Mat-alkmat szak, első évfolyam, második félév

Első zárthelyi (2006. ápr. 5) — megoldásvázlatok

1. Legyen $x^6 = \alpha(x^6 + cx^4 + 1) + \beta(x^6 + 2x) + \gamma\big((1+i)x^4 + 2x + i\big)$ (1 pont). Az x^6, x^4, x együtthatójából és a konstans tagból kapott négy egyenlet $\alpha + \beta = 1$, $c\alpha + (1+i)\gamma = 0$, $2\beta + 2\gamma = 0$, $\alpha + i\gamma = 0$ (2 pont). Innen $\gamma = -\beta = (i-1)/2$, $\alpha = (i+1)/2$ (2 pont). Ezért a $c = -(1+i)\gamma/\alpha = 1 - i$ érték megfelelő lesz (1 pont).

2. A karakterisztikus polinom $-x^3 + 9x^2 - 27x + 27$ (1 pont), ami $-(x-3)^3$ (1 pont). Ezért a Jordan-alakban csak a 3 sajátértékhez tartozó blokkok szerepelhetnek. Az $N - 3E$ még nem nulla, de a négyzete már igen (1 pont), ezért a minimálpolinom $(x-3)^2$ (1 pont). Így a legnagyobb blokk mérete 2×2-es (1 pont), vagyis a Jordan-alak a következő:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(1 pont).

3. A minimálpolinom $(x-i)^m x^n$ lehet, ahol $1 \le m \le 3$ és $1 \le n \le 2$ (mert a minimálpolinom osztója a karakterisztikus polinomnak, és gyöke mindegyik sajátérték), azaz összesen 6-féle polinom (2 pont). Mindegyik meg is valósítható Jordan-alakú mátrix segítségével: a legnagyobb i-hez tartozó blokkméret m, a legnagyobb 0-hoz tartozó blokkméret n, a további (például 1×1-es) blokkokat pedig úgy kell bevenni, hogy az i-hez tartozó blokkok méretének összege 3 legyen, a 0-hoz tartozó blokkoké pedig 2 (4 pont, a hiányzó vagy rossz példákért 1 pont levonás, maximum 4 pont levonásig).

4. 2005 dimenziósat. A legfeljebb 2006 fokú polinomok vektortere 2007 dimenziós (0 pont), ebben valódi alteret alkotnak azok a polinomok, amelyeknek gyöke a 4, ezért ez legfeljebb 2006 dimenziós (1 pont), ebben pedig valódi altér az a W altér, ami a feladatban szerepel (például az $x - 4$ polinom miatt), és így a feladatbeli altér legfeljebb 2005-dimenziós (1 pont). Ahhoz, hogy a dimenzió legalább 2005, meg kell adni 2005 független polinomot a W altérben (1 pont). Ilyenek például $(x-4)\big(x^k - (7^k+1)/2\big)$, ahol $1 \le k \le 2005$, hiszen a fokaik páronként különbözők (3 pont). *Második megoldási ötlet:* Tekintsük az $A(p) = \begin{pmatrix} p(4) \\ p(1) - p(7) \end{pmatrix}$ lineáris leképezést, és mutassuk meg, hogy a képtere az egész $\mathbb{R}^2$.

5. Igaz. Ha $A + I$ nem invertálható, akkor magtere nemtriviális (1 pont). A magtér minden vektora a -1 sajátértékhez tartozó sajátvektor (1 pont). Hasonlóképpen ha $A - I$ nem invertálható, akkor van az 1 sajátértékhez tartozó nem nulla sajátvektor is (2 pont). Ha egy-egy ilyen sajátvektort veszünk, akkor ezek függetlenek (1 pont), továbbá benne vannak A képterében (1 pont), ami ellentmond annak, hogy A rangja 1.

6. Az M determinánsa nem lehet nulla, mert a szorzástétel miatt $\det(M)^4 = \det(-E) = 1$. Ezért M invertálható (1 pont). Az M gyöke az $x^4 + 1$-nek (1 pont). E polinom valós feletti valódi, nem konstans osztói asszociáltság erejéig $x^2 + \sqrt{2}x + 1$ és $x^2 - \sqrt{2}x + 1$, mert ezek irreducibilisek (2 pont). Az M minimálpolinomja legfeljebb másodfokú, és valós együtthatós, ezért csak e két polinom valamelyike lehet (1 pont). Behelyettesítve és M inverzével szorozva az első esetben $M + M^{-1} = -\sqrt{2}E$, a másodikban pedig $\sqrt{2}E$ (1 pont).