Mat-alkmat szak, első évfolyam, második félév

Részletes vizsgatematika (2006 tavasza)

A tanuláshoz hasznosak a gyakorlatokon szerepelt feladatsorok is! A csoportelmélet részből a Kiss-jegyzet (`http://www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/algebrabook/`) szellemében is és tartalmában is szorosan kapcsolódik az előadáshoz. Lineáris algebrából Freud Róbert: *Lineáris algebra* (egyetemi tankönyv) a leginkább ajánlott segédanyag. Az alábbi tematikában az F betű a Freud-könyvre, a K betű a Kiss-jegyzetre utal. NB: a bizonyítást nem kell tudni; BJ: bizonyítás jövőre (általában csak a matematikusoknak); GY: a bizonyítást a gyakorlaton vettük. A római számok a gyakorlatok feladatsoraira utalnak.

A vizsgák és a konzultációk időpontja az ETR-ben olvasható. A vizsgák reggel negyed kilenckor kezdődnek a szobámban (Déli épület, 3. emelet, 3-204). Akkorra négy ember jöjjön, azután fél tíztől 15 percenként egyvalaki. Aki nem akar vizsgázni, de nem jelentkezik le időben az ETR-ben, az elégtelent nem kap ugyan, de a vizsgaalkalmainak száma eggyel csökken. A vizsgázás sorrendjét, és azt, hogy ki hányra jöjjön, az ETR-beli sorrend dönti el, de cserélni szabadon lehet, és nekem nem is kell szólni, csak legyen mindig vizsgára kész hallgató. Leckekönyv nélkül vizsgázni nem lehet. A vizsgatematikát annak részletessége miatt a vizsgán nem lehet használni. A konzultációkat Ágoston István tartja, helyük az ő szobájának ajtaján lesz olvasható.

Vektorterek. (F4. Fejezet). A vektortéraxiómák, elemi tulajdonságok (I/13,14,15), példák. Az altér fogalma és jellemzése a műveletekre való zártság segítségével (I/16, 17). A generált altér, mint adott elemeket tartalmazó legszűkebb altér; generátorrendszer. A generált altér elemeinek jellemzése: lineáris kombináció. Lineáris függés és függetlenség, kapcsolatuk. Végtelen vektorrendszer függetlensége. A bázis fogalma, jellemzése, mint minimális generátorrendszer, illetve maximális független rendszer. Következmény: véges bázis létezése végesen generált vektortérben.

A függés tranzitivitása, a kicserélési tétel. Következmények: független rendszer elemszáma legfeljebb akkora lehet, mint egy generátorrendszeré, minden független rendszer kiegészíthető bázissá, a bázis elemszámának egyértelműsége (I/18). A dimenzió fogalma. Valódi altér dimenziója. Alterek összege, mint az unió által generált altér. Az összeg elemeinek előállítása mikor egyértelmű (II/4), direkt összeg, direkt kiegészítő altér létezése. Alterek összegének dimenziója (GY, II/3).

Lineáris leképezések. (F5. Fejezet). A lineáris leképezés, mint vektorterek közötti homomorfizmus; lineáris transzformáció. Műveletek lineáris leképezések között. Az algebra fogalma, a lineáris leképezések vektortere, a lineáris transzformációk algebrája.

Vektor koordinátái adott bázisban. Tetszőleges n-dimenziós vektortér izomorf T^n-nel. A lineáris leképezések előírhatósági tétele, lineáris leképezés mátrixa adott bázispárban. Összefüggés a mátrixműveletek, és a lineáris leképezések műveletei között, ennek vektortér- és algebra-izomorfizmusként való megfogalmazása. A bázistranszformáció képlete.

Képtér, magtér, az injektivitás és a szürjektivitás jellemzése. A dimenziótétel. Véges dimenziós téren az invertálható transzformációk jellemzése (van bal- illetve jobbinverze, nem bal- illetve jobboldali nullosztó, magja nulla, képe az egész tér, bijektív, lásd II/16 is).

További három oldal!

Véges dimenziós téren, ha AB az identitás, akkor BA is az. Két vektortér akkor és csak akkor izomorf, ha dimenziójuk megegyezik. A $\mathrm{Hom}(V, W)$ dimenziója, a duális tér.

A determináns akkor és csak akkor nulla, ha oszlopai lineárisan összefüggenek. Transzformáció determinánsa, mint adott bázisban vett mátrixának a determinánsa, ez nem függ a bázis választásától. Egy transzformáció akkor és csak akkor invertálható, ha determinánsa nem nulla. Az invertálható transzformációkra bizonyított jellemzések átvitele mátrixokra.

Vektorrendszer rangja, mint az általa generált altér dimenziója. A rang a maximális független részrendszerek elemszáma. Lineáris leképezés rangja, mint a képtér dimenziója. A rang legfeljebb akkora, mint az értelmezési tartomány dimenziója. Szorzat rangja legfeljebb akkora, mint bármelyik tényező rangja (III/3,4). Mátrix oszloprangja, lineáris leképezés rangja ugyanaz, mint a mátrixának a rangja. Az oszloprang és a sorrang megegyezik, determinánsrang, a rang a Gauss-eliminációnál keletkező vezéregyesek száma (bizonyítás csak vázlatosan). Lineáris egyenletrendszer megoldhatóságának és a megoldás egyértelműségének jellemzése a rang segítségével.

Sajátérték, minimálpolinom. (F6. Fejezet). Egy n-dimenziós vektortéren ható transzformáció, illetve n-szer n-es mátrix diagonalizálhatósága, sajátértékei, sajátvektorai, sajátalterei, karakterisztikus polinomja. Ennek gyökei a sajátértékek, így legfeljebb n sajátérték van (III/17). A sajátalterek összege direkt összeg, különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok függetlenek (III/14). Következmény: ha n különböző sajátérték van, akkor a transzformáció diagonalizálható.

Lineáris transzformációk és mátrixok polinomjai. Az A transzformáció m_A minimálpolinomja a legalacsonyabb fokú normált polinom, amelynek A gyöke. A minimálpolinom egyértelmű, egy polinomnak A akkor és csak akkor gyöke, ha ez a polinom a minimálpolinomnak többszöröse. Ha V egy n-dimenziós vektortér, akkor $\mathrm{Hom}(V)$ elemeinek illetve az n-szer n-es mátrixoknak a minimálpolinomja legfeljebb n^2 fokú (de valójában legfeljebb n-edfokú a Cayley-Hamilton tétel miatt). Bővebb test felett egy mátrix minimálpolinomja nem változik (IV/4). Minden testnek van olyan bővítése, ahol már minden nem konstans polinomnak van gyöke (BJ).

A sajátértékek gyökei a minimálpolinomnak. A Cayley-Hamilton tétel: minden mátrix illetve transzformáció gyöke a karakterisztikus polinomjának (BJ). Következmények: a minimálpolinom osztója a karakterisztikus polinomnak, és így a foka legfeljebb n; a minimálpolinom gyökei pontosan a sajátértékek; ha n különböző sajátérték van, akkor a minimálpolinom a karakterisztikus polinom konstansszorosa.

Az invariáns altér fogalma. A minimálpolinom prímhatványok szorzatára való felbontásából a tér invariáns alterek direkt összegére való felbontása adódik (F6.6.2). Az ezen alterekre vett megszorítások minimálpolinomjai az eredeti minimálpolinom megfelelő tényezői (IV/19). Következmény: a transzformáció akkor és csak akkor diagonalizálható, ha a minimálpolinomja lineáris tényezőkre bomlik, és minden gyöke egyszeres. A Jordan-normálalak, egyértelműség (BJ). A Jordan-normálalak hatványozása (IV/10).

Bilineáris leképezések. (F7. Fejezet). Bilineáris leképezés, ennek előírhatósága bázispáron. Bilineáris függvény mátrixa, szimmetrikus bilineáris függvény. A bázistranszformáció képlete. Valós feletti kvadratikus alak egyértelműen kapható egy szimmetrikus bilineáris függvényből. Egy bilineáris függvény akkor és csak akkor diagonalizálható, ha szimmetrikus. Ortogonalitás, a Gram-Schmidt ortogonalizáció. Sylvester tehetetlenségi tétele (V/3).

A kvadratikus alak karaktere, ennek kapcsolata a főminorokkal (NB, V/6).

Komplex bilineáris függvény, itt a kvadratikus alak egyértelműen meghatározza a bilineáris függvényt. A kvadratikus alak akkor és csak akkor valós, ha a függvény Hermite-féle. Ortogonalizáció, tehetetlenségi tétel mint valósban.

Euklideszi terek. (F8. Fejezet). Valós és komplex euklideszi tér, ortonormált bázis, a skaláris szorzat képlete. Ortogonalizáció, ortogonális kiegészítő altér. Merőlegesség, hossz, szög, a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwartz egyenlőtlenség (csak valósban bizonyítva, vö. VI/2), a háromszög-egyenlőtlenség. Vektor koordinátáinak, transzformáció mátrixának felírása ortonormált bázisban a skaláris szorzat segítségével. Az adjungált transzformáció, jellemzése skaláris szorzattal. Ha a W altér A-invariáns, akkor az ortogonális kiegészítő altere A^*-invariáns. Komplex felett egy transzformáció akkor és csak akkor diagonalizálható **ortonormált bázisban,** ha normális, azaz felcserélhető az adjungáltjával.

Normális transzformáció sajátalterei páronként merőlegesek, ezek egyben az adjungált transzformáció sajátalterei is, konjugált sajátértékekkel (VI/1,12). Komplex felett minden transzformáció alkalmas ortonormált bázisban felső háromszögmátrix (NB). Önadjungált, szimmetrikus, unitér és ortogonális transzformációk. Az A transzformáció akkor és csak akkor önadjungált (szimmetrikus), ha a hozzá tartozó bilineáris függvény Hermite-féle (szimmetrikus). Egy transzformáció akkor és csak akkor unitér (ortogonális), ha skalárszorzattartó, illetve ha távolságtartó, illetve ha ortonormált bázist ortonormált bázisba visz. Unitér (ortogonális) transzformáció sajátértékei 1 abszolút értékűek, önadjungált (szimmetrikus) transzformáció sajátértékei valósak.

Egy valós feletti transzformáció pontosan akkor diagonalizálható ortonormált bázisban, ha szimmetrikus (főtengelytétel), és pontosan akkor ortogonális, ha alkalmas ortonormált bázisban a mátrixa forgatásokat tartalmazó kétszer kettes, illetve $+1$-et vagy -1-et tartalmazó egyszer egyes diagonális blokkokra bomlik (NB, vö. VI/22–26).

Ha a bázistranszformációt ortonormált bázisok között végezzük, akkor a mátrixa unitér (ortogonális). Következmények: egy mátrix akkor és csak akkor diagonalizálható unitér transzformációval, ha normális; minden hermitikus/szimmetrikus bilineáris függvény alkalmas **ortonormált** bázisban diagonalizálható.

Csoportok. Gyűrű additív és multiplikatív csoportja, a diédercsoport, a lineáris csoportok (K4.1, K4.13). A szimmetrikus és az alternáló csoport, ciklusfelbontás (K4.2). A Klein-csoport és a kvaterniócsoport (K4.6).

Elemrend, tulajdonságok, a hatvány rendje, permutáció rendjének leolvasása a ciklusfelbontásról. Ciklikus csoport minden részcsoportja ciklikus. Egy n rendű ciklikus csoportnak minden $d \mid n$ esetén egyetlen d rendű részcsoportja van, és benne a d rendű elemek száma $\varphi(d)$. Izomorfizmus, módszerek az izomorfia eldöntésére. Minden ciklikus csoport izomorf $\mathbb{Z}^+$ illetve $\mathbb{Z}_n^+$ valamelyikével (K4.3).

A részcsoport jellemzése zártsággal és komplexusszorzással. Partíció és ekvivalenciareláció, kapcsolatuk. Lagrange tétele, mellékosztály, index, a baloldali és a jobboldali mellékosztályok száma megegyezik. Egy elemmel generált részcsoport. Elem rendje osztója a csoport rendjének, következmény: Euler-Fermat tétel. Egy csoportnak akkor és csak akkor van pontosan két részcsoportja, ha prímrendű. Ha p prím, akkor p rendű csoportból izomorfia erejéig csak egyféle van, a ciklikus (K4.4).

A generált részstruktúra (részcsoport, altér, részgyűrű, ideál, stb.) általános fogalma és létezése. A generált részcsoport elemeinek leírása az általános, illetve a kommutatív esetben. Az S_n-et generálja az (12) és $(12...n)$ (K4.4).

Permutációcsoport, fok, orbit, stabilizátor, összefüggésük, tranzitivitás. A kocka szimmetriáinak a száma. Csoport hatása halmazon. Cayley tétele (K4.6).

Homomorfizmus képe és magja, a normálosztó fogalma. Faktorcsoport, a szorzás jóldefiniáltsága, természetes homomorfizmus, homomorfizmus-tétel. Elem rendje a faktorcsoportban. Kettő indexű részcsoport normálosztó. A faktorcsoport részcsoportjai és normálosztói, az izomorfizmus-tételek (NB) (K4.5).

A direkt szorzat fogalma és belső jellemzése véges sok tényező esetén (bizonyítás csak két tényezőre). Elem rendje a direkt szorzatban, a direkt szorzat mikor ciklikus. A $\mathbb{Z}_n^\times$ csoport direkt felbontása (KA.4, NB). A véges Abel-csoportok alaptétele (BJ), egyértelműség (BJ) (K4.8).

A konjugálás mint automorfizmus. Csoport hatása önmagán konjugálással, konjugált osztályok. Az S_n konjugált osztályai. Egy részcsoport akkor és csak akkor normálosztó, ha konjugált osztályok egyesítése. Centralizátor, a konjugált osztály elemszáma a centralizátor indexe. Centrum, ez normálosztó (K4.7).

Osztályegyenlet. Prímhatványrendű csoport centruma nemtriviális. Prímnégyzet rendű csoport kommutatív. Általánosítás: a centrum szerinti faktor nem lehet ciklikus. A Sylow-tételek (BJ). Következmény: Cauchy tétele, véges p-hatványrendű csoport az, amiben minden elem p-hatványrendű, a p-csoport fogalma (p prím). A négyelemű, hatelemű (NB) és nyolcelemű (NB) csoportok száma (K4.10, KB.2).

Feloldható csoportok, Jordan-Hölder tétele (BJ). Minden Abel-csoport, véges p-csoport, illetve páratlan rendű véges csoport feloldható (ez utóbbi állítás a Feit-Thompson-tétel, NB). Burnside tétele: ha egy véges csoport rendje csak két prímmel osztható, akkor a csoport feloldható (BJ) (K4.12).

Egyszerű csoportok. A kommutatív, prímhatványrendű, illetve a páratlan rendű egyszerű csoportok pontosan a prímrendűek. A legalább ötödfokú alternáló csoport egyszerű (BJ) (K4.11). Következmény: a szimmetrikus csoport mikor feloldható. A $\mathrm{PSL}(n,T)$ csoport egyszerű, kivéve $\mathrm{PSL}(2,2)$, $\mathrm{PSL}(2,3)$ (NB). A véges egyszerű csoportok klasszifikációja (K4.13, KB.2).

A szabad csoport fogalma és megadása (BJ). Definiáló relációk, Dyck tétele (BJ) (K4.9).