edik eleme, az állítás igaz. $\square$

Invariáns altér.

Freud, 6.4.1. Definíció
A $W \leq V$ altér az $A \in \mathrm{Hom}(V)$ transzformációnak *invariáns altere*, ha minden $w \in W$ esetén $A(w) \in W$.

Azaz A nem tud W-ből vektort kivinni.

Freud, 8.4.3. Tétel
Ha $W \leq V$ A-invariáns, akkor $W^\perp$ A^*-invariáns.

Bizonyítás
Legyen $v \in W^\perp$, be kell látni, hogy $A^*(v) \in W^\perp$. Ez azt jelenti, hogy $A^*(v)$ merőleges minden W-belire, azaz tetszőleges $w \in W$-re $\langle w, A^*(v)\rangle = 0$. Ez igaz, mert $\langle w, A^*(v)\rangle = \langle A(w), v\rangle = 0$, hiszen $A(w) \in W$ és $v \in W^\perp$. $\square$

Mátrixok blokkfelbontása.

Kiss, 7.6.1. Állítás, HF
Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis a V vektortérben, U a $b_1, \ldots, b_m$ és W a $b_{m+1}, \ldots, b_n$ által generált altér. Ekkor $V = U \oplus W$. Legyen $A \in \mathrm{Hom}(V)$. Az U és W alterek pontosan akkor A-invariánsak, ha

$$[A]_{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} K & O_1 \\ O_2 & L \end{bmatrix},$$

ahol a K blokk $m \times m$-es, az L blokk $(n-m) \times (n-m)$-es, az O_1 és O_2 mátrixok pedig csupa nullából állnak.

Ilyenkor az A leképezés megszorítható U-ra, és a megszorítás mátrixa a $b_1, \ldots, b_m$ bázisban K. Hasonlóan A megszorítható W-re, és ennek mátrixa L.

2. Az euklideszi terek speciális transzformációi

Szép alak ortonormált bázisban.
Emlékeztető (F6.6.4 Tétel): Komplex fölött minden transzformáció mátrixa alkalmas bázisban *Jordan-alakú*. Ez speciális felső háromszögmátrix.

F8.5.15. Feladat (gyakorlaton bizonyítjuk)
Komplex fölött minden transzformáció mátrixa alkalmas *ortonormált* bázisban felső háromszögmátrix.

Emlékeztető (F6.6.1 Feladat): Komplex fölött az $A \in \mathrm{Hom}(V)$ pontosan akkor diagonalizálható (a bázisra nincs megkötés), ha a minimálpolinomjának minden gyöke egyszeres.

F8.5.2. Tétel
Komplex fölött az $A \in \mathrm{Hom}(V)$ pontosan akkor diagonalizálható *ortonormált* bázisban, ha $AA^* = A^*A$ (*normális* transzformáció).

Normális transzformációk: bizonyítás.

Ha $[A]_{\mathbf{b}}$ diagonális, akkor a transzponált konjugáltja is. Diagonális mátrixok felcserélhetők, így A és A^* is.
Megfordítva: Indukció $\dim(V)$ szerint. Egy dimenzióban igaz.
Legyen λ sajátértéke A^*-nak (komplex fölött létezik), és U a hozzá tartozó sajátaltér: $u \in U \iff A^*(u) = \lambda u$.
Belátjuk, hogy az U altér A-invariáns, legyen $u \in U$.
Ekkor $A^*A(u) = AA^*(u) = A(\lambda u) = \lambda A(u)$. Vagyis $A(u) \in U$.
Így A-nak van egy w sajátvektora U-ban. Tehát a w által generált W altér A- *és* A^*-invariáns. Emiatt $W^\perp$ is A- *és* $(A^*)^* = A$-invariáns.
A és A^* az $W^\perp$ altéren is adjungáltak és felcserélhetők (HF).
Az indukciós feltevés miatt van $W^\perp$-ban $b_2, \ldots, b_n$ ONB melyben A mátrixa diagonális. Legyen $b_1 = w/\|w\|$. Ekkor $b_1, \ldots, b_n$ megfelelő ONB. $\square$

Normális transzformációk: sajátalterek.

F8.5.8. Feladat

Legyen $A \in \operatorname{Hom} V$ normális transzformáció. Ekkor A sajátalterei páronként merőlegesek, és V ezeknek a direkt összege. Ugyanezek A^* sajátalterei is, és a sajátértékek az A megfelelő sajátértékeinek konjugáltjai.

Bizonyításvázlat

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ ONB, melyben A mátrixa diagonális. Ekkor mindegyik b_j sajátvektor: $A(b_j) = \lambda_j b_j$. A $\lambda = \lambda_j$-hez tartozó sajátalteret azok a b_k-k generálják, amelyekre $\lambda_k = \lambda$. Mert HF: $v = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$-re $A(v) = \lambda v \iff \mu_k = 0$ minden k-ra, melyre $\lambda_k \neq \lambda$. Így e sajátalterek merőlegesek. Az A^* mátrixa az $[A]_{\mathbf{b}}$ transzponált konjugáltja, ezért mindez A^*-ra is igaz, csak λ_j helyett $\overline{\lambda_j}$ szerepel. $\square$

Egybevágósági transzformációk.

F8.5.6. Tétel

V euklideszi tér, $A \in \operatorname{Hom}(V)$. Ekvivalensek:

(1) A^* inverze A-nak.

(2) A *skalárszorzattartó*, azaz $(\forall u, v)$ $\langle Au, Av\rangle = \langle u, v\rangle$.

(3) A *normatartó*, azaz $(\forall u)$ $\|Au\| = \|u\|$.

(4) A *távolságtartó*, azaz $(\forall u, v)$ $\|Au - Av\| = \|u - v\|$.

(5) A minden ONB-t ONB-be visz.

(6) Minden $\mathbf{b}$ ONB-ben $[A]_{\mathbf{b}}$ inverze $[A]_{\mathbf{b}}^*$.

(7) A alkalmas ONB-t ONB-be visz.

(8) Alkalmas $\mathbf{b}$ ONB-ben $[A]_{\mathbf{b}}$ inverze $[A]_{\mathbf{b}}^*$.

(9) A normális, és sajátértékei 1 abszolút értékűek.

Elnevezés: Valósban *ortogonális*, komplexben *unitér*.

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás.

(1) $\implies$ (6) $\implies$ (8) $\implies$ (1) és (2) $\implies$ (3) $\iff$ (4) triviális.
(1) $\implies$ (2): Ha $A^*A = I$, akkor $\langle u, v\rangle = \langle u, A^*Av\rangle = \langle Au, Av\rangle$.
(3) $\implies$ (2): $\|A(u + \lambda v)\|^2 = \|u + \lambda v\|^2 = \langle u + \lambda v, u + \lambda v\rangle$.
$\langle u + \lambda v, u + \lambda v\rangle = \langle u, u\rangle + \lambda\langle u, v\rangle + \overline{\lambda}\langle v, u\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle v, v\rangle =$
$= \|u\|^2 + |\lambda|^2\|v\|^2 + 2\operatorname{Re}(\lambda\langle u, v\rangle)$, hiszen $\langle v, u\rangle = \overline{\langle u, v\rangle}$,
és $\|A(u + \lambda v)\|^2 = \|Au\|^2 + |\lambda|^2\|Av\|^2 + 2\operatorname{Re}(\lambda\langle Au, Av\rangle)$.
Innen $\operatorname{Re}(\lambda\langle Au, Av\rangle) = \operatorname{Re}(\lambda\langle u, v\rangle)$ minden $\lambda \in \mathbb{C}$-re.
Ezt $\lambda = 1$-re és $\lambda = i$-re alkalmazva $\langle Au, Av\rangle = \langle u, v\rangle$.
(2) $\implies$ (5): $\langle Ab_j, Ab_k\rangle = \langle b_j, b_k\rangle = 1$, ha $j = k$, 0 egyébként.

(5) $\implies$ (7): triviális. (7) $\implies$ (8): $\langle Ab_j, Ab_k\rangle = \langle b_j, A^*Ab_k\rangle$, tudjuk, hogy ezek $[A^*A]_{\mathbf{b}}$ elemei. De $\langle Ab_j, Ab_k\rangle = \langle b_j, b_k\rangle$, és mivel $b_1, \ldots, b_n$ ONB, ezért $[A^*A]_{\mathbf{b}}$ az egységmátrix.
(1) $\iff$ (9): Ha **b** ONB és $[A]_{\mathbf{b}}$ diagonális, akkor $[A^*] = [A^{-1}]$ azt jelenti, hogy minden sajátértékre $\overline{\lambda} = \lambda^{-1}$, azaz $|\lambda| = 1$.
A felcserélhető az inverzével, így $A^* = A^{-1} \implies A$ normális.

Egybevágósági transzformációk: megjegyzések.

Az előző tétel szerint egy bázistranszformáció akkor és csak akkor visz ortonormált bázist ortonormált bázisba, ha az áttérés mátrixa unitér, illetve ortogonális. Speciálisan minden $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrixhoz van olyan unitér $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$, hogy $U^{-1}MU$ felső háromszögmátrix.

A normalitás valós mátrix esetében azt jelenti, hogy felcserélhető a transzponáltjával. Ebből azonban csak az következik, hogy *komplex* fölött van ortonormált sajátbázisa.

Egy valós mátrix akkor ortogonális, ha a transzponáltja az inverze, azaz ha komplex fölött ONB-ben diagonalizálható, és minden komplex sajátérték abszolút értéke 1. Mi a legszebb alakja *valós* fölött?

Ortogonális transzformációk.

F8.6.4. Tétel
Egy valós euklideszi téren ható A lineáris transzformáció pontosan akkor ortogonális, ha van olyan ortonormált bázis, amelyben A mátrixa diagonális blokkokra bomlik, ahol minden blokk vagy 1×1-es, és az eleme ± 1, vagy $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ alakú alkalmas $\alpha \in \mathbb{R}$-re.

Vagyis minden sokdimenziós egybevágóság síkbeli forgatásokra, valamint „tükrözésekre" „bontható".
A bizonyítás ötlete: A karakterisztikus polinom valós együtthatós, így a sajátértékek konjugált párok, vagy ± 1.
Az A mátrixa ONB-ben M. Ha $Mv = \lambda v$, akkor $M\overline{v} = \overline{\lambda}\overline{v}$. Legyen $b_1 = (v + \overline{v})/\sqrt{2}$ és $b_2 = -i(v - \overline{v})/\sqrt{2}$. Ekkor b_1 és b_2 valós, ortonormált, invariáns alteret generál, és ebben A mátrixa a fenti forgatás.