Mat-alkmat gyakorlat, első évfolyam második félév

Nyolcadik feladatsor (2006. április 27 – május 1)

1. *Mik az alábbi $G \leq S_X$ permutációcsoportokban az orbitok és a stabilizátorok?*

a) *X a sík pontjai, G az origó körüli forgatások csoportja.*

b) *X a sík pontjai, G az x-tengellyel párhuzamos eltolások csoportja.*

c) *X egy szabályos n-szög csúcsai, G ezt az n-szöget önmagába vivő egybevágóságok csoportja.*

d) *X egy szabályos n-szög csúcsai, G ezt az n-szöget önmagába vivő egybevágóságok csoportjának egy adott csúcsot fixáló elemei.*

e) *X egy kocka csúcsai, G a kocka szimmetriacsoportjában az egyik csúcs stabilizátora.*

f) *$X = \{1, 2, 3, 4\}$, $G = A_4$.*

g) *X az S_3 csoport alaphalmaza, $g \in S_3$ esetén legyen $f_g(x) = gx$, a G csoport az f_g permutációkból áll.*

h) *X az S_3 csoport alaphalmaza, $g \in S_3$ esetén legyen $f_g(x) = gxg^{-1}$, a G csoport az f_g permutációkból áll (itt csak a stabilizátorok kellenek).*

2. *Az alábbi csoportoknak határozzuk meg a rendjét és az elemeiknek a rendjeit.*

a) *Egy olyan téglalap szimmetriacsoportja, amely nem négyzet.*

b) *Egy olyan deltoid szimmetriacsoportja, amely nem rombusz.*

c) *Egy olyan rombusz szimmetriacsoportja, amely nem négyzet.*

d) *Egy négyzet szimmetriacsoportja.*

3. *Határozzuk meg az alábbi alakzatok szimmetriáinak számát.*

a) *Egy olyan téglatest, aminek mindhárom élhosszúsága különböző.*

b) *Egy olyan négyzet alapú egyenes hasáb, ami nem kocka.*

c) *Egy szabályos háromszög alapú egyenes hasáb.*

4. *Rajzoljunk olyan gráfokat, melyeknek rendre pontosan 2, 4, 3, 1 szimmetriája van.*

5*. *Mutassuk meg, hogy minden véges csoport előáll egy alkalmas véges, irányítatlan (többszörös és hurokél nélküli) gráf szimmetriacsoportjaként.*

6. *Legyen $G \leq S_X$ és $x, y \in X$. Mutassuk meg, hogy ha $g(x) = y$, és x stabilizátora H, akkor y stabilizátora gHg^{-1}.*

7. *Legyenek A és B részcsoportok a G csoportban. Legyen X a B szerinti baloldali mellékosztályok halmaza, és hasson ezen A balszorzással, azaz legyen $a * (gB) = agB$. Mutassuk meg, hogy hatást kaptunk, határozzuk meg a B orbitját és stabilizátorát, majd igazoljuk, hogy $|AB| = |A||B|/|A \cap B|$.*

8. *Igazoljuk, hogy ha $A \leq S_n$ Abel-féle és tranzitív, akkor $|A| = n$.*

9. *Mutassuk meg, hogy S_n-ben minden pont stabilizátora maximális részcsoport.*

10. *Hasson a G véges csoport az X véges halmazon. Bizonyítsuk be, hogy a G orbitjainak száma éppen a G elemei fixpontjainak átlagos száma.*

Fordíts!

11*. *Bizonyítsuk be, hogy ha p prím, és G tranzitív részcsoportja S_p-nek, mely tartalmaz transzpozíciót, akkor $G = S_p$.*

12. *Osztályozzuk az alábbi csoportokat aszerint, hogy melyek izomorfak közülük:* $\mathbb{Z}_2^+$, $\mathbb{Z}_3^+$, $\mathbb{Z}_4^+$, $\mathbb{Z}_8^+$, $\mathbb{Z}_3^\times$, $\mathbb{Z}_5^\times$, $\mathbb{Z}_6^\times$, $\mathbb{Z}_8^\times$, $\mathbb{Z}_{12}^\times$, S_2, A_3, S_3, D_3, D_4, Q *(a kvaterniócsoport),* $GL(2,2)$.

13. *Határozzuk meg izomorfia erejéig az összes négyelemű csoportot.*

14. *Van-e a kocka szimmetriacsoportjának S_4-gyel izomorf részcsoportja?*

15. *Keressük meg S_4-nek azt a részcsoportját, amit a Cayley-tétel bizonyítása a Klein-csoporthoz rendel. Tegyük meg ugyanezt S_6-ban a D_3 csoporttal is.*

16*. *Mely véges csoportoknak van csak egy maximális részcsoportja?*

17. *Döntsük el az alábbi $\varphi : G_1 \to G_2$ leképezésekről, hogy homomorfizmusok-e. Ha igen, határozzuk meg a magjukat és a képüket.*
- a) $G_1 = GL(n,T)$, $G_2 = T^\times$, $\varphi(A) = \det(A)$.
- b) $G_1 = S_n$, $G_2 = \mathbb{Z}^\times$, $\varphi(f)$ *az f előjele (azaz ± 1).*
- c) $G_1 = \mathbb{Z}^+$, $G_2 = \mathbb{Z}_n^+$, $\varphi(a)$ *az a maradéka mod n.*
- d) $G_1 = D_n$, $G_2 = \mathbb{Z}_2^+$, $\varphi(x) = 0$ *ha x forgatás, 1 ha x tengelyes tükrözés.*

18. *A homomorfizmus-tétel alapján igazoljuk a következő izomorfizmusokat.*
- a) $\mathbb{C}^\times/\text{egységkör} \cong \text{pozitív valós számok a szorzásra}$. *Milyen geometriai alakzatok ennek a faktorcsoportnak az elemei?*
- b) $\mathbb{R}^+/\mathbb{Z}^+ \cong \text{komplex egységkör a szorzásra}$.
- c) $S_n/A_n \cong \mathbb{Z}^\times$.
- d) $\mathbb{Z}^+/n\mathbb{Z}^+ \cong \mathbb{Z}_n^+$.

19. *Normálosztó-e a $H \le G$ részcsoport a következő esetekben?*
- a) $G = \mathbb{Z}^+$, $H = 3\mathbb{Z}^+$.
- b) $G = S_3$, $H = \{id, (12)\}$.
- c) $G = S_3$, $H = \{id, (123), (132)\}$.
- d) $G = S_n$, $H = A_n$.
- e) $G = S_4$, $H = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$.
- f) $G = D_6$, $H = \{f^2, f^4, f^6 = e\}$.
- g) $G = D_6$, $H = \{e, f^3, t, tf^3\}$.
- h) $G = \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, *$H$ az 1 determinánsú mátrixok halmaza.*
- i) $G = \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, *$H$ a diagonális mátrixok halmaza.*
- j) $G = \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, *$H$ az egységmátrix nem nulla skalárszorosainak a halmaza.*
- k) $G = \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, *$H$ a felső háromszögmátrixok halmaza.*

20. *Igazoljuk, hogy ha $N \triangleleft G$ és $H \le G$, akkor $N \cap H \triangleleft H$.*

21. *Állapítsuk meg az alábbi faktorcsoportok elemeinek rendjeit, és írjuk fel a szorzástábláikat:* $D_4/\{e, f^2\}$, $S_4/\{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$. *A kapott faktorok izomorfak-e valamilyen ismert csoporttal?*

22. *Milyen ismert csoporttal izomorfak az alábbi faktorok:* $\mathbb{Z}_{12}^+/\{0, 6\}$, $D_8/\{e, f^2, f^4, f^6\}$, $A_4/\{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$, $D_n/\{e, f, f^2, \dots, f^{n-1}\}$, $\mathbb{Z}_{16}^\times/\{1, 9\}$.