Mat-alkmat gyakorlat, első évfolyam második félév

Kilencedik feladatsor (2006. május 4–∞)

1. *Állapítsuk meg az alább felsorolt csoportok elemeinek centralizátorát, konjugált osztályait, normálosztóit és centrumát:* D_4, Q, D_3, D_5, S_4, S_5, A_4, A_5, $\mathrm{GL}(2,2)$.

2. *Bizonyítsuk be azt az elmúlt félévben gyakorlaton már bizonyított állítást, hogy az* S_n *csoportban két elem akkor és csak akkor konjugált, ha a ciklusfelbontásuk „egyforma", azaz minden* k*-ra a két felbontásban ugyanannyi* k *hosszú ciklus van. Vezessük le ebből, hogy* S_n*-ben az* $(12\ldots n)$ *elem centralizátora a saját hatványaiból áll.*

3. *Legyen* N *kételemű normálosztó a* G *csoportban. Igazoljuk, hogy* $N \leq Z(G)$.

4. *Mutassuk meg, hogy ha egy* G *csoport azon elemei, melyeknek a négyzete az egységelem, részcsoportot alkotnak, akkor ez egyben normálosztó is. Igaz-e mindig, hogy ez a részhalmaz részcsoport?*

5. *Bizonyítsuk be, hogy ha* $G/Z(G)$ *ciklikus csoport, akkor* G *Abel.*

6. *Határozzuk meg a* $\mathrm{GL}(n,q)$ *és a* $\mathrm{PSL}(n,q)$ *rendjét.*

7. *Igazoljuk, hogy* $GL(n,T)$ *centruma az egységmátrix nem nulla skalárszorosaiból áll.*

8. *Legyen* $p > 2$ *prím. A* $\mathrm{GL}(3,p)$ *csoportban tekintsük azokat a mátrixokat, melyek főátlója alatt csupa 0, a főátlójában pedig csupa 1 áll. Igazoljuk, hogy egy* p^3 *elemszámú* G *részcsoportot kaptunk, mely nem kommutatív, és minden egységtől különböző eleme* p *rendű. Határozzuk meg ennek a csoportnak a centrumát.*

9. *Mutassuk meg, hogy ha* P *véges* p*-csoport valamilyen* p *prímre, és* N *nemtriviális normálosztó* P*-ben, akkor* $|N \cap Z(P)| > 1$.

10*. *Mutassuk meg, hogy ha* P *véges* p*-csoport valamilyen* p *prímre, akkor minden* p *indexű részcsoportja normálosztó.*

11*. *Mutassuk meg* n *szerinti indukcióval, hogy* A_n *egyszerű, ha* $n \geq 5$.

12*. *Milyen* n*-ekre van* S_n*-ben* Q*-val izomorf részcsoport?*

13. *Adjuk meg a* $\mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_4^+$ *csoport összes negyedrendű elemét.*

14. *Legyenek* G *és* H *véges csoportok. Mutassuk meg, hogy a* $(g,h) \in G \times H$ *rendje a* $|g|$ *és a* $|h|$ *legkisebb közös többszöröse. Vezessük le ebből, hogy* $G \times H$ *akkor és csak akkor ciklikus, ha* G *is,* H *is az,* **és** $(|G|,|H|) = 1$. *Mi a helyzet, ha* G *és* H *nem feltétlenül véges?*

15. *Döntsük el, hogy az alábbi csoportok közül melyek bonthatók fel két valódi részcsoportjuk direkt szorzatára, és igenlő válasz esetén adjunk is meg egy-egy ilyen felbontást:* $\mathbb{Z}_6^+$, $\mathbb{Z}_8^+$, $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{C}^+$, $\mathbb{Z}_{15}^\times$, $\mathbb{Z}_{16}^\times$, D_3, D_4, D_6, Q, A_4, S_5.

16. *Hányféleképpen bontható direkt szorzatra* $\mathbb{Z}_5^+ \times \mathbb{Z}_5^+$*?*

17. *A véges Abel-csoportok alaptételének felhasználásával döntsük el, hogy izomorfia erejéig hány 6, 8, 16, 32, 48 rendű Abel-csoport van.*

Fordíts!

18. *Igazoljuk, hogy ha G és H csoportok, akkor $Z(G \times H) = Z(G) \times Z(H)$.*

19. *Álljon G az S_8 azon elemeiből, melyek az $\{1, 2, 3, 4\}$ részhalmazt önmagába képzik. Mutassuk meg, hogy ez részcsoport, de nem normálosztó S_8-ban. Igaz-e, hogy $G \cong S_4 \times S_4$?*

20. *Adjuk meg az $S_4 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$ csoport egy kompozícióláncát, és kompozíciófaktorait.*

21. *Az alábbi, definiáló relációkkal megadott csoportoknak határozzuk meg a rendjeit, és döntsük el, izomorfak-e valamelyik „ismert” csoporttal.*

a) $\langle a \mid a^2 = 1\rangle$.
b) $\langle a \mid a^3 = 1\rangle$.
c) $\langle a \mid a^5 = 1,\ \ a^7 = 1\rangle$.
d) $\langle a, b \mid a^2 = 1,\ \ b^2 = 1,\ \ ab = ba\rangle$.
e) $\langle a, b \mid a^2 = 1,\ \ b^3 = 1,\ \ ab = ba\rangle$.
f) $\langle a, b \mid a^2 = 1,\ \ b^5 = 1,\ \ aba^{-1} = b^{-1}\rangle$.
g) $\langle a, b \mid a^2 = 1,\ \ b^5 = 1,\ \ aba^{-1} = b^2\rangle$.
h) $\langle t, f \mid t^2 = 1,\ \ f^n = 1,\ \ tft = f^{-1}\rangle$.
i) $\langle a, b \mid a^2 = 1,\ \ b^2 = 1,\ \ (ab)^3 = 1\rangle$.
j) $\langle a, b \mid a^2 = 1,\ \ b^2 = 1,\ \ (ab)^4 = 1\rangle$.
k) $\langle a, b \mid a^4 = 1,\ \ b^2 = a^2,\ \ bab^{-1} = a^{-1}\rangle$.
l) $\langle a, b \mid a^7 = b^3 = 1,\ \ bab^{-1} = a^3\rangle$.
m) $\langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^3 = 1,\ \ ab = ba,\ \ cac^{-1} = b\rangle$.
n) $\langle a, b \mid a^3 = b^2 = (ab)^3 = 1\rangle$.
o) $\langle a, b \mid a^3 = b^2 = (ab)^4 = 1\rangle$.
p) $\langle a, b \mid a^3 = b^4 = 1,\ \ ba = ab^3\rangle$.
q) $\langle a, b, c \mid a^4 = b^2 = c^2 = 1,\ \ ac = ca,\ \ bc = cb,\ \ ab = ba^3\rangle$.

22. *Legyen G tizedrendű nemkommutatív csoport. Bizonyítsuk be a következő állításokat, majd általánosítsunk arra az esetre, ha G rendje egy prím kétszerese.*

a) *G-ben nincs tizedrendű elem.*
b) *Ötödrendű elem nem lehet felcserélhető másodrendű elemmel.*
c) *G-ben nem lehet minden elem másodrendű (vö. VII/7).*
d) *G-ben van másodrendű elem (vö. VII/13).*
e) *G-ben van ötödrendű elem.*
f) *Minden ötödrendű elem centralizátora ötelemű.*
g) *Minden másodrendű elem centralizátora kételemű.*
h) *G-ben öt darab másodrendű elem van, és ezek mind konjugáltak.*
i) *G-ben négy darab ötödrendű elem van.*
j) *Ha $|f| = 5$ és $|t| = 2$, akkor $tft^{-1} = f^{-1}$.*
k) *$G \cong D_5$.*

23. *Legyen N normálosztó a G csoportban. Rendeljük hozzá G/N tetszőleges K részcsoportjához a K elemeinek uniójából képzett L halmazt. Igazoljuk, hogy L részcsoport G-ben, melynek indexe G-ben ugyanaz, mint K indexe G/N-ben, és ez a megfeleltetés bijekció G/N összes részcsoportja, és a G csoport N-et tartalmazó részcsoportjai között, melynél G/N normálosztói éppen a G csoport N-et tartalmazó normálosztóinak felelnek meg. Igazoljuk azt is, hogy $K \cong L/N$, és ha K normálosztó, akkor $(G/N)/K \cong G/L$.*