Bsc algebra3 elemző gyakorlat

Hatodik feladatsor (2007. november 27)

F8.4.2. *Adjuk meg a sík alábbi transzformációinak adjungáltját: tükrözés (origón átmenő) egyenesre, forgatás (az origó körül), merőleges vetítés egyenesre. Melyek lesznek szimmetrikusak, illetve ortogonálisak?*

F8.4.5. *Igazoljuk, hogy* $A^2 = 0 \implies Av \perp A^*v$. *Igaz-e a megfordítás* $\mathbb{C}$ *illetve* $\mathbb{R}$ *felett?*

F8.4.6. *Igazoljuk, hogy ha* $Av = \lambda v$ *és* $A^*w = \mu w$, *akkor* $\overline{\lambda} = \mu$ *vagy* $v \perp w$.

F8.4.8. *Mutassuk meg, hogy* $\mathrm{Ker}A^* = (\mathrm{Im}A)^\perp$ *és* $\mathrm{Im}A^* = (\mathrm{Ker}A)^\perp$.

F8.4.11a. *Bizonyítsuk be, hogy* $AA^* = 0 \implies A = 0$.

F8.5.5. *A* $\mathbb{C}^4$ *alábbi transzformációi közül melyek normálisak, önadjungáltak, unitérek?*

$$A\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}, \quad B\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}u_4\\u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}, \quad C\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}u_1\\u_1\\u_1\\u_1\end{bmatrix},$$

$$D\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}u_1+u_2+u_3+u_4\\u_1+u_2+u_3+u_4\\u_1+u_2+u_3+u_4\\u_1+u_2+u_3+u_4\end{bmatrix}, \quad E\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}u_1-u_2\\u_2-u_3\\u_3-u_4\\u_4-u_1\end{bmatrix}.$$

F8.6.3. *Tekintsük* $\mathbb{R}^4$*-en az előző feladat* B *és* D *képletével megadott transzformációkat, valamint az alábbiakat:*

$$F\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}u_4\\u_3\\u_2\\u_1\end{bmatrix}, \quad G\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(u_1-u_2+u_3-u_4)/2\\(u_1-u_2-u_3+u_4)/2\\(u_1+u_2+u_3+u_4)/2\\(u_1+u_2-u_3-u_4)/2\end{bmatrix}, \quad H\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}u_1+u_2\\u_1-u_2\\u_3+u_4\\u_3-u_4\end{bmatrix}.$$

Döntsük el, melyek szimmetrikusak, illetve ortogonálisak. A szimmetrikusakhoz adjunk meg ortonormált sajátbázist, az ortogonálisakhoz pedig olyan bázist, amelyben a mátrixuk legfeljebb kétszer kettes blokkokra bomlik, ahol minden kétszer kettes blokk forgatás.

F8.6.1. *Bizonyítsuk be, hogy ha* A *ortogonális és szimmetrikus, akkor* A^2 *az identitás. Megfordítható-e ez az állítás?*

F8.5.7. *Igazoljuk, hogy ha* A *és* B *önadjungált, akkor* AB *akkor és csak akkor önadjungált, ha* $AB = BA$.

1. *Tekintsük a* $-x^2+10xy-y^2-z^2$ *és a* $-3x\overline{x}+4ix\overline{y}-4i\overline{x}y+3y\overline{y}-z\overline{z}$ *kvadratikus alakot* $\mathbb{R}$ *illetve* $\mathbb{C}$ *felett. Írjuk fel ezek mátrixát, transzformáljuk őket négyzetösszeggé Gauss-eliminációval, végül határozzuk meg karakterüket. Transzformáljuk őket négyzetösszeggé ortonormált bázisban is.*

2. *Mely testek fölött diagonalizálható az* $x_1y_2 + x_2y_1$ *szimmetrikus bilineáris függvény? A valós test esetében adjuk meg az összes ortogonális bázist.*

3*. *Legyen* B *pozitív definit bilineáris függvény. Igaz-e, hogy tetszőleges* $v_1, \ldots, v_n$ *vektorok akkor és csak akkor függetlenek, ha a* $|((B(v_i, v_j))|$ *determináns nullától különböző?*