Mat-alkmat szak, első évfolyam második félév
Első zárthelyi (2006. ápr. 5)

Minden feladatot **külön lapra** írjunk, és mindegyik lapon legyen rajta a **szak**, a **szerző** és a **gyakorlatvezető** neve. Valamennyi feladatban **indoklás szükséges**, a puszta eredményért nem jár pont, a maximális pontszám minden feladatra 6 pont. Az osztályzat nem kisebb a teljesen megoldott példák számánál.

1. *Adjunk meg egy $c \in \mathbb{C}$ számot úgy, hogy a $\mathbb{C}$ fölötti $\mathbb{C}[x]$ vektortérben $x^6 \in \langle x^6 + cx^4 + 1,\ \ x^6 + 2x,\ \ (1+i)x^4 + 2x + i \rangle$ teljesüljön.*

2. *Számítsuk ki az*

$$N = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 6 & -3 & 2 \\ 9 & -9 & 6 \end{pmatrix}$$

mátrix Jordan-alakját.

3. *Mi lehet a minimálpolinomja egy olyan komplex elemű mátrixnak, melynek karakterisztikus polinomja $(i-x)^3x^2$? Minden lehetséges értékre adjunk is konkrét mátrixot.*

4. *Hány dimenziós vektorteret alkotnak a nullapolinommal együtt azok a legfeljebb 2006 fokú valós együtthatós p polinomok $\mathbb{R}$ fölött, melyekre $p(4) = 0$ és $p(1) = p(7)$?*

5. *Igaz-e, hogy ha az A (véges dimenziós téren értelmezett) lineáris transzformáció rangja 1, akkor $A-I$ és $A+I$ közül legalább az egyik invertálható? (Itt I az identikus leképezést jelöli.)*

6. *Nézzük az összes olyan $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrixot, melyre $M^4 = -E$, ahol E az egységmátrix. Mutassuk meg, hogy M invertálható, és adjuk meg $M + M^{-1}$ lehetséges értékeit.*