Mat-alkmat szak, első évfolyam, második félév

Második zárthelyi (2006. május 17) — megoldásvázlatok

1. Mivel $f^8t = tf^8$ (1 pont), továbbá N mindegyik elemének a négyzete 1, hiszen tf^8 is tükrözés (1 pont), ezért N zárt a szorzásra és az inverzképzésre (1 pont), továbbá a két négyelemű csoport közül csakis a Klein-csoporttal lehet izomorf (1 pont). A $g = f$ elem megfelelő, mert fN tartalmazza $ft = tf^{15}$-t, de Nf nem (2 pont).

2. Legyen $N = \{1, 23\} = \{1, -1\}$, ekkor $(\pm 5N)^2 = 25N = N$, $(\pm 7N)^2 = 49N = N$ és $(\pm 11N)^2 = 121N = N$, vagyis $\mathbb{Z}_{24}^{\times}/N$ mindegyik elemének a négyzete az egységelem (4 pont). De ez a faktorcsoport $\varphi(24)/2 = 4$ elemű (1 pont), tehát nem ciklikus (1 pont).

3. A $g = (1234)(567)$ konjugáltjai az $(abcd)(efg)$ alakú permutációk (1 pont), ezek száma $\binom{7}{4} \cdot 6 \cdot 2 = 420$ (1 pont), ez a g centralizátorának az indexe, ezért e centralizátor rendje $7!/420 = 12$ (1 pont). De g rendje 12 (1 pont), és a hatványai benne vannak a centralizátorában (1 pont), ezért a keresett centralizátor a 12 elemű ciklikus csoport (1 pont).

4. A megadott elemek rendje 2, 3, 5, ezért minden őket tartalmazó részcsoport rendje osztható ezek legkisebb közös többszörösével, azaz 30-cal (3 pont). Mindegyik páros permutáció, ezért benne vannak A_5-ben (1 pont). De nem alkothatnak 30 rendű részcsoportot, mert az kettő indexű, és így normálosztó lenne az egyszerű A_5 csoportban, és ezért ezek az elemek az A_5-öt generálják (2 pont). *Második megoldás:* Álljon $H \cong A_4$ az 5 stabilizátorának páros permutációiból. Könnyű számolással látható, hogy ezt generálja $(12)(34)$ és (134), ezért a keresett részcsoport rendje osztható $[5, 12] = 60$-nal, és így az A_5 lesz. *Harmadik megoldás:* Ez a részcsoport tranzitív az ötösciklus miatt, és az 5 stabilizátora is tranzitív, ezért a rend osztható $5 \cdot 4 = 20$-szal, továbbá a hármasciklus miatt hárommal is.

5. A középpontos tükrözés mindegyik testátlót önmagába viszi, tehát benne van a kérdéses stabilizátorban (2 pont). Továbbá felcserélhető minden lineáris transzformációval, hiszen a mátrixa $(-1)E$ (2 pont). De az A_4 centruma triviális, és így a válasz nemleges (2 pont). *Második megoldás:* Az A_4 csoportban csak három másodrendű elem van. Az adott testátlót viszont négy másodrendű elem is fixálja: a középpontos tükrözésen kívül az a három síkra tükrözés, amely az adott lapátló két végpontján és a kocka egy harmadik csúcsán átfektetett síkra történik. Ezért a két csoport nem izomorf. *Harmadik megoldás:* A testátló egyik végpontjának a stabilizátora kettő indexű részcsoport, ilyen azonban nincs A_4-ben. *Megjegyzés:* A szóbanforgó stabilizátor a $D_6 \cong D_3 \times \mathbb{Z}_2^+$ csoporttal izomorf (mert a kocka csúcsait a fixált testátlóra merőleges síkra vetítve egy szabályos hatszöget kapunk).

6. Az M-et komplex mátrixnak képzelve normális, hiszen $M^* = M^T = -M$ felcserélhető M-mel (1 pont). Ezért M komplex fölött ortonormált bázisban diagonalizálható, és a diagonális elemei (a sajátértékek) teljesítik a $\overline{\lambda} = -\lambda$ összefüggést, azaz tisztán képzetes számok (1 pont). Nincs közöttük a nulla, mert M invertálható (1 pont), és ezért valós sajátérték sincs. Bontsuk az M mátrix $m \in \mathbb{R}[x]$ minimálpolinomját $\mathbb{R}$ felett irreducibilis, normált tényezőkre. Egy ilyen tényező nem lehet elsőfokú, mert nincs valós sajátérték, és így $\big(x - (ir)\big)\big(x - \overline{(ir)}\big) = x^2 + r^2$ alakú, ahol $r \in \mathbb{R}$ (1 pont). Ezért $m(x)$-ben nincs páratlan fokú tag (1 pont). *Második megoldás:* $0 = m(M)^T = m(M^T) = m(-M)$. Ezért $m(x) \mid m(-x)$. Ha m foka páratlan, akkor innen $m(-x) = -m(x)$, azaz nincs m-ben páros fokú tag. Ez ellentmondás, mert akkor m konstans tagja nulla, és így M nem invertálható. Így m foka páros, $m(-x) = m(x)$, azaz nincs páratlan fokú tag.