

BSc elemző Algebra3 vizsgatematika (2007 tavasza)

A vizsga anyaga az, amit a <http://www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/07o.el/tem.html> oldalról letölthető 14 prezentáció tartalmaz. Ezek a prezentációk csak kidolgozásra szoruló vázlatok, hivatkoznak Freud Róbert: *Lineáris algebra* és Kiss Emil: *Bevezetés az algebra* című tankönyveire, ahol a részletek megtalálhatók. Különösen ajánlatos a **HF** jellel jelölt állítások végiggondolása. Az **NB** jelentése: a bizonyítást nem kell tudni. Egyes anyagrészek megértéséhez Freud Róbert és Gyarmati Edit *Számelmélet* című könyve is jól használható. Érdeemes átnézni a gyakorlatok feladatsorait is.

A vizsga szóbeli, információk az ETR-ben olvashatók (például a konzultációkról). Reggel 8:15-re négy ember jön, utána 9:30-tól 15 percenként egyvalaki. Mindenki két tételt húz, az egyik egy komolyabb bizonyítás, a másik pedig egy nagyobb anyagrészt felölelő témakör, ahol elsősorban az állítások, fogalmak kapcsolatának bemutatása a cél (de a bizonyításokat itt is tudni kell). A vizsga egy interaktív beszélgetés, az anyag megértésének ellenőrzése kérdések formájában történik. A sikeres vizsgához mindkét tételből legalább elégséges osztályzatot kell szerezni.

Az anyagban szereplő bizonyítások nehézsége változó. A *rutinszerűeket* nem érdemes megtanulni, mert az oktatás egyik célja éppen annak a készségnek a kifejlesztése, hogy ezeket a vizsgázó helyben ki tudja találni (ez az egyik fontos típusa a vizsgán feltett kérdéseknek). Példa ilyen bizonyításra: a faktorgyűrűben a szorzás asszociatív. A komolyabb bizonyítások azok, melyekben nemtriviális ötlet is szerepel (például a tehetetlenségi tétel). Tanuláskor csak az ötletet érdemes megjegyezni, a körítés szintén kitalálható helyben. Az állítások mindegyikénél gondoljuk végig, hogy a feltételek szükségesek-e, keressünk példákat, amikor az állítás vagy egy fogalom teljesül, illetve amikor nem teljesül. Ilyen jellegű kérdésekre is számítani kell a vizsgán, ami tehát matematikai érettséget is mér.

Euklideszi terek. Skaláris szorzat valós fölötti vektortéren, euklideszi tér. Bázishoz tartozó skaláris szorzat. Hossz, távolság, szög, Cauchy-egyenlőtlenség, háromszög-egyenlőtlenség. Ortogonális és ortonormált vektorrendszer, függetlenségük, vektor koordinátái ortonormált bázisban. Gram-Schmidt-eljárás, merőleges vetület, ortogonális kiegészítő altér. Euklideszi tér komplex fölött.

Transzformáció és mátrix adjungáltja, jellemzés skaláris szorzattal. Invariáns altér, blokkfelbontás, kapcsolat az adjungált és az ortogonális kiegészítő altér invarianciája között. Normális transzformáció ortonormált bázisban diagonalizálható, a sajátaltérek merőlegesek. Az unitér és ortogonális transzformációk jellemzése, sajátértékeik. Az ortogonális transzformációk szép valós mátrixa (NB). Unitér mátrixszal minden mátrix felső háromszögmátrixszá transzformálható (NB).

Önadjungált és szimmetrikus transzformációk, főtengety-tétel. Kvadratikus alak, bilineáris függvény, kapcsolatuk, szimmetrikus bilineáris függvény. Bilineáris függvény mátrixa, felírás mátrixszorzás és skaláris szorzat segítségével. Komplex és Hermite-féle bilineáris függvény.

Bilineáris függvényhez tartozó ortogonális bázis, ortogonalizálás ONB-ben sajátvektorokkal. Kvadratikus alak négyzetösszeg alakja. Sylvester tehetetlenségi tétele. Kvadratikus karakter, leolvasása aldeterminánsok segítségével (NB).

KÉREM, FORDÍTSON!

Gyűrűk. Gyűrűhomomorfizmus és izomorfizmus, kép és mag. Balideál, jobbideál, ideál, főideál, egyszerű gyűrű. Minden test egyszerű gyűrű, a teljes mátrixgyűrű is egyszerű (NB). Kommutatív, egységelemes, egyszerű gyűrű test. Balideálmentes gyűrűk (NB). Nullosztó, annullátor. Véges nullosztómentes gyűrű test. Wedderburn tétele (NB).

Faktorgyűrű, példák. A komplex számok új konstrukciója. A homomorfizmustétel. Az egészek gyűrűje és minden test fölötti polinomgyűrű főideálgyűrű. Általánosítás: minden euklideszi gyűrű főideálgyűrű.

Oszthatóság, egység, felbonthatatlan, prím szokásos gyűrűben, alaptételes gyűrű. Kiténtetett közös osztó, kapcsolata az alaptétellel. Az oszthatóság és a kiténtetett közös osztó az ideálok nyelvén. $\mathbb{Z}[x]$ (alaptételes, de) nem főideálgyűrű. Főideálgyűrű alaptételes. Példa nem alaptételes egységelemes gyűrűre.

Két négyzetszám különbségeként írható számok. Gauss-egész normája, egységek. Maradékos osztás a Gauss-egészek között. A Gauss-prímek leírása. A két négyzetszám probléma megoldása (a megoldásszám NB).

Testek. Testbővítés egy elemének minimálpolinomja és jellemzése az irreducibilitás segítségével. Algebrai és transzcendens elemek és számok. Egyszerű algebrai bővítés elemeinek normálalakja.

Egyszerű bővítés transzcendens elemmel. Az egyszerű testbővítés mint generátum. Bővítés több elemmel, ha ezek algebraiak, akkor osztásra nincs szükség. Testbővítés és elem foka, az algebraiság jellemzése a bővítés fokának végességével. A szorzástétel. Elem foka osztója a bővítés fokának.

Véges és algebrai bővítés, kapcsolatuk. Az algebrai elemek résztestet alkotnak, ami a gyökvonásra is zárt. Összeg, szorzat fokának becslése. Az algebrai számok teste algebrailag zárt. Transzcendens számokról szóló tételek (NB). Testbővítés konstrukciója faktorgyűrű segítségével. Felbontási test létezése.

Az euklideszi szerkesztés fogalma és algebraizálása, szerkeszthető számok. A szerkeszthetőség szükséges feltétele. Kockakettőzés, körnégyszögesítés, szögharmadolás, szabályos sokszög szerkeszthetősége, a körosztási polinom szerepe. A szerkeszthetőség elégséges feltétele (NB). A legalább ötödfokú polinomokhoz nem létezik általános gyökképlet (NB).

Nullosztómentes gyűrű karakterisztikája. Véges p karakterisztikában a p -edik hatványra emelés a Frobenius-endomorfizmus. Prímtest, szerkezete. A véges testek elemszáma, konstrukciója (az egyértelműség NB). Véges test multiplikatív csoportja ciklikus. Véges test résztestei (NB). Irreducibilis polinomok létezése \mathbb{Z}_p fölött (NB).

A kódolás típusai. A hibajavító kódolás alkalmazásai, szempontjai. Ábécé, kódszavak, (n, k) -paraméterű kód, a kód hossza, t -hibajelzés, t -hibajavítás. Hamming-távolság, a kód minimális távolsága. Hamming-korlát, Singleton-korlát (NB). Lineáris kód, polinomkód, Reed-Solomon-kód, ennek minimális távolsága, BCH-kód.