Bsc algebra3 elemző gyakorlat

Második zárthelyi (2007. december 12.) — eredmények

1. $b_1 = (1,0,1)/\sqrt{2}$ (2 pont), legyen $v = (0,1,1)$, akkor a Gram–Schmidt-módszerrel $v - \langle v, b_1\rangle b_1 = (-1/2, 1, 1/2)$, normálva $b_2 = (-1,2,1)/\sqrt{6}$ (4 pont).

2. A leképezések mátrixát felírva A nem normális (és így nem unitér és nem önadjungált, 2 pont), B unitér (és így normális), de nem önadjungált (2 pont), végül C önadjungált (így normális), de nem unitér (2 pont).

3. A mátrix $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ (1 pont), karakterisztikus polinomja $x^2 - x - 6$, sajátértékei 3 és -2 (1 pont), a normált sajátvektorok $(2,1)/\sqrt{5}$ (1 pont) és $(1,-2)/\sqrt{5}$ (1 pont). Ez az alak indefinit, ez látszik abból, hogy egy pozitív és egy negatív sajátérték van, vagy abból, hogy a mátrix főátlójában van pozitív és negatív szám is, vagy a két minor determinánsának előjeléből (2 pont).

4. A résztestek száma a 10 osztóinak a száma, vagyis 4 (1 pont). Ezért 2 elem minimálpolinomja elsőfokú, a 2^2 elemű résztest másik két elemének minimálpolinomja másodfokú, a 2^5 elemű résztest $2^5 - 2$ elemének minimálpolinomja ötödfokú, végül a kimaradó $2^{10} - 2^5 - 2^2 + 2 = 990$ elem minimálpolinomja tizedfokú. Mivel minden tizedfokú irreduciblis polinomnak tíz gyöke van a 2^{10} elemű testben, ezért a keresett szám $990/10 = 99$ (5 pont).

5. Nyilván $M^* = M^4$ felcserélhető M-mel, ezért M normális (1 pont). Így ONB-ben diagonalizálható, és mivel invertálható, a főátlóban szereplő sajátértékek egyike sem nulla (2 pont). Az $M^4 = M^*$ egyenletet a diagonális alakra alkalmazva azt kapjuk, hogy $\lambda^4 = \overline{\lambda}$ minden λ sajátértékre (2 pont). Abszolút értéket véve $\lambda \neq 0$ miatt $|\lambda| = 1$, és így M unitér (1 pont).

6. Ha a keresett test elemszáma 7^k, akkor ebben az $x^9 - 1$ polinomnak gyöktényezőkre kell bomlania. E polinomnak nincs többszörös gyöke, mert a deriváltja $9x^8$, és a 7 karakterisztika nem osztója a 9-nek. Ezért e gyökök 9 elemű részcsoportot alkotnak, azaz $9 \mid 7^k - 1$. (Mindez közvetlen számolással is kihozható abból, hogy a $7^k - 1$ elemű ciklikus csoportban megszámoljuk az $x^9 = 1$ egyenlet megoldásainak a számát, ez lineáris kongruenciára vezet.) Mivel $7 - 1$ és $7^2 - 1$ nem osztható 9-cel, ezért $k \geq 3$. Viszont $7^3 - 1 = 342$ már osztható 9-cel, és mivel egy 9-cel osztható rendű ciklikus csoportban az $x^9 = 1$ egyenletnek 9 megoldása van, ezért a 7^3 elemű test megfelelő lesz.