Bsc algebra3 elemző gyakorlat

Ötödik feladatsor (2007. november 13)

1. *Legyen T a sík egy transzformációja, ami nem nyújtás. Igazoljuk, hogy ha T diagonalizálható, akkor négy invariáns altere van, ha nincs valós sajátértéke, akkor kettő, különben pedig három. Adjunk meg a térben egy olyan lineáris transzformációt, melynek van olyan kétdimenziós invariáns altere, ami nem sajátaltér.*

2. *Melyek azok a transzformációk, melyekre minden altér invariáns?*

3. *Mutassuk meg, hogy ha $AB = BA$, akkor A minden sajátaltere, továbbá* $\mathrm{Im}(A)$ *és* $\mathrm{Ker}(A)$ *is B-invariáns altér.*

4. *Tegyük fel, hogy A egy olyan lineáris transzformáció egy n-dimenziós téren, melynek n különböző sajátértéke van. Igazoljuk, hogy A-nak pontosan 2^n invariáns altere van. Igazoljuk azt is, hogy ha B felcserélhető A-val, akkor van olyan f polinom, hogy $B = f(A)$.*

5. *Legyen* $M = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) *Diagonalizáljuk M-et alkalmas bázisban.*

b) *Adjuk meg M összes lehetséges felső háromszögmátrix alakját $\mathbb{C}$ tetszőleges ortonormált bázisában. Diagonalizálható-e M unitér transzformációval?*

6. *Igazoljuk komplex fölött a CBS-egyenlőtlenséget: $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$ esetén* $|\,\overline{a_1}b_1 + \ldots + \overline{a_n}b_n| \le \sqrt{|a_1|^2 + \ldots + |a_n|^2}\sqrt{|b_1|^2 + \ldots + |b_n|^2}$.

7. *Mennyi $a + 2b + 3c + 4d$ maximuma, ha $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$?*

8. *Legyen W a térben az $x+y+z = 0$ egyenletű sík. Adjunk meg W-ben a Gram–Schmidt-eljárással egy ortonormált bázist, és ezt egészítsük ki a tér egy ortonormált bázisává.*

9. *Legyen $V = \mathbb{R}^5$, és U azon vektorok halmaza, amelyekben az első két koordináta összege egyenlő az utolsó két koordináta összegével.*

a) *Adjunk meg U-ban egy ortonormált bázist.*

b) *Határozzuk meg $U^\perp$ elemeit.*

c) *Írjuk fel az $(1, 0, 0, 0, 0)$ vektort egy U-beli és egy $U^\perp$-beli vektor összegeként.*

10. *Álljon a $W \le \mathbb{R}^4$ altér azokból a vektorokból, melyek koordinátaösszege nulla. Határozzuk meg az $(1, 2, 3, 4)$ pont távolságát ettől a „hipersík”-tól.*

11. *Legyen α_n, illetve β_n az a szög, amelyet az n-dimenziós egységkocka testátlója egy éllel, illetve egy ($n - 1$-dimenziós) lappal bezár. Számítsuk ki az alábbi értékeket:*

a) α_4;

b) β_4;

c) $\alpha_{2007} + \beta_{2007}$;

d) $\lim_{n\to\infty} \alpha_n$.

12. *Bizonyítsuk be tetszőleges euklideszi térben az alábbi állításokat. Mely közismert geometriai tételek általánosításáról van szó?*

a) $\underline{x} \perp \underline{z} \iff \|\underline{x} + \underline{z}\|^2 = \|\underline{x}\|^2 + \|\underline{z}\|^2$.

b) $\|\underline{x}\| = \|\underline{z}\| \iff \underline{x} + \underline{z} \perp \underline{x} - \underline{z}$.

c) $\|\underline{x} + \underline{z}\|^2 + \|\underline{x} - \underline{z}\|^2 = 2\|\underline{x}\|^2 + 2\|\underline{z}\|^2$.