

Mat-alkmat gyakorlat, első évfolyam második félév

Első alkalom (2006. február 13–16)

1. Lineárisan függetlenek-e az alábbi vektorrendszerek? Mennyi a rangjuk?

a) Az \mathbb{R} feletti \mathbb{R}^3 vektortérben az alábbi mátrixok oszlopvektorai.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Az \mathbb{R} feletti $\mathbb{R}[x]$ vektortérben $\{1, x, x^2\}$, $\{x, 2x, x^2, x^3\}$, $\{1 + x, 1 + 2x, 1 + 3x\}$, $\{1 + x, 1 + x^2, x + x^2\}$.

c) Az \mathbb{R} feletti \mathbb{C} vektortérben tetszőleges három komplex szám.

2. Igazoljuk az alábbiakat.

a) Ha egy vektorrendszerben szerepel a nullvektor, akkor az nem lehet független.

b) $\{v\}$ akkor és csak akkor független, ha $v \neq 0$.

c) Ha $\{v_1, v_2, v_3\}$ független, akkor $\{v_1 + v_2, v_2, v_3\}$ is független.

d) Páronként különböző fokú polinomok rendszere mindig független.

3. Tegyük fel, hogy egy vektortér a, b, c, d vektoraira $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$ mindegyike összefüggő, de $\{a, b, c\}$ független. Határozzuk meg d -t.

4. Legyenek v_1, \dots, v_n vektorok egy V vektortérben. Ha a $v_i + v_j$ ($1 \leq i < j \leq n$) vektorok rendszere lineárisan független, mennyi lehet n ?

5*. Meg lehet-e adni \mathbb{R}^n -ben végtelen sok vektort úgy, hogy közülük bármely n lineárisan független legyen?

6. Altér-e a W halmaz a V vektortérben az alábbi esetekben?

a) $V = T[x]$ a T test felett, W a páros fokú polinomok, és a zéruspolinom.

b) $V = T[x]$ a T test felett, W a legfeljebb tizedfokú polinomok, és a zéruspolinom.

c) V a komplex számok vektortere \mathbb{R} illetve \mathbb{C} felett, és $W = \{z \mid \operatorname{Re}(z) = 0\}$.

d) V a sík \mathbb{R} felett, W pedig az első és harmadik síknegyed uniója.

7. Igaz-e \mathbb{R} felett, hogy $x \in \langle x^2 - 1, x^2 - 2, 3x + 2 \rangle$? És $\langle x, x^2 + 2, x + 2 \rangle = \langle 1, x + 1, x^2 + 1 \rangle$?

8. Legyen V a sík (helyvektorai), mint \mathbb{R} feletti vektortér.

a) Milyen alakzatot alkothat egy 1 illetve 2 elemmel generált altér?

b) Igazoljuk, hogy minden altér generálható két elemmel, és adjuk meg az összes alteret.

c) Hány altere van a \mathbb{Z}_2 test feletti \mathbb{Z}_2^2 és \mathbb{Z}_2^3 vektortereknek? És a \mathbb{Z}_7 feletti \mathbb{Z}_7^2 -nek?

9. Legyen V vektortér a T test felett.

a) Mi az üres halmaz által generált altér?

b) Mutassuk meg, hogy egy 1 elemmel generált altérnek legfeljebb két altere lehet.

c) Mikor lesz két altér uniója is altér?

d) Mutassuk meg, hogy ha U, V, W alterek egy vektortérben és $U \supseteq V$, akkor fennáll az úgynevezett moduláris összefüggés: $U \cap (W + V) = (U \cap W) + V$.

FORDÍTS!

10. Mutassuk meg, hogy ha egy \mathbb{R} feletti vektortérnek véges sok altere van, akkor az alterek száma 1 vagy 2. Milyen T testek felett igaz még ez az állítás?

11. Legyen W altere az \mathbb{R} feletti V vektortérnek, és $u, v \in V$. Tegyük fel, hogy $2u+6v \in W$ és $3u+v \in W$. Következik-e ebből, hogy $u, v \in W$?

12. Ha egy V vektortér vektoraira $a \notin \langle b, c \rangle$, $b \notin \langle a, c \rangle$ és $c \in \langle a, b \rangle$, akkor mi a c ?

13. Igazoljuk tetszőleges T test feletti V vektortérben az alábbi állításokat.

a) $(\forall \lambda \in T)(\forall v \in V)(\lambda v = 0_V \iff (\lambda = 0_T \vee v = 0_V))$.

b) $(\forall v \in V)((-1_T)v = -v)$.

14. Legyen $V = \{a, b\}$, definiáljuk az „összeadást” úgy, hogy $a + a = a + b = b + a = a$, és $b + b = b$. Definiáljuk továbbá tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ és $v \in V$ esetén λv -t v -nek. Mely vektortéraxiómák teljesülnek? Igaz-e, hogy $(-1)v$ ellentettje v -nek minden $v \in V$ -re? A $(-1)v = -v$ összefüggés bizonyításában hol használtuk ki, hogy V -ben létezik ellentett?

15. Igazoljuk, hogy az összeadás kommutativitása következik a többi vektortéraxiómából.

16. Adjunk példát olyan V vektortérre, és W részhalmazra, mely az összeadásra zárt, de az ellentett képzésére nem. Mutassuk meg, hogy egy vektortér egy részhalmaza akkor és csak akkor altér, ha nem üres, és zárt a vektortérműveletekre.

17. Az alábbiakban négy bizonyítást adunk arra, hogy egy altér nulleleme megegyezik a vektortér nullelemével, ezek közül azonban csak az egyik helyes. Melyik a helyes, és mi a hiba a többiben? (Altéren itt olyan W részhalmazt értünk, ami maga is vektortér V összeadására és skalárral való szorzására nézve. A V nullelemét 0_V , a W -ét 0_W jelöli.)

a) Mivel $0_V + v = v$ minden $v \in V$ -re, tehát W elemeire is teljesül, ezért 0_V definíció szerint W -nek is nulleleme. A W -beli nullelem egyértelműsége alapján így $0_W = 0_V$.

b) Ha $0_W \neq 0_V$ lenne, akkor V -ben két nullelem lenne, ami ellentmond a V -beli nullelem egyértelműségének.

c) Legyen $v \in W$ tetszőleges. Ekkor $0_V + v = v$ és $0_W + v = v$ egyaránt fennáll, tehát $0_V + v = 0_W + v$. Itt mindkét oldalhoz a v vektor W -beli [a negyedik bizonyításban: V -beli] ellentettjét hozzáadva a kívánt $0_V = 0_W$ egyenlőséget kapjuk.

18. Az alábbi állítások közül melyek igazak egy n -dimenziós V vektortérben?

a) Ha F független is és generátorrendszer is, akkor F maximális független részhalmaz.

b) Ha F maximális független, akkor generátorrendszer.

c) Ha G minimális generátorrendszer, akkor független.

d) Bármely két generátorrendszer egyenlő elemszámú.

e) Bármely két minimális generátorrendszer egyenlő elemszámú.

f) Ha F elemszáma n , és független, akkor generátorrendszer (bázis) is.

g) Ha G elemszáma n , és generátorrendszer, akkor független (bázis) is.

h) Bármely n elemű részhalmaz generátorrendszer.

i) Van olyan $n + 1$ elemű részhalmaz, ami generátorrendszer.

19*. A szultán gondolt \mathbb{R}^{1001} -ben egy bázist, amit Seherezádénak 1001 éjszaka alatt ki kell találnia, különben kivégzik. Éjszakánként egy általa választott vektorról megkérdezheti, hogy mik a koordinátái. Életben marad-e Seherezádé? Mi a helyzet akkor, ha mindig csak az első koordinátára kérdezhet rá, és a kegyelem feltétele az első bázisvektor kitalálása?