

## Mat-alkmat gyakorlat, első évfolyam második félév

Második alkalom (2004. feb. 20–23)

Bizonyos vektorterekben egy-egy bázist a „szokásos” bázisnak nevezzük. Ezek a következők. A  $T$  test feletti  $T^n$  vektortérben azon  $e_1, \dots, e_n$  vektorok, melyekre  $e_i$ -nek az  $i$ -edik komponense 1, a többi komponens nulla. A  $T^{k \times n}$  vektortérben azok a mátrixok, melyekben egyetlen komponens 1, a többi nulla (ezeket a sorfolytonosság sorrendjében tekintjük). A  $T[x]$  legfeljebb  $n$ -edfokú elemeiből álló vektortérben az  $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$  bázis. A síkon, mint  $\mathbb{R}$  feletti vektortéren az  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  pontok. A  $\mathbb{C}$ -ben, mint  $\mathbb{R}$  feletti vektortérben az 1 és az  $i$ . Egy  $T$  testben, mint önmaga feletti vektortérben az egységelem.

Egy  $A$  lineáris transzformáció *nilpotens*, ha van olyan  $n$  pozitív egész, hogy  $A^n = 0$  (a nulla transzformáció), és  $A$  *idempotens*, ha  $A^2 = A$ .

- Határozzuk meg az alábbi vektorterek dimenzióját.
  - A komplex számok vektortere  $\mathbb{R}$  felett.
  - A legfeljebb  $n$ -edfokú  $T$  feletti polinomok a  $T$  test felett.
  - A  $T^{2 \times 3}$  a  $T$  test felett.
  - A legfeljebb  $n$ -edfokú  $\mathbb{C}$  feletti polinomok  $\mathbb{R}$  felett. Mi általában az összefüggés egy vektortér  $\mathbb{R}$  és  $\mathbb{C}$  feletti dimenziója között?
  - Azon legfeljebb  $n$ -edfokú  $\mathbb{Q}$  feletti polinomok  $\mathbb{Q}$  felett, melyeknek 2 gyöke.
  - Az  $\mathbb{R}^n$  azon elemei  $\mathbb{R}$  felett, ahol az első koordináta is, a koordináták összege is 0.
  - A  $T^{n \times n}$  (főátlóra) szimmetrikus mátrixai a  $T$  test felett.
- A  $\mathbb{Z}_2^3$  vektortérben hány direkt kiegészítő altere van egy egydimenziós alternek?
- Legyen  $V$  véges dimenziós vektortér, és  $U, W$  alterek  $V$ -ben. Bizonyítsuk be, hogy  $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$ .
- Legyenek  $V_1, \dots, V_n$  alterei a  $V$  vektortérnek. Igazoljuk, hogy az alábbiak ekvivalensek.
  - A  $V_1 + \dots + V_n$  összeg direkt összeg (vagyis minden eleme **egyértelműen** áll elő  $v_1 + \dots + v_n$  alakban, ahol  $v_i \in V_i$ ).
  - Mindegyik  $V_i$  csak a nullvektorban metszi a többi  $V_j$  összegét.
  - Bárhogyan is veszünk ki nem nulla  $v_i \in V_i$  vektorokat,  $v_1, \dots, v_n$  lineárisan független.
- Egy tízdimenziós térben kiválasztunk három kilencdimenziós alteret. Mekkora lehet a metszetük dimenziója? Adjunk példát minden lehetséges értékre.
- Mutassuk meg, hogy  $n \geq 2$  esetén minden  $\mathbb{R}$  feletti  $n$ -dimenziós vektortérnek végtelen sok  $n - 1$ -dimenziós altere van.
- Az alábbi  $A : V_1 \rightarrow V_2$  leképezések közül melyek lineárisak? Ahol a válasz igenlő, ott adjuk meg a leképezés mátrixát a szokásos, illetve a megadott bázis(pár)ban, határozzuk meg a kép- és magterét, és ellenőrizzük a dimenziótétel állítását.
  - $V_1$  és  $V_2$  a sík  $\mathbb{R}$  felett,  $A$  egy eltolás; egy pont körüli forgatás; egy egyenesre (pontra) való tükrözés; egy egyenesre való vetítés. A mátrixot csak az origó körüli  $\alpha$  szögű forgatás; az  $y = x$  egyenesre való tükrözés; az erre az egyenesre való, függőleges vetítés esetében számítsuk ki, a szokásos, illetve a  $b_1 = (1, 2)$ ,  $b_2 = (-1, 1)$  bázisban.
  - $V_1 = \mathbb{R}$  az  $\mathbb{R}$  felett,  $V_2 = \mathbb{C}$  a  $\mathbb{C}$  felett,  $A$  az  $1 + i$  számmal való szorzás.

FORDÍTS!

- c)  $V_1 = V_2 = \mathbb{C}$  az  $\mathbb{R}$  felett,  $A$  az  $1 + i$  számmal való szorzás.  
 d)  $V_1 = \mathbb{R}^n$ ,  $V_2 = \mathbb{R}$  az  $\mathbb{R}$  felett,  $A(v)$  a  $v$  komponenseinek az összege.  
 e)  $V_1 = V_2 = \mathbb{R}^{2 \times 2}$  az  $\mathbb{R}$  felett,  $A$  a transzponálás (azaz a főátlóra való tükrözés).  
 f)  $V_1 = \mathbb{R}[x]$  legfeljebb harmadfokú elemei,  $V_2 = \mathbb{C}$  az  $\mathbb{R}$  felett,  $A(f) = f(i)$ .  
 g)  $V_1 = V_2 = \mathbb{R}[x]$  legfeljebb  $n$ -edfokú elemei az  $\mathbb{R}$  felett,  $A(f) = f'$  (derivált).

**8.** Ha egy lineáris transzformáció mátrixa egy adott bázisban  $M$ , mi lesz a mátrix akkor, ha mindegyik bázisvektort (csak az első bázisvektort) a kétszeresére növeljük? Mely lineáris transzformációknak lesz minden bázisban ugyanaz a mátrixa?

**9.** Az  $A$  transzformáció mátrixa a sík szokásos bázisában  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ . Adjuk meg a bázistranszformáció képletét felhasználva az  $A$  mátrixát az  $(1, 1)$ ,  $(1, 2)$  bázisban.

**10.** Legyen  $W$  a  $V$  véges dimenziós vektortér tetszőleges altere. Bizonyítsuk be, hogy  $V$ -nek létezik olyan lineáris transzformációja, amelynek  $W$  a magtere, illetve a képtere.

**11.** Legyen  $V$  véges dimenziós vektortér,  $A : V \rightarrow V$  pedig egy lineáris transzformáció. Ha  $\text{Im}(A^2) = \text{Im}(A)$ , következik-e ebből, hogy  $\text{Ker}(A^2) = \text{Ker}(A)$ ? Igaz-e a megfordítás?

**12.** Mutassuk meg, hogy ha  $A$  idempotens lineáris transzformáció a  $V$  vektortéren, akkor  $\text{Im}(A) \oplus \text{Ker}(A) = V$ . Igazoljuk, hogy a sík egy lineáris transzformációja akkor és csak akkor idempotens, ha nulla, az identitás, vagy egy origón átmenő egyenesre való (nem feltétlenül merőleges) vetítés.

**13.** Igazoljuk, hogy ha az  $A$  és  $B$  nilpotens, lineáris transzformációk felcserélhetők (azaz  $AB = BA$ ), akkor  $A + B$  is nilpotens. Elhagyható-e a felcserélhetőség feltétele?

**14.** Legyen  $V$  egy  $n$ -dimenziós vektortér és  $v, w \in V$ . Alteret alkotnak-e  $\text{Hom}(V)$ -ben az alábbi halmazok? Ha igen, hány dimenziós ez az alter?

- a)  $\{A \in \text{Hom}(V) \mid A(v) = w\}$ ;  
 b)  $\{A \in \text{Hom}(V) \mid A(v) \in \langle w \rangle\}$ .

Határozzuk meg  $\text{Hom}(V)$ -ben az izomorfizmusok által generált alteret.

**15.** Adjunk meg olyan  $A$  és  $B$  lineáris transzformációkat egy alkalmas  $V$  vektortéren, melyekre  $AB = I$  (az identitás), de  $BA$  nem az.

**16.** Legyenek  $V_1$  és  $V_2$  véges dimenziós vektorterek, és  $A \in \text{Hom}(V_1, V_2)$ . Igazoljuk:

- a) Ha  $A$  szürjektív, akkor generátorrendszert generátorrendszerbe visz.  
 b) Ha  $A$  valamilyen halmazt generátorrendszerbe visz, akkor szürjektív.  
 c) Ha  $A$  injektív, akkor független halmazt függetlenbe visz.  
 d) Ha  $A$  egy bázist függetlenbe visz, akkor injektív.  
 e) Van olyan  $B$  lineáris leképezés, hogy  $ABA = A$  és  $BAB = B$ , és itt ha  $A$  szürjektív, akkor  $B$  jobbinverze, ha pedig  $A$  injektív, akkor  $B$  balinverze  $A$ -nak.  
 f)  $(AX = AY \implies X = Y) \iff A$  injektív  $\iff A$  balinvertálható.  
 g)  $(XA = YA \implies X = Y) \iff A$  szürjektív  $\iff A$  jobbinvertálható.

**17.** Algebrát alkotnak-e  $\mathbb{R}$  felett az  $\mathbb{R}$ -en értelmezett, valós értékű, folytonos függvények a szokásos, pontonkénti műveletekre? És akkor, ha a szorzást a kompozícióval helyettesítjük?

További gyakorlásul a Freud-könyv negyedik és ötödik fejezetének feladatait javaslom, leginkább ezeket: 4.2.7, 4.2.12, 5.1.15, 5.3.4, 5.4.3, 5.6.19, 5.7.7, 5.7.8, 5.8.3, 5.8.7.