Mat-alkmat gyakorlat, első évfolyam második félév

Negyedik alkalom (2006. márc. 16–21)

1. *Határozzuk meg a III/9.-beli mátrixok minimálpolinomját. Melyek azok a lineáris transzformációk a síkon, melyeknek minimálpolinomja elsőfokú? Melyeknek másodfokú? Melyek azok, amelyeknek a minimálpolinomja és a karakterisztikus polinomja különböző? Adjunk meg a síkon olyan lineáris transzformációt, melynek minimálpolinomja* x^2.

2. *Határozzuk meg egy általános diagonális mátrix minimálpolinomját.*

3. *Oldjuk meg* $\mathbb{Q}^{2\times 2}$*-ben az* $X^4 = 2X$ *egyenletet.*

4. *Igazoljuk, hogy egy racionális elemű négyzetes mátrix minimálpolinomja ugyanaz* $\mathbb{Q}$ *és* $\mathbb{C}$ *felett. (Használjunk fel egy korábban a gyakorlaton szerepelt állítást homogén racionális együtthatós egyenletrendszerek komplex megoldásairól).*

5. *Igazoljuk, hogy ha* M *invertálható mátrix, akkor* M^{-1} *polinomja* M*-nek.*

6. *Tekintsük* $\mathrm{Hom}(V)$*-ben az* $\{A^i \mid i = 0, 1, 2, \dots\}$ $(A^0 = I)$ *transzformációk által generált alteret. Hány dimenziós ez az altér?*

7. *Igaz-e, hogy tetszőleges legfeljebb* n*-edfokú* $m(x)$ *polinomhoz van az* n*-dimenziós vektortérnek egy olyan lineáris transzformációja, amelynek* $m(x)$ *a minimálpolinomja? Mely polinomok állnak elő egy alkalmas lineáris transzformáció karakterisztikus polinomjaként?*

8. *Adjuk meg az alábbi mátrixok Jordan-alakját.*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -3 & -4 & 1 \\ 6 & 9 & -2 \\ 15 & 24 & -5 \end{pmatrix}$$

9. *Bizonyítsuk be, hogy ha* M *komplex elemű mátrix, akkor* $n \to \infty$ *esetén* M^n *akkor és csak akkor tart nullához, ha* M *minden sajátértékének az abszolút értéke* 1*-nél kisebb.*

10. *Legyen* T *test,* $\lambda \in T$*, és* M *az az* $n \times n$*-es Jordan-blokk, melynek főátlójában* λ*, alatta, vele párhuzamosan csupa* 1*-es, a mátrix többi helyén pedig mindenütt nulla áll. Igazoljuk, hogy ha* $f \in T[x]$*, akkor az* $f(M)$ *mátrix elemei a következők: a főátló felett csupa nulla áll, és a főátlóval párhuzamos, a főátlótól lefelé számított* k*-adik „ferde sor" mindegyik eleme* $f^{(k)}(\lambda)/k!$*, ahol a* (k) *kitevő* k*-adik deriváltat jelöl* $(0 \le k \le n-1)$.

11. *Legyen* T *a sík egy transzformációja, ami nem nyújtás. Igazoljuk, hogy ha* T *diagonalizálható, akkor négy invariáns altere van, ha nincs valós sajátértéke, akkor kettő, különben pedig három. Adjunk meg a térben egy olyan lineáris transzformációt, melynek van olyan kétdimenziós invariáns altere, ami nem sajátaltér.*

12. *Melyek azok a transzformációk, melyekre minden altér invariáns?*

13. *Mutassuk meg, hogy ha* $AB = BA$*, akkor* A *minden sajátaltere, továbbá* $\mathrm{Im}(A)$ *és* $\mathrm{Ker}(A)$ *is* B*-invariáns altér.*

Fordíts!

14. *Van-e olyan* $M \in \mathbb{Q}^{100\times 100}$ *mátrix, melynek csak a két triviális invariáns altere van?*

15. *Tegyük fel, hogy* A *egy olyan lineáris transzformáció egy* n*-dimenziós téren, melynek* n *különböző sajátértéke van. Igazoljuk, hogy* A*-nak pontosan* 2^n *invariáns altere van. Igazoljuk azt is, hogy ha* B *felcserélhető* A*-val, akkor van olyan* f *polinom, hogy* $B = f(A)$*.*

16. *Legyen* A *lineáris transzformáció egy komplex feletti* n*-dimenziós vektortéren.*
a) *Igazoljuk, hogy ha* $k \leq n$*, akkor* A*-nak van* k*-dimenziós invariáns altere.*
b) *Mik lesznek* A *hatványainak sajátértékei? Mit mondhatunk ezek multiplicitásairól?*

17. *Legyen* W *altere a* V *vektortérnek,* $\mathbb{A} = \mathrm{Hom}(V)$ *mint algebra, és álljon* $\mathbb{B}$ *az* $\mathbb{A}$ *azon elemeiből, melyeknek* W *invariáns altere. Mutassuk meg, hogy* $\mathbb{B}$ *részalgebrája* $\mathbb{A}$*-nak, és határozzuk meg a dimenzióját.*

18. *Legyen* V *egy véges dimenziós vektortér és* $A \in \mathrm{Hom}(V)$*. Igazoljuk, hogy van olyan* k *egész, melyre* $V = \mathrm{Im}(A^k) \oplus \mathrm{Ker}(A^k)$*.*

19. *Legyen* $A \in \mathrm{Hom}(V)$ *és* $g \in T[x]$*, továbbá* $W = \mathrm{Im}(g(A))$ *és* $U = \mathrm{Ker}(g(A))$*. Igazoljuk, hogy az* A *transzformáció* W*-re illetve* U*-ra vett megszorításának minimálpolinomja* $m_A/(m_A, g)$ *illetve* (m_A, g)*. Vessük össze ezt az állítást az elem hatványának rendjéről szóló képlettel.*

20. *Legyen* $\dim V < \infty$ *és* $A \in \mathrm{Hom}(V)$*. Igaz-e, hogy* A *pontosan akkor nilpotens,*
a) *ha nem létezik olyan* $W \leq V$ *nem nulla altér, hogy* $A(W) = W$*?*
b) *ha tetszőleges* $W \leq V$ *nem nulla altérre* $\dim A(W) < \dim W$*?*

21*. *Legyen* A *egy* $n \times n$*-es nilpotens mátrix. Igazoljuk, hogy* $A^n = 0$*.*

22*. *Mutassuk meg, hogy egy komplex elemű négyzetes mátrix akkor és csak akkor nilpotens, ha minden hatványának nulla a nyoma. Az első hány hatványra kell ezt feltenni?*

23. *Egy* R *gyűrű egy* I *részhalmazát ideálnak nevezzük, ha részcsoport, és minden* $s \in I$ *és* $r \in R$ *esetén* $rs, sr \in I$*. Mutassuk meg, hogy ha* T *test, akkor* $T[x]$ *minden* I *ideáljához van olyan* m *polinom, hogy* I *pontosan az* m *többszöröseiből áll.*

24. *A Gauss-egészek az* $a+bi$ *alakú komplex számok, ahol* $a, b \in \mathbb{Z}$*. Határozzuk meg ebben a gyűrűben a legszűkebb olyan ideált, ami az* $5 + 5i$ *és a* $7i - 1$ *számokat is tartalmazza. Igaz-e, hogy ez az ideál egy alkalmas komplex szám összes többszöröseiből áll?*

25. *Legyen* V *véges dimenziós,* $A \in \mathrm{Hom}(V)$ *és* $0 \neq v \in V$*. Igazoljuk a következőket:*
a) *Azok a* p *polinomok, melyekre* $p(A)v = 0$*, ideált alkotnak* $T[x]$*-ben. Jelölje* $m_{A,v}$ *ennek a normált generátorelemét.*
b) m_A *az összes* $m_{A,v}$ *legkisebb közös többszöröse, midőn* v *befutja* V*-t.*
c) $W = \langle v, Av, A^2v, \dots \rangle$ *épp a* v*-t tartalmazó legszűkebb* A*-invariáns altér.*
d) $\dim(W) = \mathrm{gr}(m_{A,v})$*.*
e) *Ha* m_A*-nak van* k*-adfokú irreducibilis osztója, akkor* A*-nak van* k*-dimenziós invariáns altere.*
f) *Egy lineáris transzformáció karakterisztikus polinomja akkor és csak akkor irreducibilis, ha a transzformációnak csak két invariáns altere van (a triviálisak).*

Határozzuk meg az $m_{A,v}$ *polinomot tetszőleges* v *esetén, ha* A *a síkon egy tengelyes tükrözés, egy forgatás, valamint ha* A *a deriválás a polinomok vektorterén.*