Bsc algebra3 elemző gyakorlat

Első zárthelyi (2007. október 17.) — eredmények

1. Az I elemei a 18 többszörösei: $18, 6, 24, 12, 0$ (1 pont), ezért a faktorgyűrű elemszáma $30/5 = 6$, elemei $0 + (18)$, $1 + (18)$, $2 + (18)$, $3 + (18)$, $4 + (18)$, $5 + (18)$ (1 pont, ez a faktorgyűrű a $\mathbb{Z}_6$-tal izomorf). Az invertálhatók: $1 + (18)$ és $5 + (18)$, mindegyik inverze saját maga (2 pont). Három nullosztó van, a $3 + (18)$ nullosztótársa $2 + (18)$ és $4 + (18)$ (2 pont).

2. $66+42i = 6(11+7i)$. Itt $N(11+7i) = 170 = 2\cdot 5\cdot 17$. Így $1+i$ kiemelhető, és prímtényező még $2\pm i$ egyike, továbbá $4\pm i$ egyike is. A végeredmény: $66+42i = (-i)(1+i)^3 3(2-i)(4+i)$. (A $2 - i$ és a $4 + i$ megtalálása 2 pont, az $(1 + i)^3$ és a 3 megtalálása 1 pont.)

3. Az $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ azonosság miatt az eredmény $(1 - \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{25})/6$. (A keresztbeszorzós és lineáris egyenletrendszeres megoldásból is ez adódik.)

4. Legyen $x = \alpha = \sqrt{\sqrt{7} + 1}$, akkor $x^2 - 1 = \sqrt{7}$, ahonnan $x^4 - 2x^2 - 6 = 0$ (2 pont). A Schönemann-Eisenstein miatt $x^4 - 2x^2 - 6$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, tehát ez α minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött (1 pont). Ezért α negyedfokú $\mathbb{Q}$ fölött (1 pont). Nyilván α gyöke az $x^2 - 1 - \sqrt{7} = 0$ polinomnak (1 pont). Mivel $\alpha \notin \mathbb{Q}(\sqrt{7})$, hiszen negyedfokú, ez a polinom irreducibilis $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$ fölött (mert másodfokú, és nincs ebben a testben gyöke), így ez a minimálpolinom (1 pont).

5. Az $\sqrt[5]{5}$ foka 5, a $\sqrt[7]{7}$ foka 7 a $\mathbb{Q}$ fölött, mivel $x^5 - 5$ és $x^7 - 7$ a Schönemann-Eisenstein miatt irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött (1 pont). Mivel 5 és 7 relatív prímek, $|\mathbb{Q}(\sqrt[5]{5}, \sqrt[7]{7}) : \mathbb{Q}| = 35$ (2 pont). Ezért a $\mathbb{Q}$ fölött másodfokú $\sqrt{3}$ nincs benne ebben a bővítésben, és így foka $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{5}, \sqrt[7]{7})$ fölött legalább kettő (2 pont). Mivel gyöke $x^2 - 3$-nak, foka legfeljebb kettő (1 pont).

6. Ki kell zárni a két négyzetszám tételből azokat a $0 < n = b^2 + b^2$ számokat, melyeknek ez az egyetlen felbontása két négyzetszám összegére, nevezzül ezeket „rossz” számoknak. A rossz számok összes felbontása $(\pm b)^2 + (\pm b)^2$, vagyis 4 darab. Ha tehát egy számnak négynél több felbontása van, az biztosan nem lehet rossz. A megoldások számát megadó $4(\beta_1 + 1)\dots(\beta_k + 1)$ képlet szerint tehát rossz számnak nem lehet $4k+1$ alakú prímosztója. Megfordítva, azok a $2b^2$ alakú számok, ahol b minden prímosztója 2 vagy $4k + 3$ alakú, a megoldásszámot megadó képlet szerint rosszak. Tehát egy pozitív egész szám akkor és csak akkor áll elő két különböző négyzetszám összegeként, ha kanonikus alakjában minden $4k+3$ alakú prím kitevője páros, és vagy a 2 kitevője is páros, vagy van legalább egy $4k+1$ alakú prímosztója.