

## Mat-alkmat gyakorlat, első évfolyam második félév

Hetedik feladatsor (2006. április 20–24)

1. Határozzuk meg a  $\mathbb{Z}_m^+$  illetve  $\mathbb{Z}_m^\times$  csoportok elemeinek a rendjeit, ahol  $m = 7, 8, 12$ .
2. Határozzuk meg a  $g$  elem rendjét a  $G$  csoportban, ha  $(g, G)$  rendre  $(-1, \mathbb{R}^+)$ ,  $(-1, \mathbb{R}^\times)$ ,  $(17, \mathbb{Z}_{19}^+)$ ,  $(17, \mathbb{Z}_{19}^\times)$ ,  $(17, \mathbb{Z}_{32}^+)$ ,  $(17, \mathbb{Z}_{32}^\times)$ ,  $(x+1, \mathbb{Z}_{11}[x]^+)$ ,  $(5, \mathbb{Z}_{11}[x]^\times)$ .
3. Legyenek  $a, n, m$  pozitív egészek, és  $d = (a^n - 1, a^m - 1)$ . Mutassuk meg, hogy  $o_d(a) \mid n$ , és hogy  $(a^n - 1, a^m - 1) = a^{(n,m)} - 1$ .
4. Legyen  $G$  csoport és  $g \in G$ . Igazoljuk az alábbiakat.
  - a) Ha  $G$  elemszáma véges, és legalább 2, akkor  $G$ -ben van prírendű elem.
  - b)  $g$  akkor és csak akkor hatványa  $g^k$ -nak, ha  $(o(g), k) = 1$ .
5. Adjuk meg az alábbi permutációk ciklusfelbontását, rendjét, és előjelét. Tegyük meg ugyanezt a 'hátról előre' permutációval is.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 6 & 4 & 8 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ c & a & e & b & d \end{pmatrix}$$

6. Adjuk meg az alábbi permutációk ciklusfelbontását, rendjét és előjelét.

$$(1234)(35)(1432)(35) =? \quad (12345)^{-1}(234)(12345) =? \quad [(12)(23)(34)]^{1999} =?$$

7. Bizonyítsuk be az  $(x_1 x_2 \dots x_k) = (x_1 x_k)(x_1 x_{k-1}) \dots (x_1 x_3)(x_1 x_2)$  összefüggést. Igazoljuk, hogy  $S_n$  minden eleme előáll legfeljebb  $n - 1$  darab transzpozíció szorzataként. Van-e olyan elem, amihez legalább  $n - 1$  transzpozíció kell? [Használjuk fel, hogy egy  $n$  pontú összefüggő gráfnak legalább  $n - 1$  éle van.]
8. Bizonyítsuk be, hogy az  $S_n$  csoport minden eleme felírható egy olyan soktényezős szorzat alakjában, melynek minden tényezője  $(12)$  vagy  $(12 \dots n)$ .
- 9\*. Egy négy egység oldalú négyzetben 15 egységnégyzet helyezkedik el, ezekre rendre az 1–15 számok vannak írva. A tizenhatodik négyzet helye üres. A kis négyzetek mozgathatók vízszintesen és függőlegesen: az üres négyzet helyére bármelyik szomszédja betolható. A játék célja az, hogy egy véletlenszerűen összekevert állapotból visszaállítsuk az alapsorrendet, azaz azt, amelyben a számok sorfolytonosan, emelkedő sorrendben követik egymást, és az üres négyzet a legalsó sor jobb oldalán van. Bizonyítsuk be, hogy ez a visszaállítás nem lehetséges abból a helyzetből kiindulva, amely az alapsorrendtől csak abban tér el, hogy a 14-es és 15-ös számú négyzetet megcseréljük (az üres négyzet helye is ugyanaz).
10. Bizonyítsuk be, hogy minden páros permutáció előáll hármasciklusok szorzataként.
11. Mutassuk meg, hogy egy permutáció akkor és csak akkor hatványa egy ciklusnak, ha ciklusfelbontásában a ciklusok hossza azonos (az egyelemű ciklusokat nem írjuk ki).
12. Hány másodrendű elem van  $S_5$ -ben?
13. Adjuk meg az összes  $f \in S_n$  permutációt, melyre  $f \circ (1, 2, \dots, n) = (1, 2, \dots, n) \circ f$ .

14. Bizonyítsuk be, hogy  $f, g \in S_n$  esetén akkor és csak akkor létezik olyan  $h \in S_n$ , melyre  $f = h^{-1}gh$ , ha  $f$  diszjunkt ciklusokra való felbontásakor ugyanannyi, ugyanakkora hosszúságú ciklus keletkezik, mint amikor  $g$ -t bontjuk fel.
15. Határozzuk meg Lagrange tételének felhasználásával az  $S_3$  csoport összes részcsoportját, valamint az  $A_4$  alternáló csoport összes negyedrendű részcsoportját. Írjuk fel  $S_3$ -ban az  $\{\text{id}, (12)\}$  részcsoporthoz tartozó összes bal- és jobboldali mellékosztályt. Keressük meg  $\mathbb{Z}_{12}^+$  és  $\mathbb{Z}_{12}^\times$  összes részcsoportját.
16. Legyen  $n\mathbb{Z}^+$  az  $n$ -nel osztható egész számok csoportja az összeadásra. Határozzuk meg  $|\mathbb{Z}^+ : n\mathbb{Z}^+|$  értékét.
17. Határozzuk meg a  $G$  csoportban az  $X$  által generált részcsoportot:
- $G = \mathbb{Z}^+$ ,  $X = \{28, 34\}$ .
  - $G = S_4$ ,  $X = \{(123), (12)(34)\}$ .
  - $G = \mathbb{R}^\times$ ,  $X = \{2, 3\}$ .
  - $G = \text{GL}(n, \mathbb{R})$ ,  $X$  a 2 determinánsú mátrixok halmaza.
  - $G = S_n$ ,  $X = \{(12), (12 \dots n)\}$ .
18. Legyen  $f$  a  $D_n$  diédercsoportban egy  $2\pi/n$  szögű forgatás,  $t$  pedig tetszőleges tengelyes tükrözés. Mutassuk meg, hogy  $D_n$  minden eleme egyértelműen felírható  $f^i$  vagy  $tf^i$  alakban, ahol  $0 \leq i < n$ . Igazoljuk azt is, hogy  $f^i t = t f^{-i}$  minden  $i$  egészre.
19. Határozzuk meg a  $D_5$  és  $D_6$  diédercsoportokban a  $\langle t, f^2 \rangle$  részcsoportot.
20. Mutassuk meg, hogy ha  $A$  és  $B$  részcsoportok egy  $G$  csoportban, akkor  $AB$  akkor és csak akkor részcsoport, ha  $AB = BA$ .
21. Igazoljuk, hogy ha a  $G$  csoport minden elemének a négyzete az egységelem, akkor  $G$  Abel. Igaz-e az állítás négyzet helyett negyedik hatványra?
22. Ciklikus-e a három-hatványadik komplex egységgyökök multiplikatív csoportja?
23. Bizonyítsuk be, hogy a racionális számok additív csoportja nem végesen generált, sőt, minimális generátorrendszere sincs.
24. Mutassuk meg, hogy két véges indexű részcsoport metszete is véges indexű. Mennyi lehet a metszet indexe legfeljebb?
25. Igazoljuk, hogy ha  $o(g)$  és  $o(h)$  relatív prímekek, és  $gh = hg$ , akkor  $o(gh) = o(g)o(h)$ . Elhagyható-e a két feltétel valamelyike?
26. Igazoljuk, hogy  $|G|$  pontosan akkor páros, ha  $G$ -ben van másodrendű elem.
27. Legyen  $G$  csoport,  $H$  részcsoportja  $G$ -nek és  $g \in G$ . Mutassuk meg, hogy a  $g^{-1}Hg$  komplexusszorzat is részcsoport, melynek rendje ugyanaz, mint  $H$  rendje. Igaz-e, hogy a  $Hg$  jobboldali mellékosztály  $G$  egy alkalmas részcsoportja szerinti baloldali mellékosztály is egyben?
- 28\*. Bizonyítsuk be, hogy végesen generált csoportnak minden véges indexű részcsoportja végesen generált.