

Bsc algebra3 elemző gyakorlat
Első alkalom (2007. szeptember 11–14)

A számozás a Kiss: Bevezetés az algebraba tankönyv számozásának felel meg, ahol a megoldások is elolvashatók.

5.1.7. Legyen I egy T test fölötti $n \times n$ -es mátrixgyűrűben azoknak a mátrixoknak a halmaza, melyeknek az első oszlopa végig nulla. Balideál-e, illetve jobbideál-e ez?

5.1.11. Határozzuk meg a legszűkebb olyan ideált az egész számok gyűrűjében, amely a 18 és 30 számokat tartalmazza.

5.2.14. Készítsük el az alábbi faktorgyűrűk műveleti tábláit, majd osztályozzuk őket izomorfia szerint. (Ha n egész, akkor nR az R gyűrű $\{nr : r \in R\}$ részgyűrűjét jelöli.) $\mathbb{Z}_4/\{0\}$, $\mathbb{Z}_8/\{0, 4\}$, $\mathbb{Z}_{16}/\{0, 4, 8, 12\}$, $2\mathbb{Z}/(8)$, $2\mathbb{Z}_{16}/(8)$, $\mathbb{Z}/(4)$, $4\mathbb{Z}/(16)$, $\mathbb{Z}[x]/(4, x)$.

1. Számítsuk ki az $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)$ faktorgyűrűben az x polinom maradékosztályának a négyzetét és inverzét.

5.2.15. A $\mathbb{Q}[x]/(x^2 + x + 1)$ -ben mi az $x + (x^2 + x + 1)$ inverze?

5.2.10. Írjuk föl az $L = \mathbb{Z}_2[x]/(x^2 + x + 1)$ faktorgyűrű műveleti tábláit, és igazoljuk, hogy testet kaptunk. Keressünk benne \mathbb{Z}_2 -vel izomorf $\{O, E\}$ résztestet (ahol E az egységelem, O a nullelem), és adjuk meg L -ben az $Ex^2 + Ex + E$ polinom gyökeit.

5.2.18*. Melyek igazak az alábbiak közül: $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 2) \cong \mathbb{C}$, $\mathbb{R}[x]/(x^2 - 1) \cong \mathbb{C}$, $\mathbb{R}[x]/(x^2 - 1) \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{G}/(5) \cong \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ (\mathbb{G} a Gauss-egészek), $\mathbb{G}/(3) \cong \mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + 1)$, $\mathbb{C}[x, y]/(x) \cong \mathbb{C}[y]$.

5.2.19*. Lehet-e egy nullosztómentes, de nem egységelemes gyűrű faktorgyűrűje egységelemes? Lehet-e egy nullosztómentes gyűrű faktora nem nullosztómentes? És fordítva?

5.3.14. Mi a \mathbb{Z}_{24} gyűrűben a 18 elem annullátora? Általánosítsuk a kapott állítást!

5.3.17. Legyen M az a kétszer kettős mátrix, amelynek mindegyik eleme 1. Számítsuk ki az $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ gyűrűben az M jobb és bal annullátorát.

5.3.15. Mutassuk meg, hogy ha r bal oldali nullosztó, és sr nem nulla, akkor sr is bal oldali nullosztó. Igaz-e, hogy ha r, s bal oldali nullosztók, és $r + s \neq 0$, akkor $r + s$ is bal oldali nullosztó?

5.3.16*. Mely $m > 0$ egészekre igaz, hogy a \mathbb{Z}_m gyűrűben a nullosztók a nullával együtt ideált alkotnak?

5.1.25*. Adjunk példát egy-egy olyan részgyűrűre a $\mathbb{Q}[x]$, illetve a $\mathbb{Z}[x]$ polinomgyűrűkben, amely nem ideál, de tartalmaz minden n -re n -edfokú polinomot.

5.3.19*. Igazoljuk, hogy egy T test fölötti $n \times n$ -es felső háromszög-mátrixok gyűrűjében ideált alkotnak azok a mátrixok, amelyeknek a főátlójában végig nulla áll, és a szerinte vett faktor a T^n direkt hatvánnyal izomorf.

5.3.3.** Igazoljuk, hogy ha T test, akkor a $T^{n \times n}$ teljes mátrixgyűrű egyszerű gyűrű.

5.1.32.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy egységelemes gyűrűben $1 - ab$ invertálható, akkor $1 - ba$ is.