1. Az euklideszi terek geometriája

Bázishoz tartozó skaláris szorzat.

Definíció

Az $\mathbb{R}^n$ vektortérbeli $v = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_n \end{bmatrix}$ vektorok *skaláris szorzata* $\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \dots + \lambda_n\mu_n$. Jele $\langle v, w \rangle$.

Freud, 8.1.1. Definíció

Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ fölött és $b_1, \dots, b_n$ bázis V-ben. Ha $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \dots + \mu_n b_n$, akkor

$$\langle v, w \rangle = \lambda_1\mu_1 + \dots + \lambda_n\mu_n$$

a $b_1, \dots, b_n$ bázishoz tartozó *skaláris szorzat*.

A fenti definíció $\mathbb{R}^n$-ben a szokásos bázishoz tartozó skaláris szorzatot adja meg.

Euklideszi tér.

F8.1.3. Definíció

Legyen V véges dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ fölött. A kétváltozós $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{R}$ függvény *skaláris szorzat*, ha tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$.

(2) $\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$.

(3) $\langle w, u + v \rangle = \langle w, u \rangle + \langle w, v \rangle$.

(4) $\langle w, \lambda v \rangle = \lambda \langle w, v \rangle$.

(5) $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ (*szimmetrikus*).

(6) $\langle v, v \rangle \geq 0$ és $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$ (*pozitív definit*).

Euklideszi tér: skaláris szorzattal ellátott vektortér.

(1) és (2) együttes neve: az első változóban *lineáris* (vagyis $A(v) = \langle v, w \rangle$ lineáris leképezés minden rögzített w-re).

Hossz, távolság.

Állítás

Minden bázishoz tartozó skaláris szorzat teljesíti az előző definícióban felsorolt hat tulajdonságot.

Bizonyítás

Az $(1) - (5)$ igazolása HF. A (6) azért igaz, mert $\langle v, v \rangle = \lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2 > 0$, kivéve ha mindegyik $\lambda_j = 0$. $\square$

Belátjuk majd, hogy minden skaláris szorzat bázishoz tartozik.

A továbbiakban V euklideszi tér $\mathbb{R}$ fölött és $u, v, w \in V$.

Freud, 8.2.1. és 8.2.4 Definíció
A v *normája* vagy *hossza* $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$. A v és w *távolsága* $\|v - w\|$.

Vektorok szöge.

F8.2.7. Definíció
A v, w nem nulla vektorok *szögén* azt a $0 \le \alpha \le 180^\circ$ szöget értjük, amelyre $\langle v, w\rangle = \|v\|\|w\| \cos\alpha$.

F8.2.8 Cauchy–Bunyakovszkij–Schwartz-egyenlőtlenség
$|\langle v, w\rangle| \le \|v\|\|w\|$, és egyenlőség pontosan akkor áll, ha v és w párhuzamos, azaz lineárisan összefüggő.

Emiatt két vektor szöge értelmes, mert $-1 \le \cos\alpha \le 1$.

Bizonyítás
$\forall x \in \mathbb{R}$-re $0 \le \langle xv + w, xv + w\rangle = x^2\langle v, v\rangle + 2x\langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle$.
Ez x-ben másodfokú polinom $\implies$ diszkriminánsa nempozitív.
Így $\big(2\langle v, w\rangle\big)^2 \le 4\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle$. Négyzetgyökvonással kész. $\square$

A háromszög-egyenlőtlenség.

F8.2.2. Háromszög-egyenlőtlenség
$\|v + w\| \le \|v\| + \|w\|$, és egyenlőség pontosan akkor áll, ha v és w egyike a másik *nemnegatív* valós számszorosa.

Bizonyítás
Mivel mindkét oldal nemnegatív, elég a négyzetét belátni, ami
$\langle v, v\rangle + 2\langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle \le \langle v, v\rangle + 2\|v\|\|w\| + \langle w, w\rangle$.
Ez a CBS-egyenlőtlenség miatt igaz.
Egyenlőség akkor áll, ha $\langle v, w\rangle \ge 0$, továbbá a CBS-ben egyenlőség van. $\square$

F8.1.5. Definíció
v *merőleges* vagy *ortogonális* w-re, ha $\langle v, w\rangle = 0$. Jele $v \perp w$. Vagyis $v \perp w$ pontosan akkor, ha a szögük derékszög.

2. Ortogonalitás

Ortonormált bázis.

F8.1.4. Definíció
Normált vektor: hossza 1. A v vektor „normáltja” $v/\|v\|$.
Ortogonális vektorrendszer: bármely két eleme ortogonális.
Ortonormált vektorrendszer: ortogonális, elemei normáltak.

Tétel
Tegyük föl, hogy $b_1, \dots, b_n$ ortonormált bázis.
Ekkor minden v-re $v = \langle b_1, v\rangle b_1 + \dots + \langle b_n, v\rangle b_n$.

Azaz a koordináták kiszámításához nem kell egyenletrendszer!

Bizonyítás
Ha $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$, akkor $\langle b_j, v\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle b_j, b_k\rangle = \lambda_j$, hiszen $k \neq j$-re $\langle b_j, b_k\rangle = 0$, és $\langle b_j, b_j\rangle = \|b_j\|^2 = 1$. □

Ortonormált rendszer független.

F8.1.2. Feladat
Nem nulla vektorokból álló ortogonális rendszer független.

Bizonyítás
Legyen $v_1, \dots, v_m$ ilyen rendszer és $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = 0$. A v_j-vel skalárisan szorozva $0 = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \langle v_k, v_j\rangle = \lambda_j \langle v_j, v_j\rangle$, hiszen $k \neq j$-re $\langle v_k, v_j\rangle = 0$ az ortogonalitás miatt. Mivel $v_j \neq 0$ ezért $\langle v_j, v_j\rangle \neq 0$, és így $\lambda_j = 0$. □

Így minden $\dim V$ elemszámú ortonormált rendszer bázis.

Tétel
Minden ortonormált rendszer kibővíthető ortonormált bázissá. Speciálisan minden euklideszi térben van ortonormált bázis.

A Gram–Schmidt-módszer.

Gram–Schmidt-ortogonalizáció (Freud, 202. oldal)
Tegyük föl, hogy $b_1, \dots, b_m$ ortonormált rendszer,
és a v vektor nincs benne a $b_1, \dots, b_m$ által generált altérben.
Legyen $w = v - \langle b_1, v\rangle b_1 - \dots - \langle b_m, v\rangle b_m$,
ekkor w ortogonális $b_1, \dots, b_m$ mindegyikére (HF).
Így ha $b_{m+1} = w/\|w\|$, akkor $b_1, \dots, b_{m+1}$ ortonormált. □

Állítás
Ha $b_1, \dots, b_k$ ortonormált bázis, akkor a hozzá tartozó skaláris szorzat ugyanaz, mint a tér eredeti skaláris szorzata. Vagyis minden skaláris szorzat tényleg bázisból származik.

Valóban: ha $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \dots + \mu_n b_n$,
akkor $\langle v, w\rangle = \sum_{j,k} \lambda_j \mu_k \langle b_j, b_k\rangle = \sum_j \lambda_j \mu_j$. □

Ortogonális kiegészítő altér.

F8.1.6. Definíció
Legyen $H \subseteq V$. Ekkor $H^\perp$ jelöli azon vektorok halmazát, amelyek *minden* H-beli vektorra merőlegesek. Ez altér (HF).
Ha H altér, akkor $H^\perp$ a H *ortogonális kiegészítő altere*.

F8.1.7. Tétel
Minden U altérre $V = U \oplus U^{\perp}$. Azaz V minden eleme egyértelműen felírható egy U-beli és egy U-ra merőleges vektor összegeként.

Bizonyítás
Nyilván $v \in U \cap U^{\perp}$ esetén $\langle v, v \rangle = 0$. Innen $v = 0$, tehát $U \cap U^{\perp} = \{0\}$. Kell még: $U + U^{\perp} = V$.

Ortogonális kiegészítő altér: bizonyítás.

Bizonyítás (folytatás)
Legyen $b_1, \ldots, b_m$ ortonormált bázis U-ban.
Ha $v \in V$, akkor legyen $u = \langle b_1, v \rangle b_1 + \ldots + \langle b_m, v \rangle b_m$. A Gram-Schmidt-eljárásban láttuk, hogy $w = v - u$ merőleges mindegyik b_j-re, és ezért az összes lineáris kombinációikra is. Így $w \in U^{\perp}$, és $u \in U$ miatt $v = u + w$ a kívánt felbontás. $\square$

Az u-t a v vektor U-ra vett *merőleges vetületének* hívjuk.
Megjegyzés: Egészítsük ki $b_1, \ldots, b_m$-et a Gram–Schmidt- eljárással V egy $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált bázisává. Ekkor $U^{\perp}$ a $b_{m+1}, \ldots, b_n$ által generált altér (HF).

F8.1.9. Feladat (HF)
$(U^{\perp})^{\perp} = U$, $(U_1 \cap U_2)^{\perp} = U_1^{\perp} + U_2^{\perp}$, $(U_1 + U_2)^{\perp} = U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp}$.

Komplex euklideszi tér.

Freud, 8.3. szakasz
Legyen V vektortér $\mathbb{C}$ *fölött* és $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben.
Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$,
akkor $\langle v, w \rangle = \overline{\lambda_1}\mu_1 + \ldots + \overline{\lambda_n}\mu_n$ e *bázishoz tartozó skaláris szorzat*.
A kétváltozós $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{C}$ függvény *skaláris szorzat*,
ha tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda \in \mathbb{C}$ esetén

(1) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$.

(2) $\langle \lambda v, w \rangle = \overline{\lambda} \langle v, w \rangle$.

(3) $\langle w, u + v \rangle = \langle w, u \rangle + \langle w, v \rangle$.

(4) $\langle w, \lambda v \rangle = \lambda \langle w, v \rangle$.

(5) $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$ (*Hermite-féle*).

(6) $\langle v, v \rangle \geq 0$ és $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$ (*pozitív definit*).

Szöget nem definiálunk. A többi eddigi működik $\mathbb{C}$ fölött is.