Algebra1, alapszint

ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Előadó: Kiss Emil

ewkiss@cs.elte.hu

9. előadás

Egész számok osztása

Példa

$$223 \; : \; 7 = \boxed{}$$

$$\underline{}$$

$$\overline{\boxed{}}$$

Egész számok osztása

Példa

$$223 : 7 = \boxed{}$$

$$\boxed{}$$

Egész számok osztása

Példa

$$223 : 7 = \boxed{3\ }$$

$$\overline{}$$

$$\boxed{}$$

Egész számok osztása

Példa

$$223 : 7 = \boxed{3}$$

$$\underline{}$$

$$\boxed{}$$

Visszaszorzunk

Egész számok osztása

Példa

$$\begin{array}{rl} 223 : 7 = & \boxed{3\ } \\ \underline{21} & \\ \boxed{} & \end{array}$$

Visszaszorzunk

Egész számok osztása

Példa

$$\begin{array}{r} 223 : 7 = \boxed{3} \\ \underline{21} \\ \boxed{} \end{array}$$

Kivonunk

Egész számok osztása

Példa

$$\begin{array}{r} 223 \;:\; 7 = \boxed{3} \\ -\,21 \\ \hline \\ \overline{\boxed{}} \end{array}$$

Kivonunk

Egész számok osztása

Példa

$$
\begin{array}{r}
223 \;:\; 7 = \boxed{3\;\;} \\
-\,21 \\
\hline
1
\end{array}
$$

$$\boxed{}$$

Kivonunk

Egész számok osztása

Példa

$$
\begin{array}{rl}
22\color{red}{3} : 7 = & \boxed{3\ \ } \\
-21 & \\
\hline
13 & \\
\\
\boxed{} &
\end{array}
$$

Egész számok osztása

Példa

$$\begin{array}{r} 223 : 7 = \boxed{31} \\ -21\phantom{3 : 7 = \boxed{31}} \\ \hline 13\phantom{: 7 = \boxed{31}} \\ \\ \overline{\boxed{}}\phantom{: 7 = \boxed{31}} \end{array}$$

Egész számok osztása

Példa

$$\begin{array}{rl} 223 & : \ 7 = \boxed{31} \\ -\,21 & \\ \hline 13 & \\ \\ \overline{\boxed{}} & \end{array}$$

Visszaszorzunk

Egész számok osztása

Példa

$$\begin{array}{r} 223 : 7 = \boxed{31} \\ -\,21 \\ \hline 13 \\ 7 \\ \hline \boxed{} \end{array}$$

Visszaszorzunk

Egészt számok osztása

Példa

$$\begin{array}{r l}
223 & : \ 7 = \boxed{31} \\
-\,21 & \\
\hline
13 & \\
7 & \\
\hline
\boxed{} &
\end{array}$$

Kivonunk

Egész számok osztása

Példa

$$
\begin{array}{r}
223 \;:\; 7 = \boxed{31} \\
-\,21 \\
\hline
13 \\
-\,7 \\
\hline
\boxed{}
\end{array}
$$

Kivonunk

Egész számok osztása

Példa

$$
\begin{array}{r}
223 : 7 = \boxed{31} \\
-\,21 \\
\hline
13 \\
-\,7 \\
\hline
\boxed{6}
\end{array}
$$

Kivonunk

Egész számok osztása

Példa

$$
\begin{array}{r}
223 : 7 = \boxed{31} \\
-21 \\
\hline
13 \\
-7 \\
\hline
\boxed{6}
\end{array}
$$

$223 = 7 \cdot 31 + 6.$

Egész számok osztása

Példa

$$\begin{array}{rl} 223 : 7 = & \boxed{31} \\ -21 & \\ \hline 13 & \\ -7 & \\ \hline \boxed{6} & \end{array}$$

$223 = 7 \cdot 31 + 6.$

Állítás (számelméletből)

Minden $a, b \in \mathbb{Z}$ esetén, ahol $b \neq 0$, létezik olyan $q, r \in \mathbb{Z}$,

Egész számok osztása

Példa

$$
\begin{array}{rl}
223 : 7 = & \boxed{31} \\
-21 & \\
\hline
13 & \\
-7 & \\
\hline
\boxed{6} &
\end{array}
$$

$223 = 7 \cdot 31 + 6.$

Állítás (számelméletből)

Minden $a, b \in \mathbb{Z}$ esetén, ahol $b \neq 0$, létezik olyan $q, r \in \mathbb{Z}$, hogy $a = bq + r$

Egész számok osztása

Példa

$$
\begin{array}{rl}
223 : 7 = & \boxed{31} \\
-21 & \\
\hline
13 & \\
-7 & \\
\hline
\boxed{6} &
\end{array}
$$

$223 = 7 \cdot 31 + 6.$

Állítás (számelméletből)

Minden $a, b \in \mathbb{Z}$ esetén, ahol $b \neq 0$, létezik olyan $q, r \in \mathbb{Z}$, hogy $a = bq + r$ és $|r| < |b|$.

Polinomok osztása

Példa

$$(2x^3 + 2x^2 + 3x + 2) : (x^2 + 1) = \boxed{}$$

$$\boxed{}$$

Polinomok osztása

Példa

$$(2x^3 + 2x^2 + 3x + 2) : (x^2 + 1) = \boxed{}$$

Polinomok osztása

Példa

$$(2x^3 + 2x^2 + 3x + 2) : (x^2 + 1) = \boxed{}$$

$$(2x^3)/x^2 = 2x$$

Polinomok osztása

Példa

$$(2x^3 + 2x^2 + 3x + 2) : (x^2 + 1) = \boxed{2x}$$

$$\square$$

$(2x^3)/x^2 = 2x$

Polinomok osztása

Példa

$$(2x^3 + 2x^2 + 3x + 2) : (x^2 + 1) = \boxed{2x \quad}$$

Visszaszorzunk: $(2x)(x^2 + 1) = 2x^3 + 2x$

Polinomok osztása

Példa

$$
\begin{array}{l}
(2x^3 + 2x^2 + 3x + 2) : (x^2+1) = \boxed{2x \quad} \\
\underline{(2x^3 + \quad 0 \quad + 2x)} \\
\\
\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
\qquad\qquad \square
\end{array}
$$

Visszaszorzunk: $(2x)(x^2+1) = 2x^3 + 2x$

Polinomok osztása

Példa

$$
\begin{array}{l}
(2x^3 + 2x^2 + 3x + 2) : (x^2+1) = \boxed{2x \quad} \\
\underline{(2x^3 + 0 + 2x)} \\
\\
\underline{} \\
\qquad\qquad \square
\end{array}
$$

Kivonunk

Polinomok osztása

Példa

$$
\begin{array}{l}
\quad (2x^3 + 2x^2 + 3x + 2) : (x^2+1) = \boxed{2x \qquad} \\
\underline{-(2x^3 + \quad 0 \quad + 2x)} \\
\\
\qquad\qquad \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \boxed{}
\end{array}
$$

Kivonunk

Polinomok osztása

Példa

$$
\begin{array}{rl}
(2x^3 + 2x^2 + 3x + 2) : (x^2+1) = & \boxed{2x \quad} \\
-(2x^3 + 0 + 2x) & \\
\hline
2x^2 + x + 2 & \\
\hline
\square &
\end{array}
$$

Kivonunk

Polinomok osztása

Példa

$$
\begin{array}{rl}
(2x^3 + 2x^2 + 3x + 2) : (x^2 + 1) = & \boxed{2x \quad} \\
-\,(2x^3 + 0 + 2x) & \\
\hline
2x^2 + x + 2 & \\
\hline
\boxed{} &
\end{array}
$$

Polinomok osztása

Példa

$$
\begin{array}{rl}
(2x^3 + 2x^2 + 3x + 2) : (x^2 + 1) = & \boxed{2x \quad} \\
-(2x^3 + 0 + 2x) & \\
\hline
2x^2 + x + 2 & \\
\hline
\square &
\end{array}
$$

$(2x^2)/x^2 = 2$

Polinomok osztása

Példa

$$
\begin{array}{rl}
(2x^3 + 2x^2 + 3x + 2) : (x^2+1) = & \boxed{2x+2} \\
-\,(2x^3 + \ \ 0 \ \ + 2x) & \\
\hline
2x^2 + x + 2 & \\
\hline
\square &
\end{array}
$$

$(2x^2)/x^2 = 2$

Polinomok osztása

Példa

$$
\begin{array}{rrrrl}
(2x^3 & +\ 2x^2 & +\ 3x & +\ 2) & :\ (x^2+1) = \boxed{2x+2} \\
-\,(2x^3 & +\ \ 0 & +\ 2x) & & \\
\hline
 & 2x^2 & +\ \ x & +\ 2 & \\
\hline
 & & \square & &
\end{array}
$$

Visszaszorzunk: $2(x^2+1) = 2x^2+2$

Polinomok osztása

Példa

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrl}
 & (2x^3 & + & 2x^2 & + & 3x & + & 2) & : & (x^2+1) = \boxed{2x+2} \\
- & (2x^3 & + & 0 & + & 2x) & & & & \\
\hline
 & & & 2x^2 & + & x & + & 2 & & \\
 & & & (2x^2 & + & 0 & + & 2) & & \\
\hline
 & & & & & \boxed{} & & & &
\end{array}
$$

Visszaszorzunk: $2(x^2+1) = 2x^2+2$

Polinomok osztása

Példa

$$
\begin{array}{rrrrrl}
 & (2x^3 & + \; 2x^2 & + \; 3x & + \; 2) & : \; (x^2+1) = \boxed{2x+2} \\
- & (2x^3 & + \;\; 0 & + \; 2x) & & \\
\hline
 & & 2x^2 & + \;\; x & + \; 2 & \\
 & & (2x^2 & + \;\; 0 & + \; 2) & \\
\hline
 & & & \boxed{} & &
\end{array}
$$

Kivonunk

Polinomok osztása

Példa

$$
\begin{array}{rrrrl}
(2x^3 + & 2x^2 & + 3x & + 2) & : (x^2+1) = \boxed{2x+2} \\
-\,(2x^3 + & 0 & + 2x) & & \\
\hline
 & 2x^2 & + x & + 2 & \\
 & -\,(2x^2 + & 0 & + 2) & \\
\hline
 & & \boxed{} & &
\end{array}
$$

Kivonunk

Polinomok osztása

Példa

$$
\begin{array}{rcccccl}
 & (2x^3 & + & 2x^2 & + 3x & + 2) & : (x^2+1) = \boxed{2x+2} \\
- & (2x^3 & + & 0 & + 2x) & & \\
\hline
 & & & 2x^2 & + x & + 2 & \\
 & & - & (2x^2 & + 0 & + 2) & \\
\hline
 & & & & \boxed{x} & &
\end{array}
$$

Kivonunk

Polinomok osztása

Példa

$$
\begin{array}{rrrrl}
(2x^3 & + \; 2x^2 & + \; 3x & + \; 2) & : \; (x^2+1) = \boxed{2x+2} \\
-\,(2x^3 & + \;\; 0 & + \; 2x) & & \\
\hline
 & 2x^2 & + \;\; x & + \; 2 & \\
 & -\,(2x^2 & + \;\; 0 & + \; 2) & \\
\cline{2-4}
 & & \boxed{x} & &
\end{array}
$$

$$2x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = (x^2 + 1)(2x + 2) + x.$$

Polinomok osztása

Példa

$$
\begin{array}{rl}
(2x^3 + 2x^2 + 3x + 2) : (x^2+1) = & \boxed{2x+2} \\
-(2x^3 + 0 + 2x) & \\
\hline
2x^2 + x + 2 & \\
-(2x^2 + 0 + 2) & \\
\hline
\boxed{x} &
\end{array}
$$

$$2x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = (x^2+1)(2x+2) + x.$$

Tétel

Minden $f, g \in \mathbb{C}[x]$ esetén, ahol $g \neq 0$,

Polinomok osztása

Példa

$$
\begin{array}{rrrrl}
(2x^3 & + \; 2x^2 & + \; 3x & + \; 2) & : \; (x^2+1) = \boxed{2x+2} \\
-\,(2x^3 & + \;\; 0 & + \; 2x) & & \\
\hline
 & 2x^2 & + \;\; x & + \; 2 & \\
 & -\,(2x^2 & + \;\; 0 & + \; 2) & \\
\hline
 & & \boxed{x} & &
\end{array}
$$

$2x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = (x^2+1)(2x+2) + x.$

Tétel

Minden $f, g \in \mathbb{C}[x]$ esetén, ahol $g \neq 0$, létezik olyan $q, r \in \mathbb{C}[x]$,

Polinomok osztása

Példa

$$
\begin{array}{rcccccccl}
 & (2x^3 & + & 2x^2 & + & 3x & + & 2) & : \ (x^2+1) = \boxed{2x+2} \\
- & (2x^3 & + & 0 & + & 2x) & & & \\
\hline
 & & & 2x^2 & + & x & + & 2 & \\
 & & - & (2x^2 & + & 0 & + & 2) & \\
\hline
 & & & & & \boxed{x} & & &
\end{array}
$$

$2x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = (x^2+1)(2x+2) + x.$

Tétel

Minden $f, g \in \mathbb{C}[x]$ esetén, ahol $g \neq 0$, létezik olyan $q, r \in \mathbb{C}[x]$, hogy $f = gq + r$,

Polinomok osztása

Példa

$$
\begin{array}{rrrrrrrl}
 & (2x^3 & + & 2x^2 & + & 3x & + & 2) \;:\; (x^2+1) = \boxed{2x+2} \\
- & (2x^3 & + & 0 & + & 2x) & & \\
\hline
 & & & 2x^2 & + & x & + & 2 \\
 & & - & (2x^2 & + & 0 & + & 2) \\
\hline
 & & & & & \boxed{x} & &
\end{array}
$$

$2x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = (x^2+1)(2x+2) + x.$

Tétel

Minden $f, g \in \mathbb{C}[x]$ esetén, ahol $g \neq 0$, létezik olyan $q, r \in \mathbb{C}[x]$, hogy $f = gq + r$, és $r = 0$,

Polinomok osztása

Példa

$$
\begin{array}{rrrrrrrrr}
 & (2x^3 & + & 2x^2 & + & 3x & + & 2) & : (x^2+1) = \boxed{2x+2} \\
- & (2x^3 & + & 0 & + & 2x) & & & \\
\hline
 & & & 2x^2 & + & x & + & 2 & \\
 & & - & (2x^2 & + & 0 & + & 2) & \\
\hline
 & & & & & \boxed{x} & & &
\end{array}
$$

$$2x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = (x^2 + 1)(2x + 2) + x.$$

Tétel

Minden $f, g \in \mathbb{C}[x]$ esetén, ahol $g \neq 0$, létezik olyan $q, r \in \mathbb{C}[x]$, hogy $f = gq + r$, és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.

Polinomok osztása

Példa

$$
\begin{array}{rrrrrl}
 & (2x^3 & + \; 2x^2 & + \; 3x & + \; 2) & : \; (x^2+1) = \boxed{2x+2} \\
- & (2x^3 & + \quad 0 & + \; 2x) & & \\
\hline
 & & 2x^2 & + \; x & + \; 2 & \\
 & - & (2x^2 & + \; 0 & + \; 2) & \\
\hline
 & & & \boxed{x} & &
\end{array}
$$

$2x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = (x^2 + 1)(2x + 2) + x.$

Tétel

Minden $f, g \in \mathbb{C}[x]$ esetén, ahol $g \neq 0$, létezik olyan $q, r \in \mathbb{C}[x]$, hogy $f = gq + r$, és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.
A q és r egyértelműen meghatározott.

Maradékos osztás: létezés

Tétel

Minden $f, g \in \mathbb{C}[x]$ esetén, ahol $g \neq 0$, létezik olyan $q, r \in \mathbb{C}[x]$, hogy $f = gq + r$, és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.

Maradékos osztás: létezés

Tétel

Minden $f, g \in \mathbb{C}[x]$ esetén, ahol $g \neq 0$, létezik olyan $q, r \in \mathbb{C}[x]$, hogy $f = gq + r$, és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.

Bizonyítás

$\mathrm{gr}(f)$ szerinti indukció.

Maradékos osztás: létezés

Tétel

Minden $f, g \in \mathbb{C}[x]$ esetén, ahol $g \neq 0$, létezik olyan $q, r \in \mathbb{C}[x]$, hogy $f = gq + r$, és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.

Bizonyítás

$\mathrm{gr}(f)$ szerinti indukció. Ha $f = 0$, vagy $\mathrm{gr}(f) < \mathrm{gr}(g)$: $f = g \cdot 0 + f$.

Maradékos osztás: létezés

Tétel

Minden $f, g \in \mathbb{C}[x]$ esetén, ahol $g \neq 0$, létezik olyan $q, r \in \mathbb{C}[x]$, hogy $f = gq + r$, és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.

Bizonyítás

$\mathrm{gr}(f)$ szerinti indukció. Ha $f = 0$, vagy $\mathrm{gr}(f) < \mathrm{gr}(g)$: $f = g \cdot 0 + f$.
Tegyük föl: $\mathrm{gr}(f) = n \geq \mathrm{gr}(g)$, és az n-nél kisebb fokúakra igaz.

Maradékos osztás: létezés

Tétel

Minden $f, g \in \mathbb{C}[x]$ esetén, ahol $g \neq 0$, létezik olyan $q, r \in \mathbb{C}[x]$, hogy $f = gq + r$, és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.

Bizonyítás

$\mathrm{gr}(f)$ szerinti indukció. Ha $f = 0$, vagy $\mathrm{gr}(f) < \mathrm{gr}(g)$: $f = g \cdot 0 + f$.
Tegyük föl: $\mathrm{gr}(f) = n \geq \mathrm{gr}(g)$, és az n-nél kisebb fokúakra igaz.
Legyen f főtagja ax^n

Maradékos osztás: létezés

Tétel

Minden $f, g \in \mathbb{C}[x]$ esetén, ahol $g \neq 0$, létezik olyan $q, r \in \mathbb{C}[x]$, hogy $f = gq + r$, és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.

Bizonyítás

$\mathrm{gr}(f)$ szerinti indukció. Ha $f = 0$, vagy $\mathrm{gr}(f) < \mathrm{gr}(g)$: $f = g \cdot 0 + f$.
Tegyük föl: $\mathrm{gr}(f) = n \geq \mathrm{gr}(g)$, és az n-nél kisebb fokúakra igaz.
Legyen f főtagja ax^n és g főtagja bx^m,

Maradékos osztás: létezés

Tétel

Minden $f, g \in \mathbb{C}[x]$ esetén, ahol $g \neq 0$, létezik olyan $q, r \in \mathbb{C}[x]$, hogy $f = gq + r$, és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.

Bizonyítás

$\mathrm{gr}(f)$ szerinti indukció. Ha $f = 0$, vagy $\mathrm{gr}(f) < \mathrm{gr}(g)$: $f = g \cdot 0 + f$.
Tegyük föl: $\mathrm{gr}(f) = n \geq \mathrm{gr}(g)$, és az n-nél kisebb fokúakra igaz.
Legyen f főtagja ax^n és g főtagja bx^m, ahol $b \neq 0$

Maradékos osztás: létezés

Tétel

Minden $f, g \in \mathbb{C}[x]$ esetén, ahol $g \neq 0$, létezik olyan $q, r \in \mathbb{C}[x]$, hogy $f = gq + r$, és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.

Bizonyítás

$\mathrm{gr}(f)$ szerinti indukció. Ha $f = 0$, vagy $\mathrm{gr}(f) < \mathrm{gr}(g)$: $f = g \cdot 0 + f$.
Tegyük föl: $\mathrm{gr}(f) = n \geq \mathrm{gr}(g)$, és az n-nél kisebb fokúakra igaz.
Legyen f főtagja ax^n és g főtagja bx^m, ahol $b \neq 0$ és $m \leq n$.

Maradékos osztás: létezés

Tétel

Minden $f, g \in \mathbb{C}[x]$ esetén, ahol $g \neq 0$, létezik olyan $q, r \in \mathbb{C}[x]$, hogy $f = gq + r$, és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.

Bizonyítás

$\mathrm{gr}(f)$ szerinti indukció. Ha $f = 0$, vagy $\mathrm{gr}(f) < \mathrm{gr}(g)$: $f = g \cdot 0 + f$.
Tegyük föl: $\mathrm{gr}(f) = n \geq \mathrm{gr}(g)$, és az n-nél kisebb fokúakra igaz.
Legyen f főtagja ax^n és g főtagja bx^m, ahol $b \neq 0$ és $m \leq n$.
Ekkor $f_0 = f - (a/b)x^{n-m}g$-ből kiesik az n-edfokú tag.

Maradékos osztás: létezés

Tétel

Minden $f, g \in \mathbb{C}[x]$ esetén, ahol $g \neq 0$, létezik olyan $q, r \in \mathbb{C}[x]$, hogy $f = gq + r$, és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.

Bizonyítás

$\mathrm{gr}(f)$ szerinti indukció. Ha $f = 0$, vagy $\mathrm{gr}(f) < \mathrm{gr}(g)$: $f = g \cdot 0 + f$.
Tegyük föl: $\mathrm{gr}(f) = n \geq \mathrm{gr}(g)$, és az n-nél kisebb fokúakra igaz.
Legyen f főtagja ax^n és g főtagja bx^m, ahol $b \neq 0$ és $m \leq n$.
Ekkor $f_0 = f - (a/b)x^{n-m}g$-ből kiesik az n-edfokú tag.
Indukciós feltevés: $f_0 = gq_0 + r$,

Maradékos osztás: létezés

Tétel

Minden $f, g \in \mathbb{C}[x]$ esetén, ahol $g \neq 0$, létezik olyan $q, r \in \mathbb{C}[x]$, hogy $f = gq + r$, és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.

Bizonyítás

$\mathrm{gr}(f)$ szerinti indukció. Ha $f = 0$, vagy $\mathrm{gr}(f) < \mathrm{gr}(g)$: $f = g \cdot 0 + f$.
Tegyük föl: $\mathrm{gr}(f) = n \geq \mathrm{gr}(g)$, és az n-nél kisebb fokúakra igaz.
Legyen f főtagja ax^n és g főtagja bx^m, ahol $b \neq 0$ és $m \leq n$.
Ekkor $f_0 = f - (a/b)x^{n-m}g$-ből kiesik az n-edfokú tag.
Indukciós feltevés: $f_0 = gq_0 + r$, ahol $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.

Maradékos osztás: létezés

Tétel

Minden $f, g \in \mathbb{C}[x]$ esetén, ahol $g \neq 0$, létezik olyan $q, r \in \mathbb{C}[x]$, hogy $f = gq + r$, és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.

Bizonyítás

$\mathrm{gr}(f)$ szerinti indukció. Ha $f = 0$, vagy $\mathrm{gr}(f) < \mathrm{gr}(g)$: $f = g \cdot 0 + f$.
Tegyük föl: $\mathrm{gr}(f) = n \geq \mathrm{gr}(g)$, és az n-nél kisebb fokúakra igaz.
Legyen f főtagja ax^n és g főtagja bx^m, ahol $b \neq 0$ és $m \leq n$.
Ekkor $f_0 = f - (a/b)x^{n-m}g$-ből kiesik az n-edfokú tag.
Indukciós feltevés: $f_0 = gq_0 + r$, ahol $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.
$f = f_0 + (a/b)x^{n-m}g$

Maradékos osztás: létezés

Tétel

Minden $f, g \in \mathbb{C}[x]$ esetén, ahol $g \neq 0$, létezik olyan $q, r \in \mathbb{C}[x]$, hogy $f = gq + r$, és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.

Bizonyítás

$\mathrm{gr}(f)$ szerinti indukció. Ha $f = 0$, vagy $\mathrm{gr}(f) < \mathrm{gr}(g)$: $f = g \cdot 0 + f$.
Tegyük föl: $\mathrm{gr}(f) = n \geq \mathrm{gr}(g)$, és az n-nél kisebb fokúakra igaz.
Legyen f főtagja ax^n és g főtagja bx^m, ahol $b \neq 0$ és $m \leq n$.
Ekkor $f_0 = f - (a/b)x^{n-m}g$-ből kiesik az n-edfokú tag.
Indukciós feltevés: $f_0 = gq_0 + r$, ahol $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.
$f = f_0 + (a/b)x^{n-m}g = g\big(q_0 + (a/b)x^{n-m}\big) + r$.

Maradékos osztás: létezés

Tétel

Minden $f, g \in \mathbb{C}[x]$ esetén, ahol $g \neq 0$, létezik olyan $q, r \in \mathbb{C}[x]$, hogy $f = gq + r$, és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.

Bizonyítás

$\mathrm{gr}(f)$ szerinti indukció. Ha $f = 0$, vagy $\mathrm{gr}(f) < \mathrm{gr}(g)$: $f = g \cdot 0 + f$.
Tegyük föl: $\mathrm{gr}(f) = n \geq \mathrm{gr}(g)$, és az n-nél kisebb fokúakra igaz.
Legyen f főtagja ax^n és g főtagja bx^m, ahol $b \neq 0$ és $m \leq n$.
Ekkor $f_0 = f - (a/b)x^{n-m}g$-ből kiesik az n-edfokú tag.
Indukciós feltevés: $f_0 = gq_0 + r$, ahol $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.
$f = f_0 + (a/b)x^{n-m}g = g\big(q_0 + (a/b)x^{n-m}\big) + r$.
Tehát f is elosztható maradékosan g-vel. $\square$

Maradékos osztás: létezés

Tétel

Minden $f, g \in \mathbb{C}[x]$ esetén, ahol $g \neq 0$, létezik olyan $q, r \in \mathbb{C}[x]$, hogy $f = gq + r$, és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.

Bizonyítás

$\mathrm{gr}(f)$ szerinti indukció. Ha $f = 0$, vagy $\mathrm{gr}(f) < \mathrm{gr}(g)$: $f = g \cdot 0 + f$.
Tegyük föl: $\mathrm{gr}(f) = n \geq \mathrm{gr}(g)$, és az n-nél kisebb fokúakra igaz.
Legyen f főtagja ax^n és g főtagja bx^m, ahol $b \neq 0$ és $m \leq n$.
Ekkor $f_0 = f - (a/b)x^{n-m}g$-ből kiesik az n-edfokú tag.
Indukciós feltevés: $f_0 = gq_0 + r$, ahol $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.
$f = f_0 + (a/b)x^{n-m}g = g\big(q_0 + (a/b)x^{n-m}\big) + r$.
Tehát f is elosztható maradékosan g-vel. $\square$

A q és r együtthatói a négy alapművelettel kaphatók.

Maradékos osztás: létezés

Tétel

Minden $f, g \in \mathbb{C}[x]$ esetén, ahol $g \neq 0$, létezik olyan $q, r \in \mathbb{C}[x]$, hogy $f = gq + r$, és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.

Bizonyítás

$\mathrm{gr}(f)$ szerinti indukció. Ha $f = 0$, vagy $\mathrm{gr}(f) < \mathrm{gr}(g)$: $f = g \cdot 0 + f$.
Tegyük föl: $\mathrm{gr}(f) = n \geq \mathrm{gr}(g)$, és az n-nél kisebb fokúakra igaz.
Legyen f főtagja ax^n és g főtagja bx^m, ahol $b \neq 0$ és $m \leq n$.
Ekkor $f_0 = f - (a/b)x^{n-m}g$-ből kiesik az n-edfokú tag.
Indukciós feltevés: $f_0 = gq_0 + r$, ahol $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.
$f = f_0 + (a/b)x^{n-m}g = g\big(q_0 + (a/b)x^{n-m}\big) + r$.
Tehát f is elosztható maradékosan g-vel. $\square$

A q és r együtthatói a négy alapművelettel kaphatók.
Az eljárás során csak g főegyütthatójával osztunk.

Maradékos osztás: együtthatók

Tétel

Minden $f, g \in \mathbb{C}[x]$ esetén, ahol $g \neq 0$, létezik olyan $q, r \in \mathbb{C}[x]$, hogy $f = gq + r$, és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.

A q és r együtthatói a négy alapművelettel kaphatók.
Az eljárás során csak g főegyütthatójával osztunk.

Maradékos osztás: együtthatók

Tétel

Minden $f, g \in \mathbb{C}[x]$ esetén, ahol $g \neq 0$, létezik olyan $q, r \in \mathbb{C}[x]$, hogy $f = gq + r$, és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.

A q és r együtthatói a négy alapművelettel kaphatók.
Az eljárás során csak g főegyütthatójával osztunk.

Következmény

Lehet maradékosan osztani $\mathbb{R}[x]$-ben és $\mathbb{Q}[x]$-ben is.

Maradékos osztás: együtthatók

Tétel

Minden $f, g \in \mathbb{C}[x]$ esetén, ahol $g \neq 0$, létezik olyan $q, r \in \mathbb{C}[x]$, hogy $f = gq + r$, és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.

A q és r együtthatói a négy alapművelettel kaphatók.
Az eljárás során csak g főegyütthatójával osztunk.

Következmény

Lehet maradékosan osztani $\mathbb{R}[x]$-ben és $\mathbb{Q}[x]$-ben is.
Oka: $\mathbb{R}$-ben és $\mathbb{Q}$-ban minden nem nulla számmal oszthatunk.

Maradékos osztás: együtthatók

Tétel

Minden $f, g \in \mathbb{C}[x]$ esetén, ahol $g \neq 0$, létezik olyan $q, r \in \mathbb{C}[x]$, hogy $f = gq + r$, és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.

A q és r együtthatói a négy alapművelettel kaphatók.
Az eljárás során csak g főegyütthatójával osztunk.

Következmény

Lehet maradékosan osztani $\mathbb{R}[x]$-ben és $\mathbb{Q}[x]$-ben is.
Oka: $\mathbb{R}$-ben és $\mathbb{Q}$-ban minden nem nulla számmal oszthatunk.

Következmény

$\mathbb{Z}[x]$-ben oszthatunk maradékosan az olyan polinomokkal,

Maradékos osztás: együtthatók

Tétel

Minden $f, g \in \mathbb{C}[x]$ esetén, ahol $g \neq 0$, létezik olyan $q, r \in \mathbb{C}[x]$, hogy $f = gq + r$, és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.

A q és r együtthatói a négy alapművelettel kaphatók.
Az eljárás során csak g főegyütthatójával osztunk.

Következmény

Lehet maradékosan osztani $\mathbb{R}[x]$-ben és $\mathbb{Q}[x]$-ben is.
Oka: $\mathbb{R}$-ben és $\mathbb{Q}$-ban minden nem nulla számmal oszthatunk.

Következmény

$\mathbb{Z}[x]$-ben oszthatunk maradékosan az olyan polinomokkal, amelyek főegyütthatója 1 vagy -1.

Maradékos osztás: együtthatók

Tétel

Minden $f, g \in \mathbb{C}[x]$ esetén, ahol $g \neq 0$, létezik olyan $q, r \in \mathbb{C}[x]$, hogy $f = gq + r$, és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.

A q és r együtthatói a négy alapművelettel kaphatók.
Az eljárás során csak g főegyütthatójával osztunk.

Következmény

Lehet maradékosan osztani $\mathbb{R}[x]$-ben és $\mathbb{Q}[x]$-ben is.
Oka: $\mathbb{R}$-ben és $\mathbb{Q}$-ban minden nem nulla számmal oszthatunk.

Következmény

$\mathbb{Z}[x]$-ben oszthatunk maradékosan az olyan polinomokkal, amelyek főegyütthatója 1 vagy -1.
Oka: $\mathbb{Z}$-ben 1-gyel és -1-gyel minden számot eloszthatunk.

Maradékos osztás NINCS $\mathbb{Z}[x]$-ben

Példa

A $x : 2$ maradékos osztás nem végezhető el $\mathbb{Z}[x]$-ben.

Maradékos osztás NINCS $\mathbb{Z}[x]$-ben

Példa

A $x : 2$ maradékos osztás nem végezhető el $\mathbb{Z}[x]$-ben.

Bizonyítás

Indirekt föltevés:

Maradékos osztás NINCS $\mathbb{Z}[x]$-ben

Példa

A $x : 2$ maradékos osztás nem végezhető el $\mathbb{Z}[x]$-ben.

Bizonyítás

Indirekt föltevés:

$x = 2q + r$,

Maradékos osztás NINCS $\mathbb{Z}[x]$-ben

Példa

A $x : 2$ maradékos osztás nem végezhető el $\mathbb{Z}[x]$-ben.

Bizonyítás

Indirekt föltevés:

$x = 2q + r$, ahol $q, r \in \mathbb{Z}[x]$,

Maradékos osztás NINCS $\mathbb{Z}[x]$-ben

Példa

A $x : 2$ maradékos osztás nem végezhető el $\mathbb{Z}[x]$-ben.

Bizonyítás

Indirekt föltevés:

$x = 2q + r$, ahol $q, r \in \mathbb{Z}[x]$, és $r = 0$ vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(2)$.

Maradékos osztás NINCS $\mathbb{Z}[x]$-ben

Példa

A $x : 2$ maradékos osztás nem végezhető el $\mathbb{Z}[x]$-ben.

Bizonyítás

Indirekt föltevés:
$x = 2q + r$, ahol $q, r \in \mathbb{Z}[x]$, és $r = 0$ vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(2)$.
De $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(2) = 0$ nem lehet,

Maradékos osztás NINCS $\mathbb{Z}[x]$-ben

Példa

A $x : 2$ maradékos osztás nem végezhető el $\mathbb{Z}[x]$-ben.

Bizonyítás

Indirekt föltevés:
$x = 2q + r$, ahol $q, r \in \mathbb{Z}[x]$, és $r = 0$ vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(2)$.
De $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(2) = 0$ nem lehet, tehát $r = 0$,

Maradékos osztás NINCS $\mathbb{Z}[x]$-ben

Példa

A $x : 2$ maradékos osztás nem végezhető el $\mathbb{Z}[x]$-ben.

Bizonyítás

Indirekt föltevés:
$x = 2q + r$, ahol $q, r \in \mathbb{Z}[x]$, és $r = 0$ vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(2)$.
De $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(2) = 0$ nem lehet, tehát $r = 0$, azaz $x = 2q(x)$.

Maradékos osztás NINCS $\mathbb{Z}[x]$-ben

Példa

A $x : 2$ maradékos osztás nem végezhető el $\mathbb{Z}[x]$-ben.

Bizonyítás

Indirekt föltevés:
$x = 2q + r$, ahol $q, r \in \mathbb{Z}[x]$, és $r = 0$ vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(2)$.
De $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(2) = 0$ nem lehet, tehát $r = 0$, azaz $x = 2q(x)$.
Ez lehetetlen, például $x = 1$-et helyettesítve azt kapjuk, hogy $1 = 2q(1)$,

Maradékos osztás NINCS $\mathbb{Z}[x]$-ben

Példa

A $x : 2$ maradékos osztás nem végezhető el $\mathbb{Z}[x]$-ben.

Bizonyítás

Indirekt föltevés:
$x = 2q + r$, ahol $q, r \in \mathbb{Z}[x]$, és $r = 0$ vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(2)$.
De $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(2) = 0$ nem lehet, tehát $r = 0$, azaz $x = 2q(x)$.
Ez lehetetlen, például $x = 1$-et helyettesítve azt kapjuk, hogy $1 = 2q(1)$, azaz 1 páros szám,

Maradékos osztás NINCS $\mathbb{Z}[x]$-ben

Példa

A $x : 2$ maradékos osztás nem végezhető el $\mathbb{Z}[x]$-ben.

Bizonyítás

Indirekt föltevés:
$x = 2q + r$, ahol $q, r \in \mathbb{Z}[x]$, és $r = 0$ vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(2)$.
De $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(2) = 0$ nem lehet, tehát $r = 0$, azaz $x = 2q(x)$.
Ez lehetetlen, például $x = 1$-et helyettesítve azt kapjuk, hogy $1 = 2q(1)$, azaz 1 páros szám, ami ellentmondás. $\square$

Maradékos osztás NINCS $\mathbb{Z}[x]$-ben

Példa

A $x : 2$ maradékos osztás nem végezhető el $\mathbb{Z}[x]$-ben.

Bizonyítás

Indirekt föltevés:
$x = 2q + r$, ahol $q, r \in \mathbb{Z}[x]$, és $r = 0$ vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(2)$.
De $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(2) = 0$ nem lehet, tehát $r = 0$, azaz $x = 2q(x)$.
Ez lehetetlen, például $x = 1$-et helyettesítve azt kapjuk, hogy $1 = 2q(1)$, azaz 1 páros szám, ami ellentmondás. $\square$

Megjegyzés

$\mathbb{Q}[x]$-ben $x : 2$-nél

Maradékos osztás NINCS $\mathbb{Z}[x]$-ben

Példa

A $x : 2$ maradékos osztás nem végezhető el $\mathbb{Z}[x]$-ben.

Bizonyítás

Indirekt föltevés:
$x = 2q + r$, ahol $q, r \in \mathbb{Z}[x]$, és $r = 0$ vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(2)$.
De $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(2) = 0$ nem lehet, tehát $r = 0$, azaz $x = 2q(x)$.
Ez lehetetlen, például $x = 1$-et helyettesítve azt kapjuk, hogy $1 = 2q(1)$, azaz 1 páros szám, ami ellentmondás. $\square$

Megjegyzés

$\mathbb{Q}[x]$-ben $x : 2$-nél a hányados $x/2$,

Maradékos osztás NINCS $\mathbb{Z}[x]$-ben

Példa

A $x : 2$ maradékos osztás nem végezhető el $\mathbb{Z}[x]$-ben.

Bizonyítás

Indirekt föltevés:
$x = 2q + r$, ahol $q, r \in \mathbb{Z}[x]$, és $r = 0$ vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(2)$.
De $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(2) = 0$ nem lehet, tehát $r = 0$, azaz $x = 2q(x)$.
Ez lehetetlen, például $x = 1$-et helyettesítve azt kapjuk, hogy $1 = 2q(1)$, azaz 1 páros szám, ami ellentmondás. $\square$

Megjegyzés

$\mathbb{Q}[x]$-ben $x : 2$-nél a hányados $x/2$, a maradék 0.

Maradékos osztás NINCS $\mathbb{Z}[x]$-ben

Példa

A $x : 2$ maradékos osztás nem végezhető el $\mathbb{Z}[x]$-ben.

Bizonyítás

Indirekt föltevés:
$x = 2q + r$, ahol $q, r \in \mathbb{Z}[x]$, és $r = 0$ vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(2)$.
De $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(2) = 0$ nem lehet, tehát $r = 0$, azaz $x = 2q(x)$.
Ez lehetetlen, például $x = 1$-et helyettesítve azt kapjuk, hogy $1 = 2q(1)$, azaz 1 páros szám, ami ellentmondás. $\square$

Megjegyzés

$\mathbb{Q}[x]$-ben $x : 2$-nél a hányados $x/2$, a maradék 0.
Így a maradékos osztás egyértelműségéből is látszik, hogy $x : 2$ nem végezhető el $\mathbb{Z}[x]$-ben,

Maradékos osztás NINCS $\mathbb{Z}[x]$-ben

Példa

A $x : 2$ maradékos osztás nem végezhető el $\mathbb{Z}[x]$-ben.

Bizonyítás

Indirekt föltevés:
$x = 2q + r$, ahol $q, r \in \mathbb{Z}[x]$, és $r = 0$ vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(2)$.
De $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(2) = 0$ nem lehet, tehát $r = 0$, azaz $x = 2q(x)$.
Ez lehetetlen, például $x = 1$-et helyettesítve azt kapjuk, hogy $1 = 2q(1)$, azaz 1 páros szám, ami ellentmondás. □

Megjegyzés

$\mathbb{Q}[x]$-ben $x : 2$-nél a hányados $x/2$, a maradék 0.
Így a maradékos osztás egyértelműségéből is látszik, hogy $x : 2$ nem végezhető el $\mathbb{Z}[x]$-ben, hiszen $x/2 \notin \mathbb{Z}[x]$.

Maradékos osztás: egyértelműség

Tétel

Legyen $f, g \in \mathbb{C}[x]$, ahol $g \neq 0$.

Maradékos osztás: egyértelműség

Tétel

Legyen $f, g \in \mathbb{C}[x]$, ahol $g \neq 0$.
$f = gq_1 + r_1$,

Maradékos osztás: egyértelműség

Tétel

Legyen $f, g \in \mathbb{C}[x]$, ahol $g \neq 0$.
$f = gq_1 + r_1$, ahol $r_1 = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r_1) < \mathrm{gr}(g)$.

Maradékos osztás: egyértelműség

Tétel

Legyen $f, g \in \mathbb{C}[x]$, ahol $g \neq 0$.
$f = gq_1 + r_1$, ahol $r_1 = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r_1) < \mathrm{gr}(g)$.
$f = gq_2 + r_2$,

Maradékos osztás: egyértelműség

Tétel

Legyen $f, g \in \mathbb{C}[x]$, ahol $g \neq 0$.
$f = gq_1 + r_1$, ahol $r_1 = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r_1) < \mathrm{gr}(g)$.
$f = gq_2 + r_2$, ahol $r_2 = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r_2) < \mathrm{gr}(g)$.

Maradékos osztás: egyértelműség

Tétel

Legyen $f, g \in \mathbb{C}[x]$, ahol $g \neq 0$.
$f = gq_1 + r_1$, ahol $r_1 = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r_1) < \mathrm{gr}(g)$.
$f = gq_2 + r_2$, ahol $r_2 = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r_2) < \mathrm{gr}(g)$.
Ekkor $q_1 = q_2$

Maradékos osztás: egyértelműség

Tétel

Legyen $f, g \in \mathbb{C}[x]$, ahol $g \neq 0$.
$f = gq_1 + r_1$, ahol $r_1 = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r_1) < \mathrm{gr}(g)$.
$f = gq_2 + r_2$, ahol $r_2 = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r_2) < \mathrm{gr}(g)$.
Ekkor $q_1 = q_2$ és $r_1 = r_2$.

Maradékos osztás: egyértelműség

Tétel

Legyen $f, g \in \mathbb{C}[x]$, ahol $g \neq 0$.
$f = gq_1 + r_1$, ahol $r_1 = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r_1) < \mathrm{gr}(g)$.
$f = gq_2 + r_2$, ahol $r_2 = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r_2) < \mathrm{gr}(g)$.
Ekkor $q_1 = q_2$ és $r_1 = r_2$.

Bizonyítás

$gq_1 + r_1 = f = gq_2 + r_2$,

Maradékos osztás: egyértelműség

Tétel

Legyen $f, g \in \mathbb{C}[x]$, ahol $g \neq 0$.
$f = gq_1 + r_1$, ahol $r_1 = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r_1) < \mathrm{gr}(g)$.
$f = gq_2 + r_2$, ahol $r_2 = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r_2) < \mathrm{gr}(g)$.
Ekkor $q_1 = q_2$ és $r_1 = r_2$.

Bizonyítás

$gq_1 + r_1 = f = gq_2 + r_2$, átrendezéssel $g(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$.

Maradékos osztás: egyértelműség

Tétel

Legyen $f, g \in \mathbb{C}[x]$, ahol $g \neq 0$.
$f = gq_1 + r_1$, ahol $r_1 = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r_1) < \mathrm{gr}(g)$.
$f = gq_2 + r_2$, ahol $r_2 = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r_2) < \mathrm{gr}(g)$.
Ekkor $q_1 = q_2$ és $r_1 = r_2$.

Bizonyítás

$gq_1 + r_1 = f = gq_2 + r_2$, átrendezéssel $g(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$.
Itt $r_2 - r_1$ vagy nulla, vagy g-nél kisebb fokú.

Maradékos osztás: egyértelműség

Tétel

Legyen $f, g \in \mathbb{C}[x]$, ahol $g \neq 0$.
$f = gq_1 + r_1$, ahol $r_1 = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r_1) < \mathrm{gr}(g)$.
$f = gq_2 + r_2$, ahol $r_2 = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r_2) < \mathrm{gr}(g)$.
Ekkor $q_1 = q_2$ és $r_1 = r_2$.

Bizonyítás

$gq_1 + r_1 = f = gq_2 + r_2$, átrendezéssel $g(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$.
Itt $r_2 - r_1$ vagy nulla, vagy g-nél kisebb fokú.
Ha $q_1 - q_2 \neq 0$, akkor
$\mathrm{gr}\big(g(q_1 - q_2)\big) = \mathrm{gr}(g) + \mathrm{gr}(q_1 - q_2)$

Maradékos osztás: egyértelműség

Tétel

Legyen $f, g \in \mathbb{C}[x]$, ahol $g \neq 0$.
$f = gq_1 + r_1$, ahol $r_1 = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r_1) < \mathrm{gr}(g)$.
$f = gq_2 + r_2$, ahol $r_2 = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r_2) < \mathrm{gr}(g)$.
Ekkor $q_1 = q_2$ és $r_1 = r_2$.

Bizonyítás

$gq_1 + r_1 = f = gq_2 + r_2$, átrendezéssel $g(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$.
Itt $r_2 - r_1$ vagy nulla, vagy g-nél kisebb fokú.
Ha $q_1 - q_2 \neq 0$, akkor
$\mathrm{gr}\big(g(q_1 - q_2)\big) = \mathrm{gr}(g) + \mathrm{gr}(q_1 - q_2) \geq \mathrm{gr}(g)$.

Maradékos osztás: egyértelműség

Tétel

Legyen $f, g \in \mathbb{C}[x]$, ahol $g \neq 0$.
$f = gq_1 + r_1$, ahol $r_1 = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r_1) < \mathrm{gr}(g)$.
$f = gq_2 + r_2$, ahol $r_2 = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r_2) < \mathrm{gr}(g)$.
Ekkor $q_1 = q_2$ és $r_1 = r_2$.

Bizonyítás

$gq_1 + r_1 = f = gq_2 + r_2$, átrendezéssel $g(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$.
Itt $r_2 - r_1$ vagy nulla, vagy g-nél kisebb fokú.
Ha $q_1 - q_2 \neq 0$, akkor
$\mathrm{gr}\big(g(q_1 - q_2)\big) = \mathrm{gr}(g) + \mathrm{gr}(q_1 - q_2) \geq \mathrm{gr}(g)$.
Ez ellentmondás, tehát $q_1 - q_2 = 0$,

Maradékos osztás: egyértelműség

Tétel

Legyen $f, g \in \mathbb{C}[x]$, ahol $g \neq 0$.
$f = gq_1 + r_1$, ahol $r_1 = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r_1) < \mathrm{gr}(g)$.
$f = gq_2 + r_2$, ahol $r_2 = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r_2) < \mathrm{gr}(g)$.
Ekkor $q_1 = q_2$ és $r_1 = r_2$.

Bizonyítás

$gq_1 + r_1 = f = gq_2 + r_2$, átrendezéssel $g(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$.
Itt $r_2 - r_1$ vagy nulla, vagy g-nél kisebb fokú.
Ha $q_1 - q_2 \neq 0$, akkor
$\mathrm{gr}\big(g(q_1 - q_2)\big) = \mathrm{gr}(g) + \mathrm{gr}(q_1 - q_2) \geq \mathrm{gr}(g)$.
Ez ellentmondás, tehát $q_1 - q_2 = 0$, és így $q_1 = q_2$.

Maradékos osztás: egyértelműség

Tétel

Legyen $f, g \in \mathbb{C}[x]$, ahol $g \neq 0$.
$f = gq_1 + r_1$, ahol $r_1 = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r_1) < \mathrm{gr}(g)$.
$f = gq_2 + r_2$, ahol $r_2 = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r_2) < \mathrm{gr}(g)$.
Ekkor $q_1 = q_2$ és $r_1 = r_2$.

Bizonyítás

$gq_1 + r_1 = f = gq_2 + r_2$, átrendezéssel $g(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$.
Itt $r_2 - r_1$ vagy nulla, vagy g-nél kisebb fokú.
Ha $q_1 - q_2 \neq 0$, akkor
$\mathrm{gr}\big(g(q_1 - q_2)\big) = \mathrm{gr}(g) + \mathrm{gr}(q_1 - q_2) \geq \mathrm{gr}(g)$.
Ez ellentmondás, tehát $q_1 - q_2 = 0$, és így $q_1 = q_2$.
De akkor $r_2 - r_1 = g \cdot 0 = 0$,

Maradékos osztás: egyértelműség

Tétel

Legyen $f, g \in \mathbb{C}[x]$, ahol $g \neq 0$.
$f = gq_1 + r_1$, ahol $r_1 = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r_1) < \mathrm{gr}(g)$.
$f = gq_2 + r_2$, ahol $r_2 = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r_2) < \mathrm{gr}(g)$.
Ekkor $q_1 = q_2$ és $r_1 = r_2$.

Bizonyítás

$gq_1 + r_1 = f = gq_2 + r_2$, átrendezéssel $g(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$.
Itt $r_2 - r_1$ vagy nulla, vagy g-nél kisebb fokú.
Ha $q_1 - q_2 \neq 0$, akkor
$\mathrm{gr}\big(g(q_1 - q_2)\big) = \mathrm{gr}(g) + \mathrm{gr}(q_1 - q_2) \geq \mathrm{gr}(g)$.
Ez ellentmondás, tehát $q_1 - q_2 = 0$, és így $q_1 = q_2$.
De akkor $r_2 - r_1 = g \cdot 0 = 0$, és így $r_1 = r_2$. $\square$

Maradékos osztás: egyértelműség

Tétel

Legyen $f, g \in \mathbb{C}[x]$, ahol $g \neq 0$.
$f = gq_1 + r_1$, ahol $r_1 = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r_1) < \mathrm{gr}(g)$.
$f = gq_2 + r_2$, ahol $r_2 = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r_2) < \mathrm{gr}(g)$.
Ekkor $q_1 = q_2$ és $r_1 = r_2$.

Bizonyítás

$gq_1 + r_1 = f = gq_2 + r_2$, átrendezéssel $g(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$.
Itt $r_2 - r_1$ vagy nulla, vagy g-nél kisebb fokú.
Ha $q_1 - q_2 \neq 0$, akkor
$\mathrm{gr}\big(g(q_1 - q_2)\big) = \mathrm{gr}(g) + \mathrm{gr}(q_1 - q_2) \geq \mathrm{gr}(g)$.
Ez ellentmondás, tehát $q_1 - q_2 = 0$, és így $q_1 = q_2$.
De akkor $r_2 - r_1 = g \cdot 0 = 0$, és így $r_1 = r_2$. $\square$

Lásd Kiss-jegyzet, 3.2. Szakasz.

Oszthatóság

Definíció

Legyen R a $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ egyike.

Oszthatóság

Definíció

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy a $g \in R[x]$ polinom osztója $f \in R[x]$-nek $R[x]$-ben,

Oszthatóság

Definíció

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy a $g \in R[x]$ polinom osztója $f \in R[x]$-nek $R[x]$-ben, ha létezik olyan $h \in R[x]$ polinom, hogy $f(x) = g(x)h(x)$.

Oszthatóság

Definíció

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy a $g \in R[x]$ polinom osztója $f \in R[x]$-nek $R[x]$-ben, ha létezik olyan $h \in R[x]$ polinom, hogy $f(x) = g(x)h(x)$.
Jelölés: $g \mid f$ (vagy néha $g \mid_{R[x]} f$).

Oszthatóság

Definíció

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy a $g \in R[x]$ polinom osztója $f \in R[x]$-nek $R[x]$-ben, ha létezik olyan $h \in R[x]$ polinom, hogy $f(x) = g(x)h(x)$.
Jelölés: $g \mid f$ (vagy néha $g \mid_{R[x]} f$).

Példák

$x + 1$ osztója $x^2 - 1$-nek

Oszthatóság

Definíció

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy a $g \in R[x]$ polinom osztója $f \in R[x]$-nek $R[x]$-ben, ha létezik olyan $h \in R[x]$ polinom, hogy $f(x) = g(x)h(x)$.
Jelölés: $g \mid f$ (vagy néha $g \mid_{R[x]} f$).

Példák

$x + 1$ osztója $x^2 - 1$-nek $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{Z}[x]$ mindegyikében,

Oszthatóság

Definíció

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy a $g \in R[x]$ polinom osztója $f \in R[x]$-nek $R[x]$-ben, ha létezik olyan $h \in R[x]$ polinom, hogy $f(x) = g(x)h(x)$.
Jelölés: $g \mid f$ (vagy néha $g \mid_{R[x]} f$).

Példák

$x + 1$ osztója $x^2 - 1$-nek $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{Z}[x]$ mindegyikében, mert $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$,

Oszthatóság

Definíció

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy a $g \in R[x]$ polinom osztója $f \in R[x]$-nek $R[x]$-ben, ha létezik olyan $h \in R[x]$ polinom, hogy $f(x) = g(x)h(x)$.
Jelölés: $g \mid f$ (vagy néha $g \mid_{R[x]} f$).

Példák

$x + 1$ osztója $x^2 - 1$-nek $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{Z}[x]$ mindegyikében, mert $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$, és $x + 1 \in \mathbb{Z}[x], \mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$.

Oszthatóság

Definíció

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy a $g \in R[x]$ polinom osztója $f \in R[x]$-nek $R[x]$-ben, ha létezik olyan $h \in R[x]$ polinom, hogy $f(x) = g(x)h(x)$.
Jelölés: $g \mid f$ (vagy néha $g \mid_{R[x]} f$).

Példák

$x+1$ osztója x^2-1-nek $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{Z}[x]$ mindegyikében, mert $x^2-1=(x+1)(x-1)$, és $x+1 \in \mathbb{Z}[x], \mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$.

2 osztója x-nek

Oszthatóság

Definíció

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy a $g \in R[x]$ polinom osztója $f \in R[x]$-nek $R[x]$-ben, ha létezik olyan $h \in R[x]$ polinom, hogy $f(x) = g(x)h(x)$.
Jelölés: $g \mid f$ (vagy néha $g \mid_{R[x]} f$).

Példák

$x + 1$ osztója $x^2 - 1$-nek $\mathbb{C}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{Q}[x], \mathbb{Z}[x]$ mindegyikében, mert $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$, és $x + 1 \in \mathbb{Z}[x], \mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$.

2 osztója x-nek $\mathbb{C}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{Q}[x]$ mindegyikében,

Oszthatóság

Definíció

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy a $g \in R[x]$ polinom osztója $f \in R[x]$-nek $R[x]$-ben, ha létezik olyan $h \in R[x]$ polinom, hogy $f(x) = g(x)h(x)$.
Jelölés: $g \mid f$ (vagy néha $g \mid_{R[x]} f$).

Példák

$x + 1$ osztója $x^2 - 1$-nek $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{Z}[x]$ mindegyikében, mert $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$, és $x + 1 \in \mathbb{Z}[x], \mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$.

2 osztója x-nek $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ mindegyikében, mert $x = 2(x/2)$,

Oszthatóság

Definíció

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy a $g \in R[x]$ polinom osztója $f \in R[x]$-nek $R[x]$-ben, ha létezik olyan $h \in R[x]$ polinom, hogy $f(x) = g(x)h(x)$.
Jelölés: $g \mid f$ (vagy néha $g \mid_{R[x]} f$).

Példák

$x + 1$ osztója $x^2 - 1$-nek $\mathbb{C}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{Q}[x], \mathbb{Z}[x]$ mindegyikében, mert $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$, és $x + 1 \in \mathbb{Z}[x], \mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$.

2 osztója x-nek $\mathbb{C}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{Q}[x]$ mindegyikében, mert $x = 2(x/2)$, és $x/2 \in \mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$.

Oszthatóság

Definíció

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy a $g \in R[x]$ polinom osztója $f \in R[x]$-nek $R[x]$-ben, ha létezik olyan $h \in R[x]$ polinom, hogy $f(x) = g(x)h(x)$.
Jelölés: $g \mid f$ (vagy néha $g \mid_{R[x]} f$).

Példák

$x + 1$ osztója $x^2 - 1$-nek $\mathbb{C}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{Q}[x], \mathbb{Z}[x]$ mindegyikében, mert $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$, és $x + 1 \in \mathbb{Z}[x], \mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$.

2 osztója x-nek $\mathbb{C}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{Q}[x]$ mindegyikében, mert $x = 2(x/2)$, és $x/2 \in \mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$.

2 nem osztója x-nek $\mathbb{Z}[x]$-ben,

Oszthatóság

Definíció

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy a $g \in R[x]$ polinom osztója $f \in R[x]$-nek $R[x]$-ben, ha létezik olyan $h \in R[x]$ polinom, hogy $f(x) = g(x)h(x)$.
Jelölés: $g \mid f$ (vagy néha $g \mid_{R[x]} f$).

Példák

$x + 1$ osztója $x^2 - 1$-nek $\mathbb{C}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{Q}[x], \mathbb{Z}[x]$ mindegyikében, mert $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$, és $x + 1 \in \mathbb{Z}[x], \mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$.

2 osztója x-nek $\mathbb{C}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{Q}[x]$ mindegyikében, mert $x = 2(x/2)$, és $x/2 \in \mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$.

2 nem osztója x-nek $\mathbb{Z}[x]$-ben, mert ha $2h(x) = x$ lenne, ahol $h(x) = c_0 + c_1x + \ldots$, és $c_0, c_1, \ldots$ egészek,

Oszthatóság

Definíció

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy a $g \in R[x]$ polinom osztója $f \in R[x]$-nek $R[x]$-ben, ha létezik olyan $h \in R[x]$ polinom, hogy $f(x) = g(x)h(x)$.
Jelölés: $g \mid f$ (vagy néha $g \mid_{R[x]} f$).

Példák

$x + 1$ osztója $x^2 - 1$-nek $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{Z}[x]$ mindegyikében, mert $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$, és $x + 1 \in \mathbb{Z}[x], \mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$.

2 osztója x-nek $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ mindegyikében, mert $x = 2(x/2)$, és $x/2 \in \mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$.

2 nem osztója x-nek $\mathbb{Z}[x]$-ben, mert ha $2h(x) = x$ lenne, ahol $h(x) = c_0 + c_1x + \ldots$, és $c_0, c_1, \ldots$ egészek, akkor x együtthatóját véve $2c_1 = 1$ teljesülne.

A hányados együtthatói

Következmény (Kiss-jegyzet, 3.2.2. Állítás)

Tegyük föl, hogy $g(x)$ osztója $f(x)$-nek $\mathbb{C}[x]$-ben, és $f, g \in \mathbb{R}[x]$.

A hányados együtthatói

Következmény (Kiss-jegyzet, 3.2.2. Állítás)

Tegyük föl, hogy $g(x)$ osztója $f(x)$-nek $\mathbb{C}[x]$-ben, és $f, g \in \mathbb{R}[x]$. Ekkor $g \mid f$ teljesül $\mathbb{R}[x]$-ben is.

A hányados együtthatói

Következmény (Kiss-jegyzet, 3.2.2. Állítás)

Tegyük föl, hogy $g(x)$ osztója $f(x)$-nek $\mathbb{C}[x]$-ben, és $f, g \in \mathbb{R}[x]$. Ekkor $g \mid f$ teljesül $\mathbb{R}[x]$-ben is.

Bizonyítás

A feltevés szerint $f(x) = g(x)h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.

A hányados együtthatói

Következmény (Kiss-jegyzet, 3.2.2. Állítás)

Tegyük föl, hogy $g(x)$ osztója $f(x)$-nek $\mathbb{C}[x]$-ben, és $f, g \in \mathbb{R}[x]$. Ekkor $g \mid f$ teljesül $\mathbb{R}[x]$-ben is.

Bizonyítás

A feltevés szerint $f(x) = g(x)h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.
Osszuk el maradékosan f-et g-vel $\mathbb{R}[x]$-ben:

A hányados együtthatói

Következmény (Kiss-jegyzet, 3.2.2. Állítás)

Tegyük föl, hogy $g(x)$ osztója $f(x)$-nek $\mathbb{C}[x]$-ben, és $f, g \in \mathbb{R}[x]$. Ekkor $g \mid f$ teljesül $\mathbb{R}[x]$-ben is.

Bizonyítás

A feltevés szerint $f(x) = g(x)h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.
Osszuk el maradékosan f-et g-vel $\mathbb{R}[x]$-ben:

$$f = gq + r,$$

A hányados együtthatói

Következmény (Kiss-jegyzet, 3.2.2. Állítás)

Tegyük föl, hogy $g(x)$ osztója $f(x)$-nek $\mathbb{C}[x]$-ben,
és $f, g \in \mathbb{R}[x]$. Ekkor $g \mid f$ teljesül $\mathbb{R}[x]$-ben is.

Bizonyítás

A feltevés szerint $f(x) = g(x)h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.
Osszuk el maradékosan f-et g-vel $\mathbb{R}[x]$-ben:

$$f = gq + r,$$

ahol $q, r \in \mathbb{R}[x]$

A hányados együtthatói

Következmény (Kiss-jegyzet, 3.2.2. Állítás)

Tegyük föl, hogy $g(x)$ osztója $f(x)$-nek $\mathbb{C}[x]$-ben, és $f, g \in \mathbb{R}[x]$. Ekkor $g \mid f$ teljesül $\mathbb{R}[x]$-ben is.

Bizonyítás

A feltevés szerint $f(x) = g(x)h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.
Osszuk el maradékosan f-et g-vel $\mathbb{R}[x]$-ben:

$$f = gq + r,$$

ahol $q, r \in \mathbb{R}[x]$ és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.

A hányados együtthatói

Következmény (Kiss-jegyzet, 3.2.2. Állítás)

Tegyük föl, hogy $g(x)$ osztója $f(x)$-nek $\mathbb{C}[x]$-ben, és $f, g \in \mathbb{R}[x]$. Ekkor $g \mid f$ teljesül $\mathbb{R}[x]$-ben is.

Bizonyítás

A feltevés szerint $f(x) = g(x)h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.
Osszuk el maradékosan f-et g-vel $\mathbb{R}[x]$-ben:

$$f = gq + r,$$

ahol $q, r \in \mathbb{R}[x]$ és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.
Ez $\mathbb{C}[x]$-ben is egy maradékos osztás.

A hányados együtthatói

Következmény (Kiss-jegyzet, 3.2.2. Állítás)

Tegyük föl, hogy $g(x)$ osztója $f(x)$-nek $\mathbb{C}[x]$-ben, és $f, g \in \mathbb{R}[x]$. Ekkor $g \mid f$ teljesül $\mathbb{R}[x]$-ben is.

Bizonyítás

A feltevés szerint $f(x) = g(x)h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.
Osszuk el maradékosan f-et g-vel $\mathbb{R}[x]$-ben:

$$f = gq + r,$$

ahol $q, r \in \mathbb{R}[x]$ és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.
Ez $\mathbb{C}[x]$-ben is egy maradékos osztás. De $\mathbb{C}[x]$-ben

$$f = gh + 0$$

is egy maradékos osztás.

A hányados együtthatói

Következmény (Kiss-jegyzet, 3.2.2. Állítás)

Tegyük föl, hogy $g(x)$ osztója $f(x)$-nek $\mathbb{C}[x]$-ben, és $f, g \in \mathbb{R}[x]$. Ekkor $g \mid f$ teljesül $\mathbb{R}[x]$-ben is.

Bizonyítás

A feltevés szerint $f(x) = g(x)h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.
Osszuk el maradékosan f-et g-vel $\mathbb{R}[x]$-ben:

$$f = gq + r,$$

ahol $q, r \in \mathbb{R}[x]$ és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.
Ez $\mathbb{C}[x]$-ben is egy maradékos osztás. De $\mathbb{C}[x]$-ben

$$f = gh + 0$$

is egy maradékos osztás. A $\mathbb{C}[x]$-beli egyértelműség miatt

A hányados együtthatói

Következmény (Kiss-jegyzet, 3.2.2. Állítás)

Tegyük föl, hogy $g(x)$ osztója $f(x)$-nek $\mathbb{C}[x]$-ben, és $f, g \in \mathbb{R}[x]$. Ekkor $g \mid f$ teljesül $\mathbb{R}[x]$-ben is.

Bizonyítás

A feltevés szerint $f(x) = g(x)h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.
Osszuk el maradékosan f-et g-vel $\mathbb{R}[x]$-ben:

$$f = gq + r,$$

ahol $q, r \in \mathbb{R}[x]$ és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.
Ez $\mathbb{C}[x]$-ben is egy maradékos osztás. De $\mathbb{C}[x]$-ben

$$f = gh + 0$$

is egy maradékos osztás. A $\mathbb{C}[x]$-beli egyértelműség miatt $q(x) = h(x)$.

A hányados együtthatói

Következmény (Kiss-jegyzet, 3.2.2. Állítás)

Tegyük föl, hogy $g(x)$ osztója $f(x)$-nek $\mathbb{C}[x]$-ben, és $f, g \in \mathbb{R}[x]$. Ekkor $g \mid f$ teljesül $\mathbb{R}[x]$-ben is.

Bizonyítás

A feltevés szerint $f(x) = g(x)h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.
Osszuk el maradékosan f-et g-vel $\mathbb{R}[x]$-ben:

$$f = gq + r,$$

ahol $q, r \in \mathbb{R}[x]$ és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.
Ez $\mathbb{C}[x]$-ben is egy maradékos osztás. De $\mathbb{C}[x]$-ben

$$f = gh + 0$$

is egy maradékos osztás. A $\mathbb{C}[x]$-beli egyértelműség miatt $q(x) = h(x)$. De $q \in \mathbb{R}[x]$,

A hányados együtthatói

Következmény (Kiss-jegyzet, 3.2.2. Állítás)

Tegyük föl, hogy $g(x)$ osztója $f(x)$-nek $\mathbb{C}[x]$-ben, és $f, g \in \mathbb{R}[x]$. Ekkor $g \mid f$ teljesül $\mathbb{R}[x]$-ben is.

Bizonyítás

A feltevés szerint $f(x) = g(x)h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.
Osszuk el maradékosan f-et g-vel $\mathbb{R}[x]$-ben:

$$f = gq + r,$$

ahol $q, r \in \mathbb{R}[x]$ és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.
Ez $\mathbb{C}[x]$-ben is egy maradékos osztás. De $\mathbb{C}[x]$-ben

$$f = gh + 0$$

is egy maradékos osztás. A $\mathbb{C}[x]$-beli egyértelműség miatt $q(x) = h(x)$. De $q \in \mathbb{R}[x]$, ezért $h \in \mathbb{R}[x]$. $\square$

A hányados együtthatói

Következmény (Kiss-jegyzet, 3.2.2. Állítás)

Tegyük föl, hogy $g(x)$ osztója $f(x)$-nek $\mathbb{C}[x]$-ben,
és $f, g \in \mathbb{R}[x]$. Ekkor $g \mid f$ teljesül $\mathbb{R}[x]$-ben is.

Bizonyítás

A feltevés szerint $f(x) = g(x)h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.
Osszuk el maradékosan f-et g-vel $\mathbb{R}[x]$-ben:

$$f = gq + r,$$

ahol $q, r \in \mathbb{R}[x]$ és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.
Ez $\mathbb{C}[x]$-ben is egy maradékos osztás. De $\mathbb{C}[x]$-ben

$$f = gh + 0$$

is egy maradékos osztás. A $\mathbb{C}[x]$-beli egyértelműség miatt
$q(x) = h(x)$. De $q \in \mathbb{R}[x]$, ezért $h \in \mathbb{R}[x]$. $\square$

Ugyanígy $\mathbb{R}$ helyett $\mathbb{Q}$-ra is.

Egységek

Definíció

Legyen R a $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ egyike.

Egységek

Definíció

Legyen R a $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy a $g \in R[x]$ polinom **egység** $R[x]$-ben,

Egységek

Definíció

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy a $g \in R[x]$ polinom egység $R[x]$-ben, ha minden $R[x]$-beli polinomnak osztója $R[x]$-ben.

Egységek

Definíció

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy a $g \in R[x]$ polinom egység $R[x]$-ben, ha minden $R[x]$-beli polinomnak osztója $R[x]$-ben.

Tétel (Kiss-jegyzet, 3.1.11. Gyakorlat)

$\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ egységei a nem nulla konstans polinomok.

Egységek

Definíció

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy a $g \in R[x]$ polinom egység $R[x]$-ben, ha minden $R[x]$-beli polinomnak osztója $R[x]$-ben.

Tétel (Kiss-jegyzet, 3.1.11. Gyakorlat)

$\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ egységei a nem nulla konstans polinomok.
$\mathbb{Z}[x]$ egységei csak az 1 és a -1.

Egységek

Definíció

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy a $g \in R[x]$ polinom egység $R[x]$-ben, ha minden $R[x]$-beli polinomnak osztója $R[x]$-ben.

Tétel (Kiss-jegyzet, 3.1.11. Gyakorlat)

$\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ egységei a nem nulla konstans polinomok.
$\mathbb{Z}[x]$ egységei csak az 1 és a -1.

Bizonyítás (vázlat)

Ha $g(x)$ egység, akkor osztója a konstans 1 polinomnak, azaz van reciproka.

Egységek

Definíció

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy a $g \in R[x]$ polinom egység $R[x]$-ben, ha minden $R[x]$-beli polinomnak osztója $R[x]$-ben.

Tétel (Kiss-jegyzet, 3.1.11. Gyakorlat)

$\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ egységei a nem nulla konstans polinomok.
$\mathbb{Z}[x]$ egységei csak az 1 és a -1.

Bizonyítás (vázlat)

Ha $g(x)$ egység, akkor osztója a konstans 1 polinomnak, azaz van reciproka. Láttuk (fokszámmal), hogy g konstans.

Egységek

Definíció

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy a $g \in R[x]$ polinom **egység** $R[x]$-ben, ha minden $R[x]$-beli polinomnak osztója $R[x]$-ben.

Tétel (Kiss-jegyzet, 3.1.11. Gyakorlat)

$\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ egységei a nem nulla konstans polinomok.
$\mathbb{Z}[x]$ egységei csak az 1 és a -1.

Bizonyítás (vázlat)

Ha $g(x)$ egység, akkor osztója a konstans 1 polinomnak, azaz van reciproka. Láttuk (fokszámmal), hogy g konstans. $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$-ban minden nem nulla számmal lehet osztani,

Egységek

Definíció

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy a $g \in R[x]$ polinom **egység** $R[x]$-ben, ha minden $R[x]$-beli polinomnak osztója $R[x]$-ben.

Tétel (Kiss-jegyzet, 3.1.11. Gyakorlat)

$\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ egységei a nem nulla konstans polinomok.
$\mathbb{Z}[x]$ egységei csak az 1 és a -1.

Bizonyítás (vázlat)

Ha $g(x)$ egység, akkor osztója a konstans 1 polinomnak, azaz van reciproka. Láttuk (fokszámmal), hogy g konstans.
$\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$-ban minden nem nulla számmal lehet osztani,
$\mathbb{Z}$-ben csak ± 1-gyel osztható minden szám.

Kitüntetett közös osztó

Definíció

Legyen R a $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ egyike.

Kitüntetett közös osztó

Definíció

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy $h(x)$ az $f, g \in R[x]$ polinomok kitüntetett közös osztója $R[x]$-ben,

Kitüntetett közös osztó

Definíció

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy $h(x)$ az $f, g \in R[x]$ polinomok **kitüntetett közös osztója** $R[x]$-ben, ha **közös osztójuk**, azaz $h \mid f$ és $h \mid g$,

Kitüntetett közös osztó

Definíció

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy $h(x)$ az $f, g \in R[x]$ polinomok kitüntetett közös osztója $R[x]$-ben, ha közös osztójuk, azaz $h \mid f$ és $h \mid g$, továbbá *h az f és g minden közös osztójának többszöröse*,

Kitüntetett közös osztó

Definíció

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy $h(x)$ az $f, g \in R[x]$ polinomok kitüntetett közös osztója $R[x]$-ben, ha közös osztójuk, azaz $h \mid f$ és $h \mid g$, továbbá *h az f és g minden közös osztójának többszöröse*, azaz tetszőleges k polinomra $k \mid f$ és $k \mid g$ esetén $k \mid h$.

Kitüntetett közös osztó

Definíció

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy $h(x)$ az $f, g \in R[x]$ polinomok kitüntetett közös osztója $R[x]$-ben, ha közös osztójuk, azaz $h \mid f$ és $h \mid g$, továbbá *h az f és g* minden közös osztójának többszöröse, azaz tetszőleges k polinomra $k \mid f$ és $k \mid g$ esetén $k \mid h$.

Mint számelméletben (Kiss-jegyzet, 3.1 és 3.2. Szakasz)

A kitüntetett közös osztó egységszeres erejéig egyértelműen meghatározott.

Kitüntetett közös osztó

Definíció

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy $h(x)$ az $f, g \in R[x]$ polinomok kitüntetett közös osztója $R[x]$-ben, ha közös osztójuk, azaz $h \mid f$ és $h \mid g$, továbbá h az f és g minden közös osztójának többszöröse, azaz tetszőleges k polinomra $k \mid f$ és $k \mid g$ esetén $k \mid h$.

Mint számelméletben (Kiss-jegyzet, 3.1 és 3.2. Szakasz)

A kitüntetett közös osztó egységszeres erejéig egyértelműen meghatározott. Azaz ha h_1 és h_2 is kitüntetett közös osztója f-nek és g-nek,

Kitüntetett közös osztó

Definíció

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy $h(x)$ az $f, g \in R[x]$ polinomok kitüntetett közös osztója $R[x]$-ben, ha közös osztójuk, azaz $h \mid f$ és $h \mid g$, továbbá h az f és g minden közös osztójának többszöröse, azaz tetszőleges k polinomra $k \mid f$ és $k \mid g$ esetén $k \mid h$.

Mint számelméletben (Kiss-jegyzet, 3.1 és 3.2. Szakasz)

A kitüntetett közös osztó egységszeres erejéig egyértelműen meghatározott. Azaz ha h_1 és h_2 is kitüntetett közös osztója f-nek és g-nek, akkor h_1 és h_2 egymás egységszeresei.

Kitüntetett közös osztó

Definíció

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy $h(x)$ az $f, g \in R[x]$ polinomok kitüntetett közös osztója $R[x]$-ben, ha közös osztójuk, azaz $h \mid f$ és $h \mid g$, továbbá h az f és g minden közös osztójának többszöröse, azaz tetszőleges k polinomra $k \mid f$ és $k \mid g$ esetén $k \mid h$.

Mint számelméletben (Kiss-jegyzet, 3.1 és 3.2. Szakasz)

A kitüntetett közös osztó egységszeres erejéig egyértelműen meghatározott. Azaz ha h_1 és h_2 is kitüntetett közös osztója f-nek és g-nek, akkor h_1 és h_2 egymás egységszeresei.

Az f és g kitüntetett közös osztója $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ fölött az euklideszi algoritmussal számítható ki,

Kitüntetett közös osztó

Definíció

Legyen R a $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ egyike. Azt mondjuk, hogy $h(x)$ az $f, g \in R[x]$ polinomok kitüntetett közös osztója $R[x]$-ben, ha közös osztójuk, azaz $h \mid f$ és $h \mid g$, továbbá h az f és g minden közös osztójának többszöröse, azaz tetszőleges k polinomra $k \mid f$ és $k \mid g$ esetén $k \mid h$.

Mint számelméletben (Kiss-jegyzet, 3.1 és 3.2. Szakasz)

A kitüntetett közös osztó egységszeres erejéig egyértelműen meghatározott. Azaz ha h_1 és h_2 is kitüntetett közös osztója f-nek és g-nek, akkor h_1 és h_2 egymás egységszeresei.

Az f és g kitüntetett közös osztója $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ fölött az euklideszi algoritmussal számítható ki, és fölírható $f(x)u(x) + g(x)v(x)$ alakban alkalmas $u(x), v(x)$-re.

Az algebra alaptételének következménye

Beláttuk

Minden n-edfokú komplex együtthatós f polinom fölírható $c(x-b_1)\dots(x-b_n)$ alakban, ahol c az f főegyütthatója.

Az algebra alaptételének következménye

Beláttuk

Minden n-edfokú komplex együtthatós f polinom fölírható $c(x-b_1)\ldots(x-b_n)$ alakban, ahol c az f főegyütthatója. Ez az f polinom gyöktényezős alakja.

Az algebra alaptételének következménye

Beláttuk

Minden n-edfokú komplex együtthatós f polinom fölírható $c(x-b_1)\dots(x-b_n)$ alakban, ahol c az f főegyütthatója. Ez az f polinom gyöktényezős alakja.

Beláttuk

Minden n-edfokú komplex együtthatós polinomnak multiplicitásokkal számolva n darab gyöke van.

Az algebra alaptételének következménye

Beláttuk

Minden n-edfokú komplex együtthatós f polinom fölírható $c(x-b_1)\dots(x-b_n)$ alakban, ahol c az f főegyütthatója. Ez az f polinom gyöktényezős alakja.

Beláttuk

Minden n-edfokú komplex együtthatós polinomnak multiplicitásokkal számolva n darab gyöke van.

Állítás

Páratlan fokú valós együtthatós polinomnak van valós gyöke.

Az algebra alaptételének következménye

Beláttuk

Minden n-edfokú komplex együtthatós f polinom fölírható $c(x-b_1)\dots(x-b_n)$ alakban, ahol c az f főegyütthatója. Ez az f polinom gyöktényezős alakja.

Beláttuk

Minden n-edfokú komplex együtthatós polinomnak multiplicitásokkal számolva n darab gyöke van.

Állítás

Páratlan fokú valós együtthatós polinomnak van valós gyöke.

Ötlet: párosítsunk minden gyököt a komplex konjugáltjával.

Gyök konjugáltja

Állítás (Kiss-jegyzet, 3.3.6. Lemma)

Legyen $f = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ valós együtthatós polinom.

Gyök konjugáltja

Állítás (Kiss-jegyzet, 3.3.6. Lemma)

Legyen $f = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ valós együtthatós polinom. Ha $c \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek, akkor c konjugáltja is gyöke f-nek.

Gyök konjugáltja

Állítás (Kiss-jegyzet, 3.3.6. Lemma)

Legyen $f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ valós együtthatós polinom. Ha $c \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek, akkor c konjugáltja is gyöke f-nek.

Bizonyítás

$$a_0 + a_1 c + \ldots + a_n c^n = 0,$$

Gyök konjugáltja

Állítás (Kiss-jegyzet, 3.3.6. Lemma)

Legyen $f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ valós együtthatós polinom. Ha $c \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek, akkor c konjugáltja is gyöke f-nek.

Bizonyítás

$$a_0 + a_1 c + \ldots + a_n c^n = 0,$$

vegyük mindkét oldal konjugáltját.

Gyök konjugáltja

Állítás (Kiss-jegyzet, 3.3.6. Lemma)

Legyen $f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ valós együtthatós polinom.
Ha $c \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek, akkor c konjugáltja is gyöke f-nek.

Bizonyítás

$$a_0 + a_1 c + \ldots + a_n c^n = 0,$$

vegyük mindkét oldal konjugáltját.
A konjugálás összeg- és szorzattartó:

Gyök konjugáltja

Állítás (Kiss-jegyzet, 3.3.6. Lemma)

Legyen $f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ valós együtthatós polinom. Ha $c \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek, akkor c konjugáltja is gyöke f-nek.

Bizonyítás

$$a_0 + a_1 c + \ldots + a_n c^n = 0,$$

vegyük mindkét oldal konjugáltját.
A konjugálás összeg- és szorzattartó:

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$$

Gyök konjugáltja

Állítás (Kiss-jegyzet, 3.3.6. Lemma)

Legyen $f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ valós együtthatós polinom. Ha $c \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek, akkor c konjugáltja is gyöke f-nek.

Bizonyítás

$$a_0 + a_1 c + \ldots + a_n c^n = 0,$$

vegyük mindkét oldal konjugáltját.
A konjugálás összeg- és szorzattartó:

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w} \text{ és } \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}.$$

Gyök konjugáltja

Állítás (Kiss-jegyzet, 3.3.6. Lemma)

Legyen $f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ valós együtthatós polinom. Ha $c \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek, akkor c konjugáltja is gyöke f-nek.

Bizonyítás

$$a_0 + a_1 c + \ldots + a_n c^n = 0,$$

vegyük mindkét oldal konjugáltját.
A konjugálás összeg- és szorzattartó:

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w} \text{ és } \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}.$$

Így ezt kapjuk:

$$\overline{a_0}$$

Gyök konjugáltja

Állítás (Kiss-jegyzet, 3.3.6. Lemma)

Legyen $f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ valós együtthatós polinom.
Ha $c \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek, akkor c konjugáltja is gyöke f-nek.

Bizonyítás

$$a_0 + a_1 c + \ldots + a_n c^n = 0,$$

vegyük mindkét oldal konjugáltját.
A konjugálás összeg- és szorzattartó:

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w} \text{ és } \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}.$$

Így ezt kapjuk:

$$\overline{a_0} + \overline{a_1}\,\overline{c}$$

Gyök konjugáltja

Állítás (Kiss-jegyzet, 3.3.6. Lemma)

Legyen $f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ valós együtthatós polinom.
Ha $c \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek, akkor c konjugáltja is gyöke f-nek.

Bizonyítás

$$a_0 + a_1 c + \ldots + a_n c^n = 0,$$

vegyük mindkét oldal konjugáltját.
A konjugálás összeg- és szorzattartó:

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w} \text{ és } \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}.$$

Így ezt kapjuk:

$$\overline{a_0} + \overline{a_1}\,\overline{c} + \ldots + \overline{a_n}\,\overline{c}^n$$

Gyök konjugáltja

Állítás (Kiss-jegyzet, 3.3.6. Lemma)

Legyen $f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ valós együtthatós polinom. Ha $c \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek, akkor c konjugáltja is gyöke f-nek.

Bizonyítás

$$a_0 + a_1 c + \ldots + a_n c^n = 0,$$

vegyük mindkét oldal konjugáltját.
A konjugálás összeg- és szorzattartó:

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w} \text{ és } \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}.$$

Így ezt kapjuk:

$$\overline{a_0} + \overline{a_1}\,\overline{c} + \ldots + \overline{a_n}\,\overline{c}^n = \overline{0}$$

Gyök konjugáltja

Állítás (Kiss-jegyzet, 3.3.6. Lemma)

Legyen $f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ valós együtthatós polinom. Ha $c \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek, akkor c konjugáltja is gyöke f-nek.

Bizonyítás

$$a_0 + a_1 c + \ldots + a_n c^n = 0,$$

vegyük mindkét oldal konjugáltját.
A konjugálás összeg- és szorzattartó:

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w} \text{ és } \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}.$$

Így ezt kapjuk:

$$\overline{a_0} + \overline{a_1}\,\overline{c} + \ldots + \overline{a_n}\,\overline{c}^n = \overline{0}$$

Valós szám konjugáltja önmaga,

Gyök konjugáltja

Állítás (Kiss-jegyzet, 3.3.6. Lemma)

Legyen $f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ valós együtthatós polinom.
Ha $c \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek, akkor c konjugáltja is gyöke f-nek.

Bizonyítás

$$a_0 + a_1 c + \ldots + a_n c^n = 0,$$

vegyük mindkét oldal konjugáltját.
A konjugálás összeg- és szorzattartó:

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w} \text{ és } \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}.$$

Így ezt kapjuk:

$$\overline{a_0} + \overline{a_1}\,\overline{c} + \ldots + \overline{a_n}\,\overline{c}^n = \overline{0}$$

Valós szám konjugáltja önmaga, tehát $\overline{0} = 0$

Gyök konjugáltja

Állítás (Kiss-jegyzet, 3.3.6. Lemma)

Legyen $f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ valós együtthatós polinom.
Ha $c \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek, akkor c konjugáltja is gyöke f-nek.

Bizonyítás

$$a_0 + a_1 c + \ldots + a_n c^n = 0,$$

vegyük mindkét oldal konjugáltját.
A konjugálás összeg- és szorzattartó:

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w} \text{ és } \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}.$$

Így ezt kapjuk:

$$\overline{a_0} + \overline{a_1}\,\overline{c} + \ldots + \overline{a_n}\,\overline{c}^n = \overline{0}$$

Valós szám konjugáltja önmaga, tehát $\overline{0} = 0$ és $\overline{a_j} = a_j$.

Gyök konjugáltja

Állítás (Kiss-jegyzet, 3.3.6. Lemma)

Legyen $f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ valós együtthatós polinom.
Ha $c \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek, akkor c konjugáltja is gyöke f-nek.

Bizonyítás

$$a_0 + a_1 c + \ldots + a_n c^n = 0,$$

vegyük mindkét oldal konjugáltját.
A konjugálás összeg- és szorzattartó:

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w} \text{ és } \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}.$$

Így ezt kapjuk:

$$f(\overline{c}) = \overline{a_0} + \overline{a_1}\,\overline{c} + \ldots + \overline{a_n}\,\overline{c}^n = \overline{0}$$

Valós szám konjugáltja önmaga, tehát $\overline{0} = 0$ és $\overline{a_j} = a_j$.
Így a bal oldalon $f(\overline{c})$ áll,

Gyök konjugáltja

Állítás (Kiss-jegyzet, 3.3.6. Lemma)

Legyen $f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ valós együtthatós polinom.
Ha $c \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek, akkor c konjugáltja is gyöke f-nek.

Bizonyítás

$$a_0 + a_1 c + \ldots + a_n c^n = 0,$$

vegyük mindkét oldal konjugáltját.
A konjugálás összeg- és szorzattartó:

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w} \text{ és } \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}.$$

Így ezt kapjuk:

$$f(\overline{c}) = \overline{a_0} + \overline{a_1}\,\overline{c} + \ldots + \overline{a_n}\,\overline{c}^n = \overline{0} = 0.$$

Valós szám konjugáltja önmaga, tehát $\overline{0} = 0$ és $\overline{a_j} = a_j$.
Így a bal oldalon $f(\overline{c})$ áll, a jobb oldalon 0,

Gyök konjugáltja

Állítás (Kiss-jegyzet, 3.3.6. Lemma)

Legyen $f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ valós együtthatós polinom.
Ha $c \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek, akkor c konjugáltja is gyöke f-nek.

Bizonyítás

$$a_0 + a_1 c + \ldots + a_n c^n = 0,$$

vegyük mindkét oldal konjugáltját.
A konjugálás összeg- és szorzattartó:

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w} \text{ és } \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}.$$

Így ezt kapjuk:

$$f(\overline{c}) = \overline{a_0} + \overline{a_1}\,\overline{c} + \ldots + \overline{a_n}\,\overline{c}^n = \overline{0} = 0.$$

Valós szám konjugáltja önmaga, tehát $\overline{0} = 0$ és $\overline{a_j} = a_j$.
Így a bal oldalon $f(\overline{c})$ áll, a jobb oldalon 0,
tehát $\overline{c}$ gyöke f-nek. $\square$

A konjugált multiplicitása

Állítás

A c és a $\overline{c}$ ugyanannyiszoros gyöke f-nek.

A konjugált multiplicitása

Állítás

A c és a $\overline{c}$ ugyanannyiszoros gyöke f-nek.

Bizonyítás

f foka szerinti indukcióval.

A konjugált multiplicitása

Állítás

A c és a $\overline{c}$ ugyanannyiszoros gyöke f-nek.

Bizonyítás

f foka szerinti indukcióval. Ha c valós: nyilvánvaló.

A konjugált multiplicitása

Állítás

A c és a $\overline{c}$ ugyanannyiszoros gyöke f-nek.

Bizonyítás

f foka szerinti indukcióval. Ha c valós: nyilvánvaló.
Legyen $c = a + bi$,

A konjugált multiplicitása

Állítás

A c és a $\overline{c}$ ugyanannyiszoros gyöke f-nek.

Bizonyítás

f foka szerinti indukcióval. Ha c valós: nyilvánvaló.
Legyen $c = a + bi$, ekkor $\overline{c} = a - bi$.

A konjugált multiplicitása

Állítás

A c és a $\overline{c}$ ugyanannyiszoros gyöke f-nek.

Bizonyítás

f foka szerinti indukcióval. Ha c valós: nyilvánvaló.
Legyen $c = a + bi$, ekkor $\overline{c} = a - bi$. Ha c nem valós,
akkor $c \neq \overline{c}$,

A konjugált multiplicitása

Állítás

A c és a $\overline{c}$ ugyanannyiszoros gyöke f-nek.

Bizonyítás

f foka szerinti indukcióval. Ha c valós: nyilvánvaló.
Legyen $c = a + bi$, ekkor $\overline{c} = a - bi$. Ha c nem valós, akkor $c \neq \overline{c}$, így $x - c$ és $x - \overline{c}$ egyszerre kiemelhetők.

A konjugált multiplicitása

Állítás

A c és a $\overline{c}$ ugyanannyiszoros gyöke f-nek.

Bizonyítás

f foka szerinti indukcióval. Ha c valós: nyilvánvaló.
Legyen $c = a + bi$, ekkor $\overline{c} = a - bi$. Ha c nem valós, akkor $c \neq \overline{c}$, így $x - c$ és $x - \overline{c}$ egyszerre kiemelhetők.
Tehát $f(x) = (x - c)(x - \overline{c})h(x)$,

A konjugált multiplicitása

Állítás

A c és a $\overline{c}$ ugyanannyiszoros gyöke f-nek.

Bizonyítás

f foka szerinti indukcióval. Ha c valós: nyilvánvaló.
Legyen $c = a + bi$, ekkor $\overline{c} = a - bi$. Ha c nem valós, akkor $c \neq \overline{c}$, így $x - c$ és $x - \overline{c}$ egyszerre kiemelhetők.
Tehát $f(x) = (x - c)(x - \overline{c})h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.

A konjugált multiplicitása

Állítás

A c és a $\overline{c}$ ugyananannyiszoros gyöke f-nek.

Bizonyítás

f foka szerinti indukcióval. Ha c valós: nyilvánvaló.
Legyen $c = a + bi$, ekkor $\overline{c} = a - bi$. Ha c nem valós, akkor $c \neq \overline{c}$, így $x - c$ és $x - \overline{c}$ egyszerre kiemelhetők.
Tehát $f(x) = (x - c)(x - \overline{c})h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.
$(x - c)(x - \overline{c}) =$

A konjugált multiplicitása

Állítás

A c és a $\overline{c}$ ugyanannyiszoros gyöke f-nek.

Bizonyítás

f foka szerinti indukcióval. Ha c valós: nyilvánvaló.
Legyen $c = a + bi$, ekkor $\overline{c} = a - bi$. Ha c nem valós, akkor $c \neq \overline{c}$, így $x - c$ és $x - \overline{c}$ egyszerre kiemelhetők.
Tehát $f(x) = (x - c)(x - \overline{c})h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.
$(x-c)(x-\overline{c}) = x^2 - (c+\overline{c})x + c\overline{c} =$

A konjugált multiplicitása

Állítás

A c és a $\overline{c}$ ugyanannyiszoros gyöke f-nek.

Bizonyítás

f foka szerinti indukcióval. Ha c valós: nyilvánvaló.
Legyen $c = a + bi$, ekkor $\overline{c} = a - bi$. Ha c nem valós, akkor $c \neq \overline{c}$, így $x - c$ és $x - \overline{c}$ egyszerre kiemelhetők.
Tehát $f(x) = (x - c)(x - \overline{c})h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.
$(x-c)(x-\overline{c}) = x^2 - (c+\overline{c})x + c\overline{c} = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)$

A konjugált multiplicitása

Állítás

A c és a $\overline{c}$ ugyanannyiszoros gyöke f-nek.

Bizonyítás

f foka szerinti indukcióval. Ha c valós: nyilvánvaló.
Legyen $c = a + bi$, ekkor $\overline{c} = a - bi$. Ha c nem valós, akkor $c \neq \overline{c}$, így $x - c$ és $x - \overline{c}$ egyszerre kiemelhetők.
Tehát $f(x) = (x - c)(x - \overline{c})h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.
$(x-c)(x-\overline{c}) = x^2 - (c+\overline{c})x + c\overline{c} = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2) \in \mathbb{R}[x]$.

A konjugált multiplicitása

Állítás

A c és a $\overline{c}$ ugyanannyiszoros gyöke f-nek.

Bizonyítás

f foka szerinti indukcióval. Ha c valós: nyilvánvaló.
Legyen $c = a + bi$, ekkor $\overline{c} = a - bi$. Ha c nem valós, akkor $c \neq \overline{c}$, így $x - c$ és $x - \overline{c}$ egyszerre kiemelhetők.
Tehát $f(x) = (x - c)(x - \overline{c})h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.
$(x-c)(x-\overline{c}) = x^2 - (c+\overline{c})x + c\overline{c} = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2) \in \mathbb{R}[x]$.
A korábbi Következmény miatt $h(x)$ is valós együtthatós.

A konjugált multiplicitása

Állítás

A c és a $\overline{c}$ ugyananannyiszoros gyöke f-nek.

Bizonyítás

f foka szerinti indukcióval. Ha c valós: nyilvánvaló.
Legyen $c = a + bi$, ekkor $\overline{c} = a - bi$. Ha c nem valós, akkor $c \neq \overline{c}$, így $x - c$ és $x - \overline{c}$ egyszerre kiemelhetők.
Tehát $f(x) = (x - c)(x - \overline{c})h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.
$(x-c)(x-\overline{c}) = x^2 - (c+\overline{c})x + c\overline{c} = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2) \in \mathbb{R}[x]$.
A korábbi Következmény miatt $h(x)$ is valós együtthatós.
Az indukciós feltevés miatt c és $\overline{c}$ ugyanannyiszoros, mondjuk k-szoros gyökei $h(x)$-nek

A konjugált multiplicitása

Állítás

A c és a $\overline{c}$ ugyanannyiszoros gyöke f-nek.

Bizonyítás

f foka szerinti indukcióval. Ha c valós: nyilvánvaló.
Legyen $c = a + bi$, ekkor $\overline{c} = a - bi$. Ha c nem valós, akkor $c \neq \overline{c}$, így $x - c$ és $x - \overline{c}$ egyszerre kiemelhetők.
Tehát $f(x) = (x - c)(x - \overline{c})h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.
$(x - c)(x - \overline{c}) = x^2 - (c + \overline{c})x + c\overline{c} = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2) \in \mathbb{R}[x]$.
A korábbi Következmény miatt $h(x)$ is valós együtthatós.
Az indukciós feltevés miatt c és $\overline{c}$ ugyanannyiszoros, mondjuk k-szoros gyökei $h(x)$-nek ($k = 0$ is lehet!).

A konjugált multiplicitása

Állítás

A c és a $\overline{c}$ ugyanannyiszoros gyöke f-nek.

Bizonyítás

f foka szerinti indukcióval. Ha c valós: nyilvánvaló.
Legyen $c = a + bi$, ekkor $\overline{c} = a - bi$. Ha c nem valós, akkor $c \neq \overline{c}$, így $x - c$ és $x - \overline{c}$ egyszerre kiemelhetők.
Tehát $f(x) = (x - c)(x - \overline{c})h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.
$(x-c)(x-\overline{c}) = x^2 - (c+\overline{c})x + c\overline{c} = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2) \in \mathbb{R}[x]$.
A korábbi Következmény miatt $h(x)$ is valós együtthatós.
Az indukciós feltevés miatt c és $\overline{c}$ ugyanannyiszoros, mondjuk k-szoros gyökei $h(x)$-nek ($k = 0$ is lehet!).
Így $f(x)$-nek c és $\overline{c}$ is $k + 1$-szeres gyöke. $\square$