Mat-alkmat gyakorlat, első évfolyam második félév

Ötödik alkalom (2006. márc. 23–27)

Legyen a B szimmetrikus bilineáris függvény mátrixa M. Végezzük el rajta a következő, módosított Gauss-eliminációt. Az elemi lépés most az, hogy az egyik sorból kivonjuk egy másik skalárszorosát, és *ezután azonnal* az ugyanannyiadik oszlopból is kivonjuk a megfelelő oszlop ugyanannyiszorosát. Hasonlóképpen kicserélhetünk két sort, és *utána azonnal* a megfelelő két oszlopot. Az M mátrixot a főátlóban lefelé haladva diagonalizáljuk ezekkel a lépésekkel, ezért elég azt megmutatni, hogy az első sor és oszlop nem átlóbeli elemei kinullázhatók. Ez nyilvánvaló akkor, ha a bal felső sarokban nem nulla áll. Ha ott nulla áll, de a főátló nem végig nulla, akkor a bal felső sarokba cserélünk egy nem nulla elemet. Végül ha a főátló végig nulla, akkor az első oszlop egy nem nulla elemének sorát adjuk hozzá az első sorhoz (és a megfelelő oszlopot is az első oszlophoz).

1. *Tekintsük a* $-x^2 + 10xy - y^2 - z^2$ *és a* $-3x\overline{x} + 4ix\overline{y} - 4i\overline{x}y + 3y\overline{y} - z\overline{z}$ *kvadratikus alakot* $\mathbb{R}$ *illetve* $\mathbb{C}$ *felett. Írjuk fel ezek mátrixát, transzformáljuk őket négyzetösszeggé a fenti módszerrel is és a Gram-Schmidt eljárással is, végül határozzuk meg karakterüket.*

2. *Mely testek fölött diagonalizálható az* $x_1y_2 + x_2y_1$ *szimmetrikus bilineáris függvény? A valós test esetében adjuk meg az összes ortogonális bázist.*

3. *Legyen* Q *kvadratikus alak egy valós feletti vektortéren,* $e_1, \ldots, e_n$ *egy* Q*-ortogonális bázis, és* $U = \langle e_i \mid Q(e_i) > 0 \rangle$, $V = \langle e_i \mid Q(e_i) \geq 0 \rangle$, $W = \langle e_i \mid Q(e_i) = 0 \rangle$. *E három altér közül melyek függetlenek az* $e_1, \ldots, e_n$ *bázistól?*

4. *Ellentmond* $x^2 + y^2 + (x+y)^2 = (\sqrt{3}x)^2 + (\sqrt{3}y)^2 - (x-y)^2$ *a tehetetlenségi tételnek? (Mindkettő négyzetösszeg, de az egyikben van egy mínusz előjel is. Hogy lehet ez?)*

5. *Igazoljuk, hogy a fenti eljárás diagonális mátrixhoz vezet. Hogyan módosul a bázis az elemi lépések során?*

6*. *Igazoljuk, hogy egy valós test feletti kvadratikus alak akkor és csak akkor pozitív definit, ha mátrixában a bal felső sarokban álló aldeterminánsok (az úgynevezett főminorok) mind pozitívak, és akkor és csak akkor negatív definit, ha a növekvő főminorok előjeleinek sorozata* $-, +, -, +, -, \ldots$.

7. *Mely bilineáris függvények mátrixa nem függ a bázistól?*

8. *Egy bilineáris függvény* **antiszimmetrikus**, *ha* $B(u,v) = -B(v,u)$ *minden* u, v*-re. Igazoljuk valós felett, hogy* B *akkor és csak akkor antiszimmetrikus, ha a hozzá tartozó kvadratikus alak nulla, továbbá hogy a bilineáris függvények tere a szimmetrikus és az antiszimmetrikus bilineáris függvények altereinek direkt összege.*

9. *Igazoljuk, hogy minden komplex bilineáris függvény egyértelműen írható* $A + Bi$ *alakban, ahol* A *és* B *Hermitikus.*

10. *Legyen* B *pozitív definit bilineáris függvény. Igaz-e, hogy tetszőleges* $v_1, \ldots, v_n$ *vektorok akkor és csak akkor függetlenek, ha a* $|((B(v_i, v_j))|$ *determináns nullától különböző?*

11*. *Mely valós szimmetrikus bilineáris függvényekre eleme minden nem nulla vektor egy ortogonális bázisnak?*

12*. *Mely* B *komplex bilineáris függvényekre igaz, hogy* $B(u,v) = 0 \iff B(v,u) = 0$?

Explicit képlet a Fibonacci-sorozatra

A III/12/a feladatra sok megoldás van, mi azt mutatjuk meg, amellyel a mátrix diagonalizálását gyakorolhatjuk. Tudjuk tehát, hogy $a_0 = a_1 = 1$ és $a_{k+1} = a_k + a_{k-1}$. Legyen

$$v_k = \begin{pmatrix} a_{k-1} \\ a_k \end{pmatrix}.$$

A sorozatot megadó rekurzió mátrixszorzássá írható át:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad v_{k+1} = \begin{pmatrix} a_k \\ a_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k-1} \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} v_k\,.$$

Az itt szereplő mátrixot M-mel jelölve tehát $v_{k+1} = Mv_k = M^2 v_{k-1} = \cdots = M^k v_1$. Így elegendő az M mátrix hatványaira explicit képletet adni. Ehhez M-et bázistranszformációval diagonálissá alakítjuk. Az M karakterisztikus polinomja

$$k(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} = x^2 - x - 1\,.$$

Ennek gyökei, vagyis M sajátértékei

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{és} \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

(melyekre tehát $1 + \lambda_i = \lambda_i^2$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{5}$ és $\lambda_1\lambda_2 = -1$). A megfelelő sajátvektorokat egy mátrix oszlopaiba írva kapjuk a diagonalizálást elvégző bázistranszformáció mátrixát:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \text{azaz} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = D\,.$$

Innen $D^k = T^{-1}MTT^{-1}MT \ldots T^{-1}MT = T^{-1}M^kT$, tehát $M^k = TD^kT^{-1}$. Diagonális mátrixot elemenként lehet hatványozni, így az inverz mátrix képletét felhasználva M^k-ra

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix} \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1^k\lambda_2 - \lambda_2^k\lambda_1 & -\lambda_1^k + \lambda_2^k \\ \lambda_1^{k+1}\lambda_2 - \lambda_2^{k+1}\lambda_1 & -\lambda_1^{k+1} + \lambda_2^{k+1} \end{pmatrix}$$

adódik. A $v_k = Mv_1$ összefüggésből tehát

$$a_k = -(\lambda_1^k\lambda_2 - \lambda_2^k\lambda_1 - \lambda_1^k + \lambda_2^k)/\sqrt{5}\,.$$

Ezt még tovább alakíthatjuk a $\lambda_1\lambda_2 = -1$ és a $\lambda_i^{k-1} + \lambda_i^k = \lambda_i^{k+1}$ felhasználásával (utóbbi azért igaz, mert $1 + \lambda_i = \lambda_i^2$). A végeredmény:

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right).$$

A Fibonacci-sorozat tehát exponenciálisan nő. A kivonandó nullához tart, és így a_k az $\left(\left((1+\sqrt{5})/2\right)^{k+1}\right)/\sqrt{5}$-höz legközelebbi egész szám lesz.