Bsc algebra3 elemző gyakorlat
Második alkalom (2007. szeptember 18)

Az alábbi feladatokban $\alpha = a + bi$, ahol $a, b \in \mathbb{Z}$.

1. *Az alábbi állításokról vizsgáljuk meg, igazak-e a Gauss-egészek gyűrűjében.*
a) $2 + 3i \mid 7i - 4$.
b) $3 + 4i$ *és* $4 - 3i$ *egymás egységszeresei.*

2. *Hogyan olvasható le* a *és* b*, illetve* $N(\alpha)$ *alapján, hogy* $1 - i \mid \alpha$*?*

3. *Az* $1 + i$, $2 + i$, $3 + 4i$, 2, 3, 5 *számok közül melyek felbonthatatlanok* $\mathbb{G}$*-ben?*

4. *Igazoljuk háromféleképpen is, hogy* α *Gauss-prím* $\iff$ $\overline{\alpha}$ *Gauss-prím.*

5. *Bontsuk fel a* 14, 20, 30, $90 - 1230i$ *számokat* $\mathbb{G}$*-ben az alaptétel szerint.*

6. *Teljes hatodik hatvány-e* $\mathbb{G}$*-ben a* -27*? És a* -8*?*

7. *Melyek igazak az alábbiak, illetve a megfordításaik közül?*
a) $\big(N(\alpha), N(\beta)\big) = 1 \implies \big(\alpha, \beta\big) = 1$.
b) $\big(\alpha, \overline{\alpha}\big) = 1 \implies \big(a, b\big) = 1$.
c) α *„köbszám”* $\implies N(\alpha)$ *köbszám.*

8. *Mennyi az* $1234567 + 891011i$ *Gauss-egész összes osztójának az összege?*

9. *Melyek igazak?*
a) $73 \mid a^2 + b^2 \implies 73^2 \mid a^2 + b^2$.
b) $77 \mid a^2 + b^2 \implies 77^2 \mid a^2 + b^2$.

10. *Mely Gauss-egészek oszthatók a konjugáltjukkal?*

11. *Határozzuk meg a* $2 + 11i$ *és* $13 + 4i$ *összes kitüntetett közös osztóját a Gauss-egészek között az euklideszi algoritmussal, és ezek egyikét állítsuk elő az algoritmus alapján* $ax + by$ *alakban, ahol* $x, y \in \mathbb{G}$.

12. *Egyértelmű-e a maradékos osztás* $\mathbb{G}$*-ben? Ha igen, bizonyítsuk be. Ha nem, adjunk ellenpéldát.*

3.1.34*. *Igazoljuk, hogy az* $a + bi\sqrt{5}$ *alakú számok gyűrűjében (ahol* $a, b \in \mathbb{Z}$*) a* $9 = 3 \cdot 3$ *és a* $9 = (2 + i\sqrt{5})(2 + i\sqrt{5})$ *két lényegesen különböző, irreducibilis elemekre való felbontás. Igazoljuk azt is, hogy a* 3 *(felbonthatatlan, de) nem prím, és hogy a* 9 *és* $3(2 + i\sqrt{5})$ *számoknak nincs kitüntetett közös osztójuk.*

14.** *Oldjuk meg az egész számok körében az* $x^2 + 1 = y^3$ *diofantikus egyenletet az alábbi feladatsor végrehajtásával.*
a) *Bontsuk fel* $\mathbb{G}$*-ben szorzatra az egyenlet baloldalát.*
b) *Mutassuk meg, hogy a baloldal két tényezőjének közös prímosztója csak* $1 + i$ *lehet, és ilyenkor* y *páros.*
c) *Mutassuk meg a 4-gyel való oszthatóságot vizsgálva, hogy* y *nem lehet páros szám.*
d) *Mutassuk meg, hogy* $\mathbb{G}$ *mindegyik egysége teljes köb* $\mathbb{G}$*-ben.*
e) *Mutassuk meg, hogy a baloldal mindkét tényezője teljes köb* $\mathbb{G}$*-ben.*
f) *Az* $a + bi$ *köbének kiszámításával keressük meg* x *lehetséges értékeit.*
Oldjuk meg hasonlóan az $x^2 + 121 = y^3$ *diofantikus egyenletet is.*