Algebra1, alapszint

ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Előadó: Kiss Emil
ewkiss@cs.elte.hu

6. előadás

Behelyettesés polinomba

Definíció

Legyen b komplex szám.

Behelyettesés polinomba

Definíció

Legyen b komplex szám. Az $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ polinom *b* helyen felvett helyettesítési értéke

Behelyettesés polinomba

Definíció

Legyen b komplex szám. Az $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ polinom *b* **helyen felvett helyettesítési értéke**

(az x helyére b-t írunk).

Behelyettesés polinomba

Definíció

Legyen b komplex szám. Az $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ polinom *b* **helyen felvett helyettesítési értéke** $f^*(b) = a_0 + a_1b + a_2b^2 + \ldots + a_nb^n$ (az x helyére b-t írunk).

Behelyettesés polinomba

Definíció

Legyen b komplex szám. Az $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ polinom *b helyen felvett helyettesítési értéke* $f^*(b) = a_0 + a_1b + a_2b^2 + \ldots + a_nb^n$ (az x helyére b-t írunk).
Az f-hez tartozó f^* *polinomfüggvény* az az $f^* : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ függvény, mely minden $b \in \mathbb{C}$-hez $f^*(b)$-t rendel.

Behelyettesés polinomba

Definíció

Legyen b komplex szám. Az $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ polinom b **helyen felvett helyettesítési értéke** $f^*(b) = a_0 + a_1b + a_2b^2 + \ldots + a_nb^n$ (az x helyére b-t írunk).
Az f-hez tartozó f^* **polinomfüggvény** az az $f^* : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ függvény, mely minden $b \in \mathbb{C}$-hez $f^*(b)$-t rendel.

Állítás

Ha $f, g \in \mathbb{C}[x]$ és $b \in \mathbb{C}$, akkor

Behelyettesés polinomba

Definíció

Legyen b komplex szám. Az $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ polinom b **helyen felvett helyettesítési értéke** $f^*(b) = a_0 + a_1b + a_2b^2 + \ldots + a_nb^n$ (az x helyére b-t írunk).
Az f-hez tartozó f^* **polinomfüggvény** az az $f^* : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ függvény, mely minden $b \in \mathbb{C}$-hez $f^*(b)$-t rendel.

Állítás

Ha $f, g \in \mathbb{C}[x]$ és $b \in \mathbb{C}$, akkor $(f+g)^*(b) = f^*(b) + g^*(b)$

Behelyettesés polinomba

Definíció

Legyen b komplex szám. Az $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ polinom *b helyen felvett helyettesítési értéke* $f^*(b) = a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + \ldots + a_n b^n$ (az x helyére b-t írunk).
Az f-hez tartozó f^* *polinomfüggvény* az az $f^* : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ függvény, mely minden $b \in \mathbb{C}$-hez $f^*(b)$-t rendel.

Állítás

Ha $f, g \in \mathbb{C}[x]$ és $b \in \mathbb{C}$, akkor $(f+g)^*(b) = f^*(b) + g^*(b)$ és $(fg)^*(b) = f^*(b) g^*(\mathrm{b})$.

Behelyettesés polinomba

Definíció

Legyen b komplex szám. Az $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ polinom b **helyen felvett helyettesítési értéke** $f^*(b) = a_0 + a_1b + a_2b^2 + \ldots + a_nb^n$ (az x helyére b-t írunk).
Az f-hez tartozó f^* **polinomfüggvény** az az $f^* : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ függvény, mely minden $b \in \mathbb{C}$-hez $f^*(b)$-t rendel.

Állítás

Ha $f, g \in \mathbb{C}[x]$ és $b \in \mathbb{C}$, akkor $(f+g)^*(b) = f^*(b) + g^*(b)$ és $(fg)^*(b) = f^*(b)g^*$(b).

Bizonyítás (Kiss-jegyzet, 2.4.2. Gyakorlat)

A polinomok összeadását és szorzását pontosan azzal a motivációval definiáltuk, hogy ez az állítás igaz legyen.

Példa behelyettesítésre

Példa

Legyen $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 2$

Példa behelyettesítésre

Példa

Legyen $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 2$ és $b = 2$.

Példa behelyettesítésre

Példa

Legyen $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 2$ és $b = 2$. Ekkor
$f^*(2) = 3 \cdot 2^4$

Példa behelyettesítésre

Példa

Legyen $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 2$ és $b = 2$. Ekkor
$f^*(2) = 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3$

Példa behelyettesítésre

Példa

Legyen $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 2$ és $b = 2$. Ekkor
$f^*(2) = 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 2$

Példa behelyettesítésre

Példa

Legyen $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 2$ és $b = 2$. Ekkor
$f^*(2) = 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 2 + 2$

Példa behelyettesítésre

Példa

Legyen $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 2$ és $b = 2$. Ekkor $f^*(2) = 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 2 + 2 = 68.$

Példa behelyettesítésre

Példa

Legyen $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 2$ és $b = 2$. Ekkor $f^*(2) = 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 2 + 2 = 68$. Kevesebb szorzás kell, ha

Példa behelyettesítésre

Példa

Legyen $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 2$ és $b = 2$. Ekkor $f^*(2) = 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 2 + 2 = 68$. Kevesebb szorzás kell, ha

$$f(x) = \left(3x^3 + 2x^2 + 1\right)x + 2 =$$

Példa behelyettesítésre

Példa

Legyen $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 2$ és $b = 2$. Ekkor $f^*(2) = 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 2 + 2 = 68$. Kevesebb szorzás kell, ha

$$f(x) = \Big(3x^3 + 2x^2 + 1\Big)x + 2 =$$

$$= \Big((3x^2 + 2x)x + 1\Big)x + 2 =$$

Példa behelyettesítésre

Példa

Legyen $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 2$ és $b = 2$. Ekkor $f^*(2) = 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 2 + 2 = 68$. Kevesebb szorzás kell, ha

$$f(x) = \Big(3x^3 + 2x^2 + 1\Big)x + 2 =$$
$$= \Big((3x^2 + 2x)x + 1\Big)x + 2 =$$
$$= \Big((3x^2 + 2x + 0)x + 1\Big)x + 2 =$$

Példa behelyettesítésre

Példa

Legyen $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 2$ és $b = 2$. Ekkor $f^*(2) = 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 2 + 2 = 68$. Kevesebb szorzás kell, ha

$$f(x) = \Big(3x^3 + 2x^2 + 1\Big)x + 2 =$$
$$= \Big((3x^2 + 2x)x + 1\Big)x + 2 =$$
$$= \Big((3x^2 + 2x + 0)x + 1\Big)x + 2 =$$
$$= \Big(((3x + 2)x + 0)x + 1\Big)x + 2.$$

Példa behelyettesítésre

Példa

Legyen $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 2$ és $b = 2$. Ekkor $f^*(2) = 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 2 + 2 = 68$. Kevesebb szorzás kell, ha $f(x) = \Big(\big((3x + 2)x + 0\big)x + 1\Big)x + 2$.

$$f(x) = \Big(3x^3 + 2x^2 + 1\Big)x + 2 =$$
$$= \Big((3x^2 + 2x)x + 1\Big)x + 2 =$$
$$= \Big((3x^2 + 2x + 0)x + 1\Big)x + 2 =$$
$$= \Big(\big((3x + 2)x + 0\big)x + 1\Big)x + 2.$$

Példa behelyettesítésre

Példa

Legyen $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 2$ és $b = 2$. Ekkor $f^*(2) = 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 2 + 2 = 68$. Kevesebb szorzás kell, ha $f(x) = \Big(\big((3x+2)x+0\big)x+1\Big)x+2$. Belülről kifelé:

f együtthatói					

Példa behelyettesítésre

Példa

Legyen $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 2$ és $b = 2$. Ekkor $f^*(2) = 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 2 + 2 = 68$. Kevesebb szorzás kell, ha $f(x) = \Big(\big((3x + 2)x + 0\big)x + 1\Big)x + 2$. Belülről kifelé:

	x^4				
f együtthatói	3				

Példa behelyettesítésre

Példa

Legyen $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 2$ és $b = 2$. Ekkor $f^*(2) = 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 2 + 2 = 68$. Kevesebb szorzás kell, ha $f(x) = \Big(\big((3x + 2)x + 0\big)x + 1\Big)x + 2$. Belülről kifelé:

	x^4	x^3			
f együtthatói	3	2			

Példa behelyettesítésre

Példa

Legyen $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 2$ és $b = 2$. Ekkor $f^*(2) = 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 2 + 2 = 68$. Kevesebb szorzás kell, ha $f(x) = \Big(\big((3x+2)x+0\big)x+1\Big)x+2$. Belülről kifelé:

	x^4	x^3	x^2		
f együtthatói	3	2	0		

Példa behelyettesítésre

Példa

Legyen $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 2$ és $b = 2$. Ekkor $f^*(2) = 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 2 + 2 = 68$. Kevesebb szorzás kell, ha $f(x) = \Big(\big((3x + 2)x + 0\big)x + 1\Big)x + 2$. Belülről kifelé:

	x^4	x^3	x^2	x^1	
f együtthatói	3	2	0	1	

Példa behelyettesítésre

Példa

Legyen $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 2$ és $b = 2$. Ekkor $f^*(2) = 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 2 + 2 = 68$. Kevesebb szorzás kell, ha $f(x) = \Big(\big((3x + 2)x + 0\big)x + 1\Big)x + 2$. Belülről kifelé:

	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
f együtthatói	3	2	0	1	2

Példa behelyettesítésre

Példa

Legyen $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 2$ és $b = 2$. Ekkor $f^*(2) = 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 2 + 2 = 68$. Kevesebb szorzás kell, ha $f(x) = \Big(\big((3x + 2)x + 0\big)x + 1\Big)x + 2$. Belülről kifelé:

	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
f együtthatói	3	2	0	1	2
$b = 2$					

Példa behelyettesítésre

Példa

Legyen $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 2$ és $b = 2$. Ekkor $f^*(2) = 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 2 + 2 = 68$. Kevesebb szorzás kell, ha $f(x) = \Big(\big((3x + 2)x + 0\big)x + 1\Big)x + 2$. Belülről kifelé:

	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
f együtthatói	3	2	0	1	2
$b = 2$	3				

Lemásoljuk a főegyütthatót.

Példa behelyettesítésre

Példa

Legyen $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 2$ és $b = 2$. Ekkor $f^*(2) = 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 2 + 2 = 68$. Kevesebb szorzás kell, ha $f(x) = \Big(\big((3x + 2)x + 0\big)x + 1\Big)x + 2$. Belülről kifelé:

	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
f együtthatói	3	2	0	1	2
$b = 2$	3				

Lemásoljuk a főegyütthatót. Balról indulva az utoljára kitöltött mezőben talált értéket

3

Példa behelyettesítésre

Példa

Legyen $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 2$ és $b = 2$. Ekkor $f^*(2) = 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 2 + 2 = 68$. Kevesebb szorzás kell, ha $f(x) = \Big(\big((3x + 2)x + 0\big)x + 1\Big)x + 2$. Belülről kifelé:

	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
f együtthatói	3	2	0	1	2
$b = 2$	3				

Lemásoljuk a főegyütthatót. Balról indulva az utoljára kitöltött mezőben talált értéket megszorozzuk $b = 2$-vel,

$3 \cdot 2$

Példa behelyettesítésre

Példa

Legyen $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 2$ és $b = 2$. Ekkor $f^*(2) = 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 2 + 2 = 68$. Kevesebb szorzás kell, ha $f(x) = \Big(\big((3x + 2)x + 0\big)x + 1\Big)x + 2$. Belülről kifelé:

	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
f együtthatói	3	2	0	1	2
$b = 2$	3				

Lemásoljuk a főegyütthatót. Balról indulva az utoljára kitöltött mezőben talált értéket megszorozzuk $b = 2$-vel, hozzáadjuk a következő, üres mező fölött található együtthatót,

$3 \cdot 2 + 2$

Példa behelyettesítésre

Példa

Legyen $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 2$ és $b = 2$. Ekkor $f^*(2) = 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 2 + 2 = 68$. Kevesebb szorzás kell, ha $f(x) = \Big(\big((3x + 2)x + 0\big)x + 1\Big)x + 2$. Belülről kifelé:

	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
f együtthatói	3	2	0	1	2
$b = 2$	3	8			

Lemásoljuk a főegyütthatót. Balról indulva az utoljára kitöltött mezőben talált értéket megszorozzuk $b = 2$-vel, hozzáadjuk a következő, üres mező fölött található együtthatót, és az eredményt beírjuk ebbe az üres mezőbe.

$3 \cdot 2 + 2 = 8$

Példa behelyettesítésre

Példa

Legyen $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 2$ és $b = 2$. Ekkor $f^*(2) = 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 2 + 2 = 68$. Kevesebb szorzás kell, ha $f(x) = \Big(\big((3x+2)x+0\big)x+1\Big)x+2$. Belülről kifelé:

	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
f együtthatói	3	2	0	1	2
$b = 2$	3	8	16		

Lemásoljuk a főegyütthatót. Balról indulva az utoljára kitöltött mezőben talált értéket megszorozzuk $b = 2$-vel, hozzáadjuk a következő, üres mező fölött található együtthatót, és az eredményt beírjuk ebbe az üres mezőbe.

$8 \cdot 2 + 0 = 16$

Példa behelyettesítésre

Példa

Legyen $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 2$ és $b = 2$. Ekkor $f^*(2) = 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 2 + 2 = 68$. Kevesebb szorzás kell, ha $f(x) = \Big(\big((3x+2)x+0\big)x+1\Big)x+2$. Belülről kifelé:

	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
f együtthatói	3	2	0	1	2
$b = 2$	3	8	16	33	

Lemásoljuk a főegyütthatót. Balról indulva az utoljára kitöltött mezőben talált értéket megszorozzuk $b = 2$-vel, hozzáadjuk a következő, üres mező fölött található együtthatót, és az eredményt beírjuk ebbe az üres mezőbe.

$16 \cdot 2 + 1 = 33$

Példa behelyettesítésre

Példa

Legyen $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 2$ és $b = 2$. Ekkor $f^*(2) = 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 2 + 2 = 68$. Kevesebb szorzás kell, ha $f(x) = \Big(\big((3x + 2)x + 0\big)x + 1\Big)x + 2$. Belülről kifelé:

	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
f együtthatói	3	2	0	1	2
$b = 2$	3	8	16	33	68

Lemásoljuk a főegyütthatót. Balról indulva az utoljára kitöltött mezőben talált értéket megszorozzuk $b = 2$-vel, hozzáadjuk a következő, üres mező fölött található együtthatót, és az eredményt beírjuk ebbe az üres mezőbe.

$33 \cdot 2 + 2 = 68$

A Horner elrendezés

(1) A táblázat felső sorába balról jobbra beírjuk sorban a polinom együtthatóit, a főtagtól a konstans tagig.

A Horner elrendezés

(1) A táblázat felső sorába balról jobbra beírjuk sorban a polinom együtthatóit, a főtagtól a konstans tagig.

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \ldots + a_1 x + a_0.$$

A Horner elrendezés

(1) A táblázat felső sorába balról jobbra beírjuk sorban a polinom együtthatóit, a főtagtól a konstans tagig.

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \ldots + a_1 x + a_0.$$

	a_n						

A Horner elrendezés

(1) A táblázat felső sorába balról jobbra beírjuk sorban a polinom együtthatóit, a főtagtól a konstans tagig.

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \ldots + a_1 x + a_0.$$

	a_n	$\ldots$	a_{j+1}				

A Horner elrendezés

(1) A táblázat felső sorába balról jobbra beírjuk sorban a polinom együtthatóit, a főtagtól a konstans tagig.

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \ldots + a_1 x + a_0.$$

	a_n	$\ldots$	a_{j+1}	a_j			

A Horner elrendezés

(1) A táblázat felső sorába balról jobbra beírjuk sorban a polinom együtthatóit, a főtagtól a konstans tagig.

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \ldots + a_1 x + a_0.$$

	a_n	$\ldots$	a_{j+1}	a_j	$\ldots$	a_1	

A Horner elrendezés

(1) A táblázat felső sorába balról jobbra beírjuk sorban a polinom együtthatóit, a főtagtól a konstans tagig.

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \ldots + a_1 x + a_0.$$

	a_n	$\ldots$	a_{j+1}	a_j	$\ldots$	a_1	a_0

A Horner elrendezés

(1) A táblázat felső sorába balról jobbra beírjuk sorban a polinom együtthatóit, a főtagtól a konstans tagig. (A polinomban nem kiírt nulla együtthatókat is!)

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \ldots + a_1 x + a_0.$$

	a_n	$\ldots$	a_{j+1}	a_j	$\ldots$	a_1	a_0

A Horner elrendezés

(1) A táblázat felső sorába balról jobbra beírjuk sorban a polinom együtthatóit, a főtagtól a konstans tagig. (A polinomban nem kiírt nulla együtthatókat is!)

(2) Az alsó sor elejére odaírjuk a behelyettesítendő b értéket.

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \ldots + a_1 x + a_0.$$

	a_n	$\ldots$	a_{j+1}	a_j	$\ldots$	a_1	a_0

A Horner elrendezés

(1) A táblázat felső sorába balról jobbra beírjuk sorban a polinom együtthatóit, a főtagtól a konstans tagig. (A polinomban nem kiírt nulla együtthatókat is!)

(2) Az alsó sor elejére odaírjuk a behelyettesítendő b értéket.

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \ldots + a_1 x + a_0.$$

	a_n	$\ldots$	a_{j+1}	a_j	$\ldots$	a_1	a_0
b							

A Horner elrendezés

(1) A táblázat felső sorába balról jobbra beírjuk sorban a polinom együtthatóit, a főtagtól a konstans tagig. (A polinomban nem kiírt nulla együtthatókat is!)

(2) Az alsó sor elejére odaírjuk a behelyettesítendő b értéket. Bemásoljuk a főegyütthatót, a főegyüttható alá.

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_{j+1}x^{j+1} + a_j x^j + \ldots + a_1 x + a_0.$$

	a_n	$\ldots$	a_{j+1}	a_j	$\ldots$	a_1	a_0
b							

A Horner elrendezés

(1) A táblázat felső sorába balról jobbra beírjuk sorban a polinom együtthatóit, a főtagtól a konstans tagig. (A polinomban nem kiírt nulla együtthatókat is!)

(2) Az alsó sor elejére odaírjuk a behelyettesítendő *b* értéket. Bemásoljuk a főegyütthatót, a főegyüttható alá.

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \ldots + a_1 x + a_0.$$

	a_n	$\ldots$	a_{j+1}	a_j	$\ldots$	a_1	a_0
b	$c_{n-1} = a_n$ c_{n-1}						

A Horner elrendezés

(1) A táblázat felső sorába balról jobbra beírjuk sorban a polinom együtthatóit, a főtagtól a konstans tagig. (A polinomban nem kiírt nulla együtthatókat is!)

(2) Az alsó sor elejére odaírjuk a behelyettesítendő *b* értéket. Bemásoljuk a főegyütthatót, a főegyüttható alá.

(3) Az utoljára kitöltött mezőbeli értéket

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_{j+1}x^{j+1} + a_j x^j + \ldots + a_1 x + a_0.$$

	a_n	$\ldots$	a_{j+1}	a_j	$\ldots$	a_1	a_0
b	$c_{n-1} = a_n$	$\ldots$	c_j	c_j			
	c_{n-1}	$\ldots$	c_j				

A Horner elrendezés

(1) A táblázat felső sorába balról jobbra beírjuk sorban a polinom együtthatóit, a főtagtól a konstans tagig. (A polinomban nem kiírt nulla együtthatókat is!)

(2) Az alsó sor elejére odaírjuk a behelyettesítendő *b* értéket. Bemásoljuk a főegyütthatót, a főegyüttható alá.

(3) Az utoljára kitöltött mezőbeli értéket megszorozzuk *b*-vel,

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \ldots + a_1 x + a_0.$$

	a_n	$\ldots$	a_{j+1}	a_j	$\ldots$	a_1	a_0
b	$c_{n-1} = a_n$	$\ldots$	c_j	c_j			
	c_{n-1}	$\ldots$	c_j				

A Horner elrendezés

(1) A táblázat felső sorába balról jobbra beírjuk sorban a polinom együtthatóit, a főtagtól a konstans tagig. (A polinomban nem kiírt nulla együtthatókat is!)

(2) Az alsó sor elejére odaírjuk a behelyettesítendő b értéket. Bemásoljuk a főegyütthatót, a főegyüttható alá.

(3) Az utoljára kitöltött mezőbeli értéket megszorozzuk b-vel,

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \ldots + a_1 x + a_0.$$

	a_n	$\ldots$	a_{j+1}	a_j	$\ldots$	a_1	a_0
b	$c_{n-1} = a_n$	$\ldots$	c_j	$c_j b$			
	c_{n-1}	$\ldots$	c_j				

A Horner elrendezés

(1) A táblázat felső sorába balról jobbra beírjuk sorban a polinom együtthatóit, a főtagtól a konstans tagig. (A polinomban nem kiírt nulla együtthatókat is!)

(2) Az alsó sor elejére odaírjuk a behelyettesítendő b értéket. Bemásoljuk a főegyütthatót, a főegyüttható alá.

(3) Az utoljára kitöltött mezőbeli értéket megszorozzuk b-vel, hozzáadjuk a mellette jobbra lévő üres mező fölötti együtthatót,

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \ldots + a_1 x + a_0.$$

	a_n	$\ldots$	a_{j+1}	a_j	$\ldots$	a_1	a_0
b	$c_{n-1} = a_n$	$\ldots$	c_j	$c_j b$			
	c_{n-1}	$\ldots$	c_j				

A Horner elrendezés

(1) A táblázat felső sorába balról jobbra beírjuk sorban a polinom együtthatóit, a főtagtól a konstans tagig. (A polinomban nem kiírt nulla együtthatókat is!)

(2) Az alsó sor elejére odaírjuk a behelyettesítendő *b* értéket. Bemásoljuk a főegyütthatót, a főegyüttható alá.

(3) Az utoljára kitöltött mezőbeli értéket megszorozzuk *b*-vel, hozzáadjuk a mellette jobbra lévő üres mező fölötti együtthatót,

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \ldots + a_1 x + a_0.$$

	a_n	$\ldots$	a_{j+1}	a_j	$\ldots$	a_1	a_0
b	$c_{n-1} = a_n$ c_{n-1}	$\ldots$ $\ldots$	c_j c_j	$c_j b + a_j =$			

A Horner elrendezés

(1) A táblázat felső sorába balról jobbra beírjuk sorban a polinom együtthatóit, a főtagtól a konstans tagig. (A polinomban nem kiírt nulla együtthatókat is!)

(2) Az alsó sor elejére odaírjuk a behelyettesítendő b értéket. Bemásoljuk a főegyütthatót, a főegyüttható alá.

(3) Az utoljára kitöltött mezőbeli értéket megszorozzuk b-vel, hozzáadjuk a mellette jobbra lévő üres mező fölötti együtthatót, és ezt beírjuk ebbe az üres mezőbe.

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \ldots + a_1 x + a_0.$$

	a_n	$\ldots$	a_{j+1}	a_j	$\ldots$	a_1	a_0
b	$c_{n-1} = a_n$ c_{n-1}	$\ldots$ $\ldots$	c_j c_j	$c_j b + a_j =$			

A Horner elrendezés

(1) A táblázat felső sorába balról jobbra beírjuk sorban a polinom együtthatóit, a főtagtól a konstans tagig. (A polinomban nem kiírt nulla együtthatókat is!)

(2) Az alsó sor elejére odaírjuk a behelyettesítendő b értéket. Bemásoljuk a főegyütthatót, a főegyüttható alá.

(3) Az utoljára kitöltött mezőbeli értéket megszorozzuk b-vel, hozzáadjuk a mellette jobbra lévő üres mező fölötti együtthatót, és ezt beírjuk ebbe az üres mezőbe.

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \ldots + a_1 x + a_0.$$

	a_n	$\ldots$	a_{j+1}	a_j	$\ldots$	a_1	a_0
b	$c_{n-1} = a_n$	$\ldots$	c_j	$c_j b + a_j =$			
	c_{n-1}	$\ldots$	c_j	$= c_{j-1}$			

A Horner elrendezés

(1) A táblázat felső sorába balról jobbra beírjuk sorban a polinom együtthatóit, a főtagtól a konstans tagig. (A polinomban nem kiírt nulla együtthatókat is!)

(2) Az alsó sor elejére odaírjuk a behelyettesítendő *b* értéket. Bemásoljuk a főegyütthatót, a főegyüttható alá.

(3) Az utoljára kitöltött mezőbeli értéket megszorozzuk *b*-vel, hozzáadjuk a mellette jobbra lévő üres mező fölötti együtthatót, és ezt beírjuk ebbe az üres mezőbe.

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \ldots + a_1 x + a_0.$$

	a_n	$\ldots$	a_{j+1}	a_j	$\ldots$	a_1	a_0
b	$c_{n-1} = a_n$	$\ldots$	c_j	$c_j b + a_j =$	$\ldots$	c_0	c_0
	c_{n-1}	$\ldots$	c_j	$= c_{j-1}$	$\ldots$	c_0	

A Horner elrendezés

(1) A táblázat felső sorába balról jobbra beírjuk sorban a polinom együtthatóit, a főtagtól a konstans tagig. (A polinomban nem kiírt nulla együtthatókat is!)

(2) Az alsó sor elejére odaírjuk a behelyettesítendő *b* értéket. Bemásoljuk a főegyütthatót, a főegyüttható alá.

(3) Az utoljára kitöltött mezőbeli értéket megszorozzuk *b*-vel, hozzáadjuk a mellette jobbra lévő üres mező fölötti együtthatót, és ezt beírjuk ebbe az üres mezőbe.

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \ldots + a_1 x + a_0.$$

	a_n	$\ldots$	a_{j+1}	a_j	$\ldots$	a_1	a_0
b	$c_{n-1} = a_n$	$\ldots$	c_j	$c_j b + a_j =$	$\ldots$	c_0	$c_0 b$
	c_{n-1}	$\ldots$	c_j	$= c_{j-1}$	$\ldots$	c_0	

A Horner elrendezés

(1) A táblázat felső sorába balról jobbra beírjuk sorban a polinom együtthatóit, a főtagtól a konstans tagig. (A polinomban nem kiírt nulla együtthatókat is!)

(2) Az alsó sor elejére odaírjuk a behelyettesítendő *b* értéket. Bemásoljuk a főegyütthatót, a főegyüttható alá.

(3) Az utoljára kitöltött mezőbeli értéket megszorozzuk *b*-vel, hozzáadjuk a mellette jobbra lévő üres mező fölötti együtthatót, és ezt beírjuk ebbe az üres mezőbe.

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \ldots + a_1 x + a_0.$$

	a_n	$\ldots$	a_{j+1}	a_j	$\ldots$	a_1	a_0
b	$c_{n-1} = a_n$	$\ldots$	c_j	$c_j b + a_j =$	$\ldots$	c_0	$c_0 b + a_0 =$
	c_{n-1}	$\ldots$	c_j	$= c_{j-1}$	$\ldots$	c_0	

A Horner elrendezés

(1) A táblázat felső sorába balról jobbra beírjuk sorban a polinom együtthatóit, a főtagtól a konstans tagig. (A polinomban nem kiírt nulla együtthatókat is!)

(2) Az alsó sor elejére odaírjuk a behelyettesítendő b értéket. Bemásoljuk a főegyütthatót, a főegyüttható alá.

(3) Az utoljára kitöltött mezőbeli értéket megszorozzuk b-vel, hozzáadjuk a mellette jobbra lévő üres mező fölötti együtthatót, és ezt beírjuk ebbe az üres mezőbe.

(4) Az $f^*(b)$ értékét az alsó sor végéről olvashatjuk le.

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \ldots + a_1 x + a_0.$$

	a_n	$\ldots$	a_{j+1}	a_j	$\ldots$	a_1	a_0
b	$c_{n-1} = a_n$ c_{n-1}	$\ldots$ $\ldots$	c_j c_j	$c_j b + a_j =$ $= c_{j-1}$	$\ldots$ $\ldots$	c_0 c_0	$c_0 b + a_0 =$

A Horner elrendezés

(1) A táblázat felső sorába balról jobbra beírjuk sorban a polinom együtthatóit, a főtagtól a konstans tagig. (A polinomban nem kiírt nulla együtthatókat is!)

(2) Az alsó sor elejére odaírjuk a behelyettesítendő b értéket. Bemásoljuk a főegyütthatót, a főegyüttható alá.

(3) Az utoljára kitöltött mezőbeli értéket megszorozzuk b-vel, hozzáadjuk a mellette jobbra lévő üres mező fölötti együtthatót, és ezt beírjuk ebbe az üres mezőbe.

(4) Az $f^*(b)$ értékét az alsó sor végéről olvashatjuk le.

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \ldots + a_1 x + a_0.$$

	a_n	$\ldots$	a_{j+1}	a_j	$\ldots$	a_1	a_0
b	$c_{n-1} = a_n$ c_{n-1}	$\ldots$ $\ldots$	c_j c_j	$c_j b + a_j =$ $= c_{j-1}$	$\ldots$ $\ldots$	c_0 c_0	$c_0 b + a_0 =$ $= f^*(b)$

A Horner-tétel bizonyítása

Legyen $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \ldots + a_1 x + a_0$,

A Horner-tétel bizonyítása

Legyen $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_{j+1}x^{j+1} + a_j x^j + \ldots + a_1 x + a_0$,

	a_n	$\ldots$	a_{j+1}	a_j	$\ldots$	a_1	a_0
	$c_{n-1} = a_n$	$\ldots$	c_j	c_{j-1}	$\ldots$	c_0	B

A Horner-tétel bizonyítása

Legyen $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_{j+1}x^{j+1} + a_j x^j + \ldots + a_1 x + a_0$,

	a_n	$\ldots$	a_{j+1}	a_j	$\ldots$	a_1	a_0
	$c_{n-1} = a_n$	$\ldots$	c_j	c_{j-1}	$\ldots$	c_0	B

$c_{j-1} = bc_j + a_j$

A Horner-tétel bizonyítása

Legyen $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_{j+1}x^{j+1} + a_j x^j + \ldots + a_1 x + a_0$,

	a_n	$\ldots$	a_{j+1}	a_j	$\ldots$	a_1	a_0
	$c_{n-1} = a_n$	$\ldots$	c_j	c_{j-1}	$\ldots$	c_0	B

$$c_{j-1} = bc_j + a_j$$
$$B = bc_0 + a_0$$

A Horner-tétel bizonyítása

Legyen $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \ldots + a_1 x + a_0$,

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} & a_n & \ldots & a_{j+1} & a_j & \ldots & a_1 & a_0 \\ \hline & c_{n-1} = a_n & \ldots & c_j & c_{j-1} & \ldots & c_0 & B \end{array} \qquad \begin{array}{c} c_{j-1} = bc_j + a_j \\ B = bc_0 + a_0 \end{array}$$

és $q(x) = c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_j x^j + c_{j-1} x^{j-1} + \ldots + c_1 x + c_0$.

A Horner-tétel bizonyítása

Legyen $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_{j+1}x^{j+1} + a_j x^j + \ldots + a_1 x + a_0$,

	a_n	$\ldots$	a_{j+1}	a_j	$\ldots$	a_1	a_0
	$c_{n-1} = a_n$	$\ldots$	c_j	c_{j-1}	$\ldots$	c_0	B

$$c_{j-1} = bc_j + a_j$$
$$B = bc_0 + a_0$$

és $q(x) = c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_j x^j + c_{j-1}x^{j-1} + \ldots + c_1 x + c_0$.

Állítás: $B = f^*(b)$

A Horner-tétel bizonyítása

Legyen $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \ldots + a_1 x + a_0$,

	a_n	$\ldots$	a_{j+1}	a_j	$\ldots$	a_1	a_0
	$c_{n-1} = a_n$	$\ldots$	c_j	c_{j-1}	$\ldots$	c_0	B

$$c_{j-1} = bc_j + a_j$$
$$B = bc_0 + a_0$$

és $q(x) = c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_j x^j + c_{j-1} x^{j-1} + \ldots + c_1 x + c_0$.

Állítás: $B = f^*(b)$ és $f(x) = (x - b) q(x) + f^*(b)$.

A Horner-tétel bizonyítása

Legyen $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_{j+1}x^{j+1} + a_j x^j + \ldots + a_1 x + a_0$,

	a_n	$\ldots$	a_{j+1}	a_j	$\ldots$	a_1	a_0
	$c_{n-1} = a_n$	$\ldots$	c_j	c_{j-1}	$\ldots$	c_0	B

$$c_{j-1} = bc_j + a_j$$
$$B = bc_0 + a_0$$

és $q(x) = c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_j x^j + c_{j-1}x^{j-1} + \ldots + c_1 x + c_0$.

Állítás: $B = f^*(b)$ és $f(x) = (x-b)q(x) + f^*(b)$.

Bizonyítás (Kiss-jegyzet, 2.4.4. Gyakorlat)

Beszorzással, és x hatványai szerint rendezve:

A Horner-tétel bizonyítása

Legyen $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \ldots + a_1 x + a_0$,

	a_n	$\ldots$	a_{j+1}	a_j	$\ldots$	a_1	a_0
	$c_{n-1} = a_n$	$\ldots$	c_j	c_{j-1}	$\ldots$	c_0	B

$$c_{j-1} = bc_j + a_j$$
$$B = bc_0 + a_0$$

és $q(x) = c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_j x^j + c_{j-1} x^{j-1} + \ldots + c_1 x + c_0$.
Állítás: $B = f^*(b)$ és $f(x) = (x - b)q(x) + f^*(b)$.

Bizonyítás (Kiss-jegyzet, 2.4.4. Gyakorlat)

Beszorzással, és x hatványai szerint rendezve:

$$(x - b)(c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_j x^j + c_{j-1} x^{j-1} + \ldots + c_1 x + c_0) + B$$

A Horner-tétel bizonyítása

Legyen $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_{j+1}x^{j+1} + a_j x^j + \ldots + a_1 x + a_0$,

	a_n	$\ldots$	a_{j+1}	a_j	$\ldots$	a_1	a_0
	$c_{n-1} = a_n$	$\ldots$	c_j	c_{j-1}	$\ldots$	c_0	B

$$c_{j-1} = bc_j + a_j$$
$$B = bc_0 + a_0$$

és $q(x) = c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_j x^j + c_{j-1}x^{j-1} + \ldots + c_1 x + c_0$.

Állítás: $B = f^*(b)$ és $f(x) = (x-b)q(x) + f^*(b)$.

Bizonyítás (Kiss-jegyzet, 2.4.4. Gyakorlat)

Beszorzással, és x hatványai szerint rendezve:

$$(x-b)(c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_j x^j + c_{j-1}x^{j-1} + \ldots + c_1 x + c_0) + B =$$
$$= c_{n-1}x^n$$

A Horner-tétel bizonyítása

Legyen $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_{j+1}x^{j+1} + a_j x^j + \ldots + a_1 x + a_0$,

	a_n	$\ldots$	a_{j+1}	a_j	$\ldots$	a_1	a_0
	$c_{n-1} = a_n$	$\ldots$	c_j	c_{j-1}	$\ldots$	c_0	B

$$c_{j-1} = bc_j + a_j$$
$$B = bc_0 + a_0$$

és $q(x) = c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_j x^j + c_{j-1}x^{j-1} + \ldots + c_1 x + c_0$.

Állítás: $B = f^*(b)$ és $f(x) = (x - b)q(x) + f^*(b)$.

Bizonyítás (Kiss-jegyzet, 2.4.4. Gyakorlat)

Beszorzással, és x hatványai szerint rendezve:

$$(x - b)(c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_j x^j + c_{j-1}x^{j-1} + \ldots + c_1 x + c_0) + B =$$
$$= c_{n-1}x^n + \ldots + (c_{j-1} - bc_j)x^j$$

A Horner-tétel bizonyítása

Legyen $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_{j+1}x^{j+1} + a_j x^j + \ldots + a_1 x + a_0$,

	a_n	$\ldots$	a_{j+1}	a_j	$\ldots$	a_1	a_0
	$c_{n-1} = a_n$	$\ldots$	c_j	c_{j-1}	$\ldots$	c_0	B

$$c_{j-1} = bc_j + a_j$$
$$B = bc_0 + a_0$$

és $q(x) = c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_j x^j + c_{j-1}x^{j-1} + \ldots + c_1 x + c_0$.

Állítás: $B = f^*(b)$ és $f(x) = (x-b)q(x) + f^*(b)$.

Bizonyítás (Kiss-jegyzet, 2.4.4. Gyakorlat)

Beszorzással, és x hatványai szerint rendezve:

$$(x-b)(c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_j x^j + c_{j-1}x^{j-1} + \ldots + c_1 x + c_0) + B =$$

$$= c_{n-1}x^n + \ldots + (c_{j-1} - bc_j)x^j + \ldots + (c_0 - bc_1)x - bc_0$$

A Horner-tétel bizonyítása

Legyen $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_{j+1}x^{j+1} + a_j x^j + \ldots + a_1 x + a_0$,

	a_n	$\ldots$	a_{j+1}	a_j	$\ldots$	a_1	a_0
	$c_{n-1} = a_n$	$\ldots$	c_j	c_{j-1}	$\ldots$	c_0	B

$c_{j-1} = bc_j + a_j$

$B = bc_0 + a_0$

és $q(x) = c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_j x^j + c_{j-1}x^{j-1} + \ldots + c_1 x + c_0$.

Állítás: $B = f^*(b)$ és $f(x) = (x-b)q(x) + f^*(b)$.

Bizonyítás (Kiss-jegyzet, 2.4.4. Gyakorlat)

Beszorzással, és x hatványai szerint rendezve:

$$(x-b)(c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_j x^j + c_{j-1}x^{j-1} + \ldots + c_1 x + c_0) + B =$$

$$= c_{n-1}x^n + \ldots + (c_{j-1} - bc_j)x^j + \ldots + (c_0 - bc_1)x - bc_0 + B\,.$$

A Horner-tétel bizonyítása

Legyen $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \ldots + a_1 x + a_0$,

	a_n	$\ldots$	a_{j+1}	a_j	$\ldots$	a_1	a_0
	$c_{n-1} = a_n$	$\ldots$	c_j	c_{j-1}	$\ldots$	c_0	B

$c_{j-1} = bc_j + a_j$

$B = bc_0 + a_0$

és $q(x) = c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_j x^j + c_{j-1} x^{j-1} + \ldots + c_1 x + c_0$.
Állítás: $B = f^*(b)$ és $f(x) = (x-b)q(x) + f^*(b)$.

Bizonyítás (Kiss-jegyzet, 2.4.4. Gyakorlat)

Beszorzással, és x hatványai szerint rendezve:

$$(x-b)(c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_j x^j + c_{j-1}x^{j-1} + \ldots + c_1 x + c_0) + B =$$

$$= c_{n-1}x^n + \ldots + (c_{j-1} - bc_j)x^j + \ldots + (c_0 - bc_1)x - bc_0 + B\,.$$

Itt $c_{n-1} = a_n$,

A Horner-tétel bizonyítása

Legyen $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_{j+1}x^{j+1} + a_j x^j + \ldots + a_1 x + a_0$,

	a_n	$\ldots$	a_{j+1}	a_j	$\ldots$	a_1	a_0
	$c_{n-1} = a_n$	$\ldots$	c_j	c_{j-1}	$\ldots$	c_0	B

$c_{j-1} = bc_j + a_j$

$B = bc_0 + a_0$

és $q(x) = c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_j x^j + c_{j-1}x^{j-1} + \ldots + c_1 x + c_0$.

Állítás: $B = f^*(b)$ és $f(x) = (x-b)q(x) + f^*(b)$.

Bizonyítás (Kiss-jegyzet, 2.4.4. Gyakorlat)

Beszorzással, és x hatványai szerint rendezve:

$$(x-b)(c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_j x^j + c_{j-1}x^{j-1} + \ldots + c_1 x + c_0) + B =$$

$$= c_{n-1}x^n + \ldots + (c_{j-1} - bc_j)x^j + \ldots + (c_0 - bc_1)x - bc_0 + B\,.$$

Itt $c_{n-1} = a_n$, $\quad c_{j-1} - bc_j = a_j$ ha $1 \le j < n$,

A Horner-tétel bizonyítása

Legyen $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_{j+1}x^{j+1} + a_j x^j + \ldots + a_1 x + a_0$,

	a_n	$\ldots$	a_{j+1}	a_j	$\ldots$	a_1	a_0
	$c_{n-1} = a_n$	$\ldots$	c_j	c_{j-1}	$\ldots$	c_0	B

$c_{j-1} = bc_j + a_j$

$B = bc_0 + a_0$

és $q(x) = c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_j x^j + c_{j-1}x^{j-1} + \ldots + c_1 x + c_0$.

Állítás: $B = f^*(b)$ és $f(x) = (x-b)q(x) + f^*(b)$.

Bizonyítás (Kiss-jegyzet, 2.4.4. Gyakorlat)

Beszorzással, és x hatványai szerint rendezve:

$$(x-b)(c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_j x^j + c_{j-1}x^{j-1} + \ldots + c_1 x + c_0) + B =$$

$$= c_{n-1}x^n + \ldots + (c_{j-1} - bc_j)x^j + \ldots + (c_0 - bc_1)x - bc_0 + B\,.$$

Itt $c_{n-1} = a_n$, $\quad c_{j-1} - bc_j = a_j$ ha $1 \le j < n$, $\quad -bc_0 + B = a_0$.

A Horner-tétel bizonyítása

Legyen $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \ldots + a_1 x + a_0$,

	a_n	$\ldots$	a_{j+1}	a_j	$\ldots$	a_1	a_0
	$c_{n-1} = a_n$	$\ldots$	c_j	c_{j-1}	$\ldots$	c_0	B

$$c_{j-1} = bc_j + a_j$$
$$B = bc_0 + a_0$$

és $q(x) = c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_j x^j + c_{j-1} x^{j-1} + \ldots + c_1 x + c_0$.

Állítás: $B = f^*(b)$ és $f(x) = (x - b)q(x) + f^*(b)$.

Bizonyítás (Kiss-jegyzet, 2.4.4. Gyakorlat)

Beszorzással, és x hatványai szerint rendezve:

$$(x - b)(c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_j x^j + c_{j-1} x^{j-1} + \ldots + c_1 x + c_0) + B =$$
$$= c_{n-1} x^n + \ldots + (c_{j-1} - bc_j) x^j + \ldots + (c_0 - bc_1) x - bc_0 + B\,.$$

Itt $c_{n-1} = a_n$, $\quad c_{j-1} - bc_j = a_j$ ha $1 \leq j < n$, $\quad -bc_0 + B = a_0$.
Tehát ez $f(x)$

A Horner-tétel bizonyítása

Legyen $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \ldots + a_1 x + a_0$,

	a_n	$\ldots$	a_{j+1}	a_j	$\ldots$	a_1	a_0
	$c_{n-1} = a_n$	$\ldots$	c_j	c_{j-1}	$\ldots$	c_0	B

$$c_{j-1} = bc_j + a_j$$
$$B = bc_0 + a_0$$

és $q(x) = c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_j x^j + c_{j-1} x^{j-1} + \ldots + c_1 x + c_0$.

Állítás: $B = f^*(b)$ és $f(x) = (x - b)q(x) + f^*(b)$.

Bizonyítás (Kiss-jegyzet, 2.4.4. Gyakorlat)

Beszorzással, és x hatványai szerint rendezve:

$$(x - b)(c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_j x^j + c_{j-1} x^{j-1} + \ldots + c_1 x + c_0) + B =$$
$$= c_{n-1} x^n + \ldots + (c_{j-1} - bc_j) x^j + \ldots + (c_0 - bc_1) x - bc_0 + B\,.$$

Itt $c_{n-1} = a_n$, $\quad c_{j-1} - bc_j = a_j$ ha $1 \le j < n$, $\quad -bc_0 + B = a_0$.
Tehát ez $f(x)$, azaz $f(x) = (x - b)q(x) + B$.

A Horner-tétel bizonyítása

Legyen $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \ldots + a_1 x + a_0$,

	a_n	$\ldots$	a_{j+1}	a_j	$\ldots$	a_1	a_0
	$c_{n-1} = a_n$	$\ldots$	c_j	c_{j-1}	$\ldots$	c_0	B

$$c_{j-1} = bc_j + a_j$$
$$B = bc_0 + a_0$$

és $q(x) = c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_j x^j + c_{j-1} x^{j-1} + \ldots + c_1 x + c_0$.

Állítás: $B = f^*(b)$ és $f(x) = (x - b)q(x) + f^*(b)$.

Bizonyítás (Kiss-jegyzet, 2.4.4. Gyakorlat)

Beszorzással, és x hatványai szerint rendezve:

$$(x - b)(c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_j x^j + c_{j-1} x^{j-1} + \ldots + c_1 x + c_0) + B =$$
$$= c_{n-1} x^n + \ldots + (c_{j-1} - bc_j) x^j + \ldots + (c_0 - bc_1) x - bc_0 + B\,.$$

Itt $c_{n-1} = a_n, \quad c_{j-1} - bc_j = a_j$ ha $1 \leq j < n, \quad -bc_0 + B = a_0$.

Tehát ez $f(x)$, azaz $f(x) = (x - b)q(x) + B$.

A b-t behelyettesítve $f^*(b) = B$

A Horner-tétel bizonyítása

Legyen $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_{j+1}x^{j+1} + a_j x^j + \ldots + a_1 x + a_0$,

	a_n	$\ldots$	a_{j+1}	a_j	$\ldots$	a_1	a_0
	$c_{n-1} = a_n$	$\ldots$	c_j	c_{j-1}	$\ldots$	c_0	B

$$c_{j-1} = bc_j + a_j$$
$$B = bc_0 + a_0$$

és $q(x) = c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_j x^j + c_{j-1}x^{j-1} + \ldots + c_1 x + c_0$.

Állítás: $B = f^*(b)$ és $f(x) = (x-b)q(x) + f^*(b)$.

Bizonyítás (Kiss-jegyzet, 2.4.4. Gyakorlat)

Beszorzással, és x hatványai szerint rendezve:

$$(x-b)(c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_j x^j + c_{j-1}x^{j-1} + \ldots + c_1 x + c_0) + B =$$
$$= c_{n-1}x^n + \ldots + (c_{j-1} - bc_j)x^j + \ldots + (c_0 - bc_1)x - bc_0 + B\,.$$

Itt $c_{n-1} = a_n$, $\quad c_{j-1} - bc_j = a_j$ ha $1 \le j < n$, $\quad -bc_0 + B = a_0$.

Tehát ez $f(x)$, azaz $f(x) = (x-b)q(x) + B$.

A b-t behelyettesítve $f^*(b) = B$ (hiszen $x - b$ nullává válik).

A gyök és a gyöktényező

Definíció

A b szám gyöke az f polinomnak, ha $(f \in \mathbb{C}[x],\ b \in \mathbb{C})$.

A gyök és a gyöktényező

Definíció

A b szám gyöke az f polinomnak, ha $f^*(b) = 0$ ($f \in \mathbb{C}[x]$, $b \in \mathbb{C}$).

A gyök és a gyöktényező

Definíció

A b szám **gyöke** az f polinomnak, ha $f^*(b) = 0$ ($f \in \mathbb{C}[x]$, $b \in \mathbb{C}$).

Állítás (a gyöktényező kiemelhetősége)

A b szám akkor és csak akkor gyöke az f polinomnak, ha van olyan q polinom, hogy

A gyök és a gyöktényező

Definíció

A b szám **gyöke** az f polinomnak, ha $f^*(b) = 0$ ($f \in \mathbb{C}[x]$, $b \in \mathbb{C}$).

Állítás (a gyöktényező kiemelhetősége)

A b szám akkor és csak akkor gyöke az f polinomnak,
ha van olyan q polinom, hogy $f(x) = (x - b)q(x)$.

A gyök és a gyöktényező

Definíció

A b szám gyöke az f polinomnak, ha $f^*(b) = 0$ ($f \in \mathbb{C}[x]$, $b \in \mathbb{C}$).

Állítás (a gyöktényező kiemelhetősége)

A b szám akkor és csak akkor gyöke az f polinomnak, ha van olyan q polinom, hogy $f(x) = (x-b)q(x)$.

Bizonyítás

Ha $f(x) = (x-b)q(x)$, akkor $f^*(b) =$

A gyök és a gyöktényező

Definíció

A b szám **gyöke** az f polinomnak, ha $f^*(b) = 0$ ($f \in \mathbb{C}[x]$, $b \in \mathbb{C}$).

Állítás (a gyöktényező kiemelhetősége)

A b szám akkor és csak akkor gyöke az f polinomnak, ha van olyan q polinom, hogy $f(x) = (x-b)q(x)$.

Bizonyítás

Ha $f(x) = (x-b)q(x)$, akkor $f^*(b) = (b-b)g^*(b)$

A gyök és a gyöktényező

Definíció

A b szám **gyöke** az f polinomnak, ha $f^*(b) = 0$ ($f \in \mathbb{C}[x]$, $b \in \mathbb{C}$).

Állítás (a gyöktényező kiemelhetősége)

A b szám akkor és csak akkor gyöke az f polinomnak,
ha van olyan q polinom, hogy $f(x) = (x - b)q(x)$.

Bizonyítás

Ha $f(x) = (x - b)q(x)$, akkor $f^*(b) = (b - b)g^*(b) = 0$.

A gyök és a gyöktényező

Definíció

A b szám gyöke az f polinomnak, ha $f^*(b) = 0$ ($f \in \mathbb{C}[x]$, $b \in \mathbb{C}$).

Állítás (a gyöktényező kiemelhetősége)

A b szám akkor és csak akkor gyöke az f polinomnak,
ha van olyan q polinom, hogy $f(x) = (x - b)q(x)$.

Bizonyítás

Ha $f(x) = (x - b)q(x)$, akkor $f^*(b) = (b - b)g^*(b) = 0$.
Megfordítva, ha $f^*(b) = 0$,

A gyök és a gyöktényező

Definíció

A b szám gyöke az f polinomnak, ha $f^*(b) = 0$ ($f \in \mathbb{C}[x]$, $b \in \mathbb{C}$).

Állítás (a gyöktényező kiemelhetősége)

A b szám akkor és csak akkor gyöke az f polinomnak, ha van olyan q polinom, hogy $f(x) = (x - b)q(x)$.

Bizonyítás

Ha $f(x) = (x - b)q(x)$, akkor $f^*(b) = (b - b)g^*(b) = 0$.
Megfordítva, ha $f^*(b) = 0$, akkor a Horner-elrendezésből kapott q polinomra

A gyök és a gyöktényező

Definíció

A b szám gyöke az f polinomnak, ha $f^*(b) = 0$ ($f \in \mathbb{C}[x]$, $b \in \mathbb{C}$).

Állítás (a gyöktényező kiemelhetősége)

A b szám akkor és csak akkor gyöke az f polinomnak, ha van olyan q polinom, hogy $f(x) = (x - b)q(x)$.

Bizonyítás

Ha $f(x) = (x - b)q(x)$, akkor $f^*(b) = (b - b)g^*(b) = 0$.
Megfordítva, ha $f^*(b) = 0$, akkor a Horner-elrendezésből kapott q polinomra $f(x) = (x - b)q(x) + 0$.

A gyök és a gyöktényező

Definíció

A b szám **gyöke** az f polinomnak, ha $f^*(b) = 0$ ($f \in \mathbb{C}[x]$, $b \in \mathbb{C}$).

Állítás (a gyöktényező kiemelhetősége)

A b szám akkor és csak akkor gyöke az f polinomnak, ha van olyan q polinom, hogy $f(x) = (x-b)q(x)$.

Bizonyítás

Ha $f(x) = (x-b)q(x)$, akkor $f^*(b) = (b-b)g^*(b) = 0$.
Megfordítva, ha $f^*(b) = 0$, akkor a Horner-elrendezésből kapott q polinomra $f(x) = (x-b)q(x) + 0$.

Az $x-b$ a b gyökhöz tartozó **gyöktényező**.

Több gyöktényező kiemelése

Tétel (Kiss-jegyzet, 2.4.7. Tétel)

Minden $0 \neq f \in \mathbb{C}[x]$ fölírható $f(x) = (x - b_1) \ldots (x - b_k) q(x)$ alakban,

Több gyöktényező kiemelése

Tétel (Kiss-jegyzet, 2.4.7. Tétel)

Minden $0 \neq f \in \mathbb{C}[x]$ fölírható $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k) q(x)$ alakban, ahol a (nem feltétlenül különböző) $b_1, \dots, b_k$ számok az f-nek az összes $\mathbb{C}$-beli gyökei,

Több gyöktényező kiemelése

Tétel (Kiss-jegyzet, 2.4.7. Tétel)

Minden $0 \neq f \in \mathbb{C}[x]$ fölírható $f(x) = (x - b_1) \ldots (x - b_k) q(x)$ alakban, ahol a (nem feltétlenül különböző) $b_1, \ldots, b_k$ számok az f-nek az összes $\mathbb{C}$-beli gyökei, és q-nak nincs gyöke $\mathbb{C}$-ben.

Több gyöktényező kiemelése

Tétel (Kiss-jegyzet, 2.4.7. Tétel)

Minden $0 \neq f \in \mathbb{C}[x]$ fölírható $f(x) = (x - b_1)\ldots(x - b_k)q(x)$ alakban, ahol a (nem feltétlenül különböző) $b_1, \ldots, b_k$ számok az f-nek az összes $\mathbb{C}$-beli gyökei, és q-nak nincs gyöke $\mathbb{C}$-ben.

Bizonyítás

Ha f-nek nincs gyöke $\mathbb{C}$-ben, akkor $f(x) = q(x)$ és $k = 0$ jó.

Több gyöktényező kiemelése

Tétel (Kiss-jegyzet, 2.4.7. Tétel)

Minden $0 \neq f \in \mathbb{C}[x]$ fölírható $f(x) = (x - b_1) \ldots (x - b_k) q(x)$ alakban, ahol a (nem feltétlenül különböző) $b_1, \ldots, b_k$ számok az f-nek az összes $\mathbb{C}$-beli gyökei, és q-nak nincs gyöke $\mathbb{C}$-ben.

Bizonyítás

Ha f-nek nincs gyöke $\mathbb{C}$-ben, akkor $f(x) = q(x)$ és $k = 0$ jó.

Üres szorzat!

Több gyöktényező kiemelése

Tétel (Kiss-jegyzet, 2.4.7. Tétel)

Minden $0 \neq f \in \mathbb{C}[x]$ fölírható $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k)q(x)$ alakban, ahol a (nem feltétlenül különböző) $b_1, \dots, b_k$ számok az f-nek az összes $\mathbb{C}$-beli gyökei, és q-nak nincs gyöke $\mathbb{C}$-ben.

Bizonyítás

Ha f-nek nincs gyöke $\mathbb{C}$-ben, akkor $f(x) = q(x)$ és $k = 0$ jó.
Ha van, akkor $f(x) = (x - b_1)q_1(x)$ (a gyöktényező kiemelhető).

Több gyöktényező kiemelése

Tétel (Kiss-jegyzet, 2.4.7. Tétel)

Minden $0 \neq f \in \mathbb{C}[x]$ fölírható $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k) q(x)$ alakban, ahol a (nem feltétlenül különböző) $b_1, \dots, b_k$ számok az f-nek az összes $\mathbb{C}$-beli gyökei, és q-nak nincs gyöke $\mathbb{C}$-ben.

Bizonyítás

Ha f-nek nincs gyöke $\mathbb{C}$-ben, akkor $f(x) = q(x)$ és $k = 0$ jó.
Ha van, akkor $f(x) = (x - b_1)q_1(x)$ (a gyöktényező kiemelhető).
Ha q_1-nek van egy b_2 gyöke, akkor $q_1(x) = (x - b_2)q_2(x)$.

Több gyöktényező kiemelése

Tétel (Kiss-jegyzet, 2.4.7. Tétel)

Minden $0 \neq f \in \mathbb{C}[x]$ fölírható $f(x) = (x - b_1) \ldots (x - b_k) q(x)$ alakban, ahol a (nem feltétlenül különböző) $b_1, \ldots, b_k$ számok az f-nek az összes $\mathbb{C}$-beli gyökei, és q-nak nincs gyöke $\mathbb{C}$-ben.

Bizonyítás

Ha f-nek nincs gyöke $\mathbb{C}$-ben, akkor $f(x) = q(x)$ és $k = 0$ jó.
Ha van, akkor $f(x) = (x - b_1) q_1(x)$ (a gyöktényező kiemelhető).
Ha q_1-nek van egy b_2 gyöke, akkor $q_1(x) = (x - b_2) q_2(x)$. Stb.

Több gyöktényező kiemelése

Tétel (Kiss-jegyzet, 2.4.7. Tétel)

Minden $0 \neq f \in \mathbb{C}[x]$ fölírható $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k) q(x)$ alakban, ahol a (nem feltétlenül különböző) $b_1, \dots, b_k$ számok az f-nek az összes $\mathbb{C}$-beli gyökei, és q-nak nincs gyöke $\mathbb{C}$-ben.

Bizonyítás

Ha f-nek nincs gyöke $\mathbb{C}$-ben, akkor $f(x) = q(x)$ és $k = 0$ jó.
Ha van, akkor $f(x) = (x - b_1) q_1(x)$ (a gyöktényező kiemelhető).
Ha q_1-nek van egy b_2 gyöke, akkor $q_1(x) = (x - b_2) q_2(x)$. Stb.
Végül $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k) q(x)$,

Több gyöktényező kiemelése

Tétel (Kiss-jegyzet, 2.4.7. Tétel)

Minden $0 \neq f \in \mathbb{C}[x]$ fölírható $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k) q(x)$ alakban, ahol a (nem feltétlenül különböző) $b_1, \dots, b_k$ számok az f-nek az összes $\mathbb{C}$-beli gyökei, és q-nak nincs gyöke $\mathbb{C}$-ben.

Bizonyítás

Ha f-nek nincs gyöke $\mathbb{C}$-ben, akkor $f(x) = q(x)$ és $k = 0$ jó.
Ha van, akkor $f(x) = (x - b_1)q_1(x)$ (a gyöktényező kiemelhető).
Ha q_1-nek van egy b_2 gyöke, akkor $q_1(x) = (x - b_2)q_2(x)$. Stb.
Végül $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k)q(x)$, ahol q-nak nincs gyöke.

Több gyöktényező kiemelése

Tétel (Kiss-jegyzet, 2.4.7. Tétel)

Minden $0 \neq f \in \mathbb{C}[x]$ fölírható $f(x) = (x - b_1) \ldots (x - b_k)q(x)$ alakban, ahol a (nem feltétlenül különböző) $b_1, \ldots, b_k$ számok az f-nek az összes $\mathbb{C}$-beli gyökei, és q-nak nincs gyöke $\mathbb{C}$-ben.

Bizonyítás

Ha f-nek nincs gyöke $\mathbb{C}$-ben, akkor $f(x) = q(x)$ és $k = 0$ jó.
Ha van, akkor $f(x) = (x - b_1)q_1(x)$ (a gyöktényező kiemelhető).
Ha q_1-nek van egy b_2 gyöke, akkor $q_1(x) = (x - b_2)q_2(x)$. Stb.
Végül $f(x) = (x - b_1) \ldots (x - b_k)q(x)$, ahol q-nak nincs gyöke.
Belátjuk, hogy f-nek nincs más gyöke, mint $b_1, \ldots, b_k$.

Több gyöktényező kiemelése

Tétel (Kiss-jegyzet, 2.4.7. Tétel)

Minden $0 \neq f \in \mathbb{C}[x]$ fölírható $f(x) = (x - b_1) \ldots (x - b_k) q(x)$ alakban, ahol a (nem feltétlenül különböző) $b_1, \ldots, b_k$ számok az f-nek az összes $\mathbb{C}$-beli gyökei, és q-nak nincs gyöke $\mathbb{C}$-ben.

Bizonyítás

Ha f-nek nincs gyöke $\mathbb{C}$-ben, akkor $f(x) = q(x)$ és $k = 0$ jó.
Ha van, akkor $f(x) = (x - b_1)q_1(x)$ (a gyöktényező kiemelhető).
Ha q_1-nek van egy b_2 gyöke, akkor $q_1(x) = (x - b_2)q_2(x)$. Stb.
Végül $f(x) = (x - b_1) \ldots (x - b_k)q(x)$, ahol q-nak nincs gyöke.
Belátjuk, hogy f-nek nincs más gyöke, mint $b_1, \ldots, b_k$.
Valóban, ha $f^*(b) = 0$,

Több gyöktényező kiemelése

Tétel (Kiss-jegyzet, 2.4.7. Tétel)

Minden $0 \neq f \in \mathbb{C}[x]$ fölírható $f(x) = (x - b_1)\ldots(x - b_k)q(x)$ alakban, ahol a (nem feltétlenül különböző) $b_1, \ldots, b_k$ számok az f-nek az összes $\mathbb{C}$-beli gyökei, és q-nak nincs gyöke $\mathbb{C}$-ben.

Bizonyítás

Ha f-nek nincs gyöke $\mathbb{C}$-ben, akkor $f(x) = q(x)$ és $k = 0$ jó.
Ha van, akkor $f(x) = (x - b_1)q_1(x)$ (a gyöktényező kiemelhető).
Ha q_1-nek van egy b_2 gyöke, akkor $q_1(x) = (x - b_2)q_2(x)$. Stb.
Végül $f(x) = (x - b_1)\ldots(x - b_k)q(x)$, ahol q-nak nincs gyöke.
Belátjuk, hogy f-nek nincs más gyöke, mint $b_1, \ldots, b_k$.
Valóban, ha $f^*(b) = 0$, akkor $(b - b_1)\ldots(b - b_k)q^*(b) = 0$.

Több gyöktényező kiemelése

Tétel (Kiss-jegyzet, 2.4.7. Tétel)

Minden $0 \neq f \in \mathbb{C}[x]$ fölírható $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k) q(x)$ alakban, ahol a (nem feltétlenül különböző) $b_1, \dots, b_k$ számok az f-nek az összes $\mathbb{C}$-beli gyökei, és q-nak nincs gyöke $\mathbb{C}$-ben.

Bizonyítás

Ha f-nek nincs gyöke $\mathbb{C}$-ben, akkor $f(x) = q(x)$ és $k = 0$ jó.
Ha van, akkor $f(x) = (x - b_1) q_1(x)$ (a gyöktényező kiemelhető).
Ha q_1-nek van egy b_2 gyöke, akkor $q_1(x) = (x - b_2) q_2(x)$. Stb.
Végül $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k) q(x)$, ahol q-nak nincs gyöke.
Belátjuk, hogy f-nek nincs más gyöke, mint $b_1, \dots, b_k$.
Valóban, ha $f^*(b) = 0$, akkor $(b - b_1) \dots (b - b_k) q^*(b) = 0$.
A nullosztómentesség miatt valamelyik tényező nulla.

Több gyöktényező kiemelése

Tétel (Kiss-jegyzet, 2.4.7. Tétel)

Minden $0 \neq f \in \mathbb{C}[x]$ fölírható $f(x) = (x - b_1) \ldots (x - b_k)q(x)$ alakban, ahol a (nem feltétlenül különböző) $b_1, \ldots, b_k$ számok az f-nek az összes $\mathbb{C}$-beli gyökei, és q-nak nincs gyöke $\mathbb{C}$-ben.

Bizonyítás

Ha f-nek nincs gyöke $\mathbb{C}$-ben, akkor $f(x) = q(x)$ és $k = 0$ jó.
Ha van, akkor $f(x) = (x - b_1)q_1(x)$ (a gyöktényező kiemelhető).
Ha q_1-nek van egy b_2 gyöke, akkor $q_1(x) = (x - b_2)q_2(x)$. Stb.
Végül $f(x) = (x - b_1) \ldots (x - b_k)q(x)$, ahol q-nak nincs gyöke.
Belátjuk, hogy f-nek nincs más gyöke, mint $b_1, \ldots, b_k$.
Valóban, ha $f^*(b) = 0$, akkor $(b - b_1) \ldots (b - b_k)q^*(b) = 0$.
A nullosztómentesség miatt valamelyik tényező nulla. De $q^*(b) \neq 0$,

Több gyöktényező kiemelése

Tétel (Kiss-jegyzet, 2.4.7. Tétel)

Minden $0 \neq f \in \mathbb{C}[x]$ fölírható $f(x) = (x - b_1) \ldots (x - b_k)q(x)$ alakban, ahol a (nem feltétlenül különböző) $b_1, \ldots, b_k$ számok az f-nek az összes $\mathbb{C}$-beli gyökei, és q-nak nincs gyöke $\mathbb{C}$-ben.

Bizonyítás

Ha f-nek nincs gyöke $\mathbb{C}$-ben, akkor $f(x) = q(x)$ és $k = 0$ jó.
Ha van, akkor $f(x) = (x - b_1)q_1(x)$ (a gyöktényező kiemelhető).
Ha q_1-nek van egy b_2 gyöke, akkor $q_1(x) = (x - b_2)q_2(x)$. Stb.
Végül $f(x) = (x - b_1) \ldots (x - b_k)q(x)$, ahol q-nak nincs gyöke.
Belátjuk, hogy f-nek nincs más gyöke, mint $b_1, \ldots, b_k$.
Valóban, ha $f^*(b) = 0$, akkor $(b - b_1) \ldots (b - b_k)q^*(b) = 0$.
A nullosztómentesség miatt valamelyik tényező nulla. De $q^*(b) \neq 0$, ezért $b - b_j = 0$ valamelyik j-re.

Több gyöktényező kiemelése

Tétel (Kiss-jegyzet, 2.4.7. Tétel)

Minden $0 \neq f \in \mathbb{C}[x]$ fölírható $f(x) = (x - b_1) \ldots (x - b_k)q(x)$ alakban, ahol a (nem feltétlenül különböző) $b_1, \ldots, b_k$ számok az f-nek az összes $\mathbb{C}$-beli gyökei, és q-nak nincs gyöke $\mathbb{C}$-ben.

Bizonyítás

Ha f-nek nincs gyöke $\mathbb{C}$-ben, akkor $f(x) = q(x)$ és $k = 0$ jó.
Ha van, akkor $f(x) = (x - b_1)q_1(x)$ (a gyöktényező kiemelhető).
Ha q_1-nek van egy b_2 gyöke, akkor $q_1(x) = (x - b_2)q_2(x)$. Stb.
Végül $f(x) = (x - b_1) \ldots (x - b_k)q(x)$, ahol q-nak nincs gyöke.
Belátjuk, hogy f-nek nincs más gyöke, mint $b_1, \ldots, b_k$.
Valóban, ha $f^*(b) = 0$, akkor $(b - b_1) \ldots (b - b_k)q^*(b) = 0$.
A nullosztómentesség miatt valamelyik tényező nulla. De $q^*(b) \neq 0$, ezért $b - b_j = 0$ valamelyik j-re. Azaz $b = b_j$.

A gyökök száma

Kérdés

Miért ér véget az előző bizonyításban az eljárás?

A gyökök száma

Kérdés

Miért ér véget az előző bizonyításban az eljárás?

Ha $f(x) = (x - b_1) \ldots (x - b_k) q(x)$, akkor

A gyökök száma

Kérdés

Miért ér véget az előző bizonyításban az eljárás?

Ha $f(x) = (x - b_1)\dots(x - b_k)q(x)$, akkor
$\mathrm{gr}(f) = \mathrm{gr}(x - b_1) + \dots + \mathrm{gr}(x - b_k) + \mathrm{gr}(q)$

A gyökök száma

Kérdés

Miért ér véget az előző bizonyításban az eljárás?

Ha $f(x) = (x - b_1)\dots(x - b_k)q(x)$, akkor
$\mathrm{gr}(f) = \mathrm{gr}(x - b_1) + \ldots + \mathrm{gr}(x - b_k) + \mathrm{gr}(q)$
(hiszen szorzásnál a fokok összeadódnak).

A gyökök száma

Kérdés

Miért ér véget az előző bizonyításban az eljárás?

Ha $f(x) = (x - b_1)\dots(x - b_k)q(x)$, akkor
$\mathrm{gr}(f) = \mathrm{gr}(x - b_1) + \ldots + \mathrm{gr}(x - b_k) + \mathrm{gr}(q) = k + \mathrm{gr}(q)$
(hiszen szorzásnál a fokok összeadódnak).

A gyökök száma

Kérdés

Miért ér véget az előző bizonyításban az eljárás?

Ha $f(x) = (x - b_1)\dots(x - b_k)q(x)$, akkor
$\mathrm{gr}(f) = \mathrm{gr}(x - b_1) + \dots + \mathrm{gr}(x - b_k) + \mathrm{gr}(q) = k + \mathrm{gr}(q)$
(hiszen szorzásnál a fokok összeadódnak). Így $k \leq \mathrm{gr}(f)$.

A gyökök száma

Kérdés

Miért ér véget az előző bizonyításban az eljárás?

Ha $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k)q(x)$, akkor
$\mathrm{gr}(f) = \mathrm{gr}(x - b_1) + \dots + \mathrm{gr}(x - b_k) + \mathrm{gr}(q) = k + \mathrm{gr}(q)$
(hiszen szorzásnál a fokok összeadódnak). Így $k \leq \mathrm{gr}(f)$.

Következmény

Minden polinomnak legfeljebb annyi gyöke van, mint a foka.

A gyökök száma

Kérdés

Miért ér véget az előző bizonyításban az eljárás?

Ha $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k) q(x)$, akkor
$\mathrm{gr}(f) = \mathrm{gr}(x - b_1) + \dots + \mathrm{gr}(x - b_k) + \mathrm{gr}(q) = k + \mathrm{gr}(q)$
(hiszen szorzásnál a fokok összeadódnak). Így $k \leq \mathrm{gr}(f)$.

Következmény

Minden polinomnak legfeljebb annyi gyöke van, mint a foka.

Házi feladat

Mutassuk meg, hogy egy n-edfokú polinom minden értéket legfeljebb n helyen vehet föl.

A polinomok azonossági tétele

A polinomok azonossági tétele

Ha két, legfeljebb n-edfokú polinom több mint n helyen megegyezik,

A polinomok azonossági tétele

A polinomok azonossági tétele

Ha két, legfeljebb n-edfokú polinom több mint n helyen megegyezik, akkor egyenlők

A polinomok azonossági tétele

A polinomok azonossági tétele

Ha két, legfeljebb n-edfokú polinom több mint n helyen megegyezik, akkor egyenlők (együtthatóik megegyeznek).

A polinomok azonossági tétele

A polinomok azonossági tétele

Ha két, legfeljebb n-edfokú polinom több mint n helyen megegyezik, akkor egyenlők (együtthatóik megegyeznek).

Bizonyítás

Ha f és g megegyezik a c helyen,

A polinomok azonossági tétele

A polinomok azonossági tétele

Ha két, legfeljebb n-edfokú polinom több mint n helyen megegyezik, akkor egyenlők (együtthatóik megegyeznek).

Bizonyítás

Ha f és g megegyezik a c helyen, azaz $f^*(c) = g^*(c)$,

A polinomok azonossági tétele

A polinomok azonossági tétele

Ha két, legfeljebb n-edfokú polinom több mint n helyen megegyezik, akkor egyenlők (együtthatóik megegyeznek).

Bizonyítás

Ha f és g megegyezik a c helyen, azaz $f^*(c) = g^*(c)$, akkor $(f-g)^*(c) = 0$.

A polinomok azonossági tétele

A polinomok azonossági tétele

Ha két, legfeljebb n-edfokú polinom több mint n helyen megegyezik, akkor egyenlők (együtthatóik megegyeznek).

Bizonyítás

Ha f és g megegyezik a c helyen, azaz $f^*(c) = g^*(c)$, akkor $(f - g)^*(c) = 0$. Tehát $f - g$-nek több, mint n gyöke van.

A polinomok azonossági tétele

A polinomok azonossági tétele

Ha két, legfeljebb n-edfokú polinom több mint n helyen megegyezik, akkor egyenlők (együtthatóik megegyeznek).

Bizonyítás

Ha f és g megegyezik a c helyen, azaz $f^*(c) = g^*(c)$, akkor $(f-g)^*(c) = 0$. Tehát $f-g$-nek több, mint n gyöke van. De foka (ha van), legfeljebb n lehet.

A polinomok azonossági tétele

A polinomok azonossági tétele

Ha két, legfeljebb n-edfokú polinom több mint n helyen megegyezik, akkor egyenlők (együtthatóik megegyeznek).

Bizonyítás

Ha f és g megegyezik a c helyen, azaz $f^*(c) = g^*(c)$, akkor $(f - g)^*(c) = 0$. Tehát $f - g$-nek több, mint n gyöke van. De foka (ha van), legfeljebb n lehet. Ez ellentmond annak, hogy egy nem nulla polinomnak legfeljebb annyi gyöke lehet, mint a foka,

A polinomok azonossági tétele

A polinomok azonossági tétele

Ha két, legfeljebb n-edfokú polinom több mint n helyen megegyezik, akkor egyenlők (együtthatóik megegyeznek).

Bizonyítás

Ha f és g megegyezik a c helyen, azaz $f^*(c) = g^*(c)$, akkor $(f - g)^*(c) = 0$. Tehát $f - g$-nek több, mint n gyöke van. De foka (ha van), legfeljebb n lehet. Ez ellentmond annak, hogy egy nem nulla polinomnak legfeljebb annyi gyöke lehet, mint a foka, kivéve, ha $f - g = 0$, azaz $f = g$.

A polinomok azonossági tétele

A polinomok azonossági tétele

Ha két, legfeljebb n-edfokú polinom több mint n helyen megegyezik, akkor egyenlők (együtthatóik megegyeznek).

Bizonyítás

Ha f és g megegyezik a c helyen, azaz $f^*(c) = g^*(c)$, akkor $(f - g)^*(c) = 0$. Tehát $f - g$-nek több, mint n gyöke van. De foka (ha van), legfeljebb n lehet. Ez ellentmond annak, hogy egy nem nulla polinomnak legfeljebb annyi gyöke lehet, mint a foka, kivéve, ha $f - g = 0$, azaz $f = g$.

Következmény

Ha az f^* és g^* polinomfüggvények egyenlők, akkor $f = g$.

A polinomok azonossági tétele

A polinomok azonossági tétele

Ha két, legfeljebb n-edfokú polinom több mint n helyen megegyezik, akkor egyenlők (együtthatóik megegyeznek).

Bizonyítás

Ha f és g megegyezik a c helyen, azaz $f^*(c) = g^*(c)$, akkor $(f - g)^*(c) = 0$. Tehát $f - g$-nek több, mint n gyöke van. De foka (ha van), legfeljebb n lehet. Ez ellentmond annak, hogy egy nem nulla polinomnak legfeljebb annyi gyöke lehet, mint a foka, kivéve, ha $f - g = 0$, azaz $f = g$.

Következmény

Ha az f^* és g^* polinomfüggvények egyenlők, akkor $f = g$. Vagyis $\mathbb{C}$ fölött $f \mapsto f^*$ kölcsönösen egyértelmű.

Az algebra alaptétele

Az algebra alaptétele

Minden nem konstans, komplex együtthatós polinomnak van gyöke a komplex számok között.

Az algebra alaptétele

Az algebra alaptétele

Minden nem konstans, komplex együtthatós polinomnak van gyöke a komplex számok között.

Bizonyítás: egyelőre nincs

A tétel bizonyításához az analízis eszközei szükségesek.

Az algebra alaptétele

Az algebra alaptétele

Minden nem konstans, komplex együtthatós polinomnak van gyöke a komplex számok között.

Bizonyítás: egyelőre nincs

A tétel bizonyításához az analízis eszközei szükségesek.
Harmadéven: bizonyítás Komplex függvénytan segítségével.

Az algebra alaptétele

Az algebra alaptétele

Minden nem konstans, komplex együtthatós polinomnak van gyöke a komplex számok között.

Bizonyítás: egyelőre nincs

A tétel bizonyításához az analízis eszközei szükségesek.
Harmadéven: bizonyítás Komplex függvénytan segítségével.
Másodéven: bizonyítás Galois-elmélet segítségével.

Az algebra alaptétele

Az algebra alaptétele

Minden nem konstans, komplex együtthatós polinomnak van gyöke a komplex számok között.

Bizonyítás: egyelőre nincs

A tétel bizonyításához az analízis eszközei szükségesek.
Harmadéven: bizonyítás Komplex függvénytan segítségével.
Másodéven: bizonyítás Galois-elmélet segítségével.
Felhasznált segédtétel:

Az algebra alaptétele

Az algebra alaptétele

Minden nem konstans, komplex együtthatós polinomnak van gyöke a komplex számok között.

Bizonyítás: egyelőre nincs

A tétel bizonyításához az analízis eszközei szükségesek.
Harmadéven: bizonyítás Komplex függvénytan segítségével.
Másodéven: bizonyítás Galois-elmélet segítségével.
Felhasznált segédtétel:

Tétel

Páratlan fokú valós együtthatós polinomnak van valós gyöke.

Az algebra alaptétele

Az algebra alaptétele

Minden nem konstans, komplex együtthatós polinomnak van gyöke a komplex számok között.

Bizonyítás: egyelőre nincs

A tétel bizonyításához az analízis eszközei szükségesek.
Harmadéven: bizonyítás Komplex függvénytan segítségével.
Másodéven: bizonyítás Galois-elmélet segítségével.
Felhasznált segédtétel:

Tétel

Páratlan fokú valós együtthatós polinomnak van valós gyöke.

Ez bizonyítható az elemi analízis Bolzano-tételével,

Az algebra alaptétele

Az algebra alaptétele

Minden nem konstans, komplex együtthatós polinomnak van gyöke a komplex számok között.

Bizonyítás: egyelőre nincs

A tétel bizonyításához az analízis eszközei szükségesek.
Harmadéven: bizonyítás Komplex függvénytan segítségével.
Másodéven: bizonyítás Galois-elmélet segítségével.
Felhasznált segédtétel:

Tétel

Páratlan fokú valós együtthatós polinomnak van valós gyöke.

Ez bizonyítható az elemi analízis Bolzano-tételével, de következik az algebra alaptételéből is.

A gyöktényezős alak

Következmény (Kiss-jegyzet, 2.5.1. Gyakorlat)

Minden n-edfokú komplex együtthatós f polinom fölírható $c(x-b_1)\dots(x-b_n)$ alakban,

A gyöktényezős alak

Következmény (Kiss-jegyzet, 2.5.1. Gyakorlat)

Minden n-edfokú komplex együtthatós f polinom fölírható $c(x - b_1)\ldots(x - b_n)$ alakban, ahol c az f főegyütthatója.

A gyöktényezős alak

Következmény (Kiss-jegyzet, 2.5.1. Gyakorlat)

Minden n-edfokú komplex együtthatós f polinom fölírható $c(x-b_1)\dots(x-b_n)$ alakban, ahol c az f főegyütthatója. Ez az f polinom gyöktényezős alakja.

A gyöktényezős alak

Következmény (Kiss-jegyzet, 2.5.1. Gyakorlat)

Minden n-edfokú komplex együtthatós f polinom fölírható $c(x - b_1)\dots(x - b_n)$ alakban, ahol c az f főegyütthatója. Ez az f polinom gyöktényezős alakja.

Bizonyítás

Láttuk: $f(x) = (x - b_1)\dots(x - b_k)q(x)$,

A gyöktényezős alak

Következmény (Kiss-jegyzet, 2.5.1. Gyakorlat)

Minden n-edfokú komplex együtthatós f polinom fölírható $c(x-b_1)\dots(x-b_n)$ alakban, ahol c az f főegyütthatója. Ez az f polinom gyöktényezős alakja.

Bizonyítás

Láttuk: $f(x) = (x-b_1)\dots(x-b_k)q(x)$, ahol q-nak nincs gyöke.

A gyöktényezős alak

Következmény (Kiss-jegyzet, 2.5.1. Gyakorlat)

Minden n-edfokú komplex együtthatós f polinom fölírható $c(x-b_1)\dots(x-b_n)$ alakban, ahol c az f főegyütthatója. Ez az f polinom gyöktényezős alakja.

Bizonyítás

Láttuk: $f(x)=(x-b_1)\dots(x-b_k)q(x)$, ahol q-nak nincs gyöke. Az algebra alaptétele miatt $q=c$ konstans polinom.

A gyöktényezős alak

Következmény (Kiss-jegyzet, 2.5.1. Gyakorlat)

Minden n-edfokú komplex együtthatós f polinom fölírható $c(x-b_1)\ldots(x-b_n)$ alakban, ahol c az f főegyütthatója. Ez az f polinom gyöktényezős alakja.

Bizonyítás

Láttuk: $f(x)=(x-b_1)\ldots(x-b_k)q(x)$, ahol q-nak nincs gyöke. Az algebra alaptétele miatt $q=c$ konstans polinom. De $c\neq 0$, mert akkor $f=0$ lenne, és nem lenne foka.

A gyöktényezős alak

Következmény (Kiss-jegyzet, 2.5.1. Gyakorlat)

Minden n-edfokú komplex együtthatós f polinom fölírható $c(x-b_1)\ldots(x-b_n)$ alakban, ahol c az f főegyütthatója.
Ez az f polinom gyöktényezős alakja.

Bizonyítás

Láttuk: $f(x)=(x-b_1)\ldots(x-b_k)q(x)$, ahol q-nak nincs gyöke.
Az algebra alaptétele miatt $q=c$ konstans polinom.
De $c\neq 0$, mert akkor $f=0$ lenne, és nem lenne foka.
Láttuk: $\mathrm{gr}(f)=k+\mathrm{gr}(q)$,

A gyöktényezős alak

Következmény (Kiss-jegyzet, 2.5.1. Gyakorlat)

Minden n-edfokú komplex együtthatós f polinom fölírható $c(x-b_1)\dots(x-b_n)$ alakban, ahol c az f főegyütthatója. Ez az f polinom gyöktényezős alakja.

Bizonyítás

Láttuk: $f(x) = (x-b_1)\dots(x-b_k)q(x)$, ahol q-nak nincs gyöke.
Az algebra alaptétele miatt $q = c$ konstans polinom.
De $c \neq 0$, mert akkor $f = 0$ lenne, és nem lenne foka.
Láttuk: $\mathrm{gr}(f) = k + \mathrm{gr}(q)$, de $\mathrm{gr}(q) = 0$, ezért $k = n$.

A gyöktényezős alak

Következmény (Kiss-jegyzet, 2.5.1. Gyakorlat)

Minden n-edfokú komplex együtthatós f polinom fölírható $c(x-b_1)\dots(x-b_n)$ alakban, ahol c az f főegyütthatója. Ez az f polinom gyöktényezős alakja.

Bizonyítás

Láttuk: $f(x) = (x-b_1)\dots(x-b_k)q(x)$, ahol q-nak nincs gyöke.
Az algebra alaptétele miatt $q = c$ konstans polinom.
De $c \neq 0$, mert akkor $f = 0$ lenne, és nem lenne foka.
Láttuk: $\mathrm{gr}(f) = k + \mathrm{gr}(q)$, de $\mathrm{gr}(q) = 0$, ezért $k = n$.
A $c(x-b_1)\dots(x-b_n)$ szorzatban x^n együtthatója c.

A gyöktényezős alak

Következmény (Kiss-jegyzet, 2.5.1. Gyakorlat)

Minden n-edfokú komplex együtthatós f polinom fölírható $c(x-b_1)\dots(x-b_n)$ alakban, ahol c az f főegyütthatója.
Ez az f polinom gyöktényezős alakja.

Bizonyítás

Láttuk: $f(x)=(x-b_1)\dots(x-b_k)q(x)$, ahol q-nak nincs gyöke.
Az algebra alaptétele miatt $q=c$ konstans polinom.
De $c\neq 0$, mert akkor $f=0$ lenne, és nem lenne foka.
Láttuk: $\mathrm{gr}(f)=k+\mathrm{gr}(q)$, de $\mathrm{gr}(q)=0$, ezért $k=n$.
A $c(x-b_1)\dots(x-b_n)$ szorzatban x^n együtthatója c.

Példa

$x^4-1=$

A gyöktényezős alak

Következmény (Kiss-jegyzet, 2.5.1. Gyakorlat)

Minden n-edfokú komplex együtthatós f polinom fölírható $c(x-b_1)\ldots(x-b_n)$ alakban, ahol c az f főegyütthatója. Ez az f polinom gyöktényezős alakja.

Bizonyítás

Láttuk: $f(x)=(x-b_1)\ldots(x-b_k)q(x)$, ahol q-nak nincs gyöke.
Az algebra alaptétele miatt $q=c$ konstans polinom.
De $c\neq 0$, mert akkor $f=0$ lenne, és nem lenne foka.
Láttuk: $\mathrm{gr}(f)=k+\mathrm{gr}(q)$, de $\mathrm{gr}(q)=0$, ezért $k=n$.
A $c(x-b_1)\ldots(x-b_n)$ szorzatban x^n együtthatója c.

Példa

$x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)=$

A gyöktényezős alak

Következmény (Kiss-jegyzet, 2.5.1. Gyakorlat)

Minden n-edfokú komplex együtthatós f polinom fölírható $c(x-b_1)\dots(x-b_n)$ alakban, ahol c az f főegyütthatója. Ez az f polinom gyöktényezős alakja.

Bizonyítás

Láttuk: $f(x)=(x-b_1)\dots(x-b_k)q(x)$, ahol q-nak nincs gyöke.
Az algebra alaptétele miatt $q=c$ konstans polinom.
De $c\neq 0$, mert akkor $f=0$ lenne, és nem lenne foka.
Láttuk: $\mathrm{gr}(f)=k+\mathrm{gr}(q)$, de $\mathrm{gr}(q)=0$, ezért $k=n$.
A $c(x-b_1)\dots(x-b_n)$ szorzatban x^n együtthatója c.

Példa

$x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)=\big(x-1\big)\big(x-(-1)\big)$

A gyöktényezős alak

Következmény (Kiss-jegyzet, 2.5.1. Gyakorlat)

Minden n-edfokú komplex együtthatós f polinom fölírható $c(x-b_1)\dots(x-b_n)$ alakban, ahol c az f főegyütthatója. Ez az f polinom gyöktényezős alakja.

Bizonyítás

Láttuk: $f(x) = (x-b_1)\dots(x-b_k)q(x)$, ahol q-nak nincs gyöke.
Az algebra alaptétele miatt $q = c$ konstans polinom.
De $c \neq 0$, mert akkor $f = 0$ lenne, és nem lenne foka.
Láttuk: $\mathrm{gr}(f) = k + \mathrm{gr}(q)$, de $\mathrm{gr}(q) = 0$, ezért $k = n$.
A $c(x-b_1)\dots(x-b_n)$ szorzatban x^n együtthatója c.

Példa

$x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1) = \big(x-1\big)\big(x-(-1)\big)\big(x-i\big)\big(x-(-i)\big)$.

Példák gyöktényezős alakra

Állítás

$x^n - 1 = (x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2)\dots(x - \varepsilon_n)$, ahol
$\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ az n-edik egységgyökök.

Példák gyöktényezős alakra

Állítás

$x^n - 1 = (x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2)\dots(x - \varepsilon_n)$, ahol
$\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ az n-edik egységgyökök.

Bizonyítás

Példák gyöktényezős alakra

Állítás

$x^n - 1 = (x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2)\dots(x - \varepsilon_n)$, ahol
$\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ az n-edik egységgyökök.

Bizonyítás

Mivel $\varepsilon_k^n = 1$,

Példák gyöktényezős alakra

Állítás

$x^n - 1 = (x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2)\dots(x - \varepsilon_n)$, ahol
$\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ az n-edik egységgyökök.

Bizonyítás

Mivel $\varepsilon_k^n = 1$, ezért mindegyik ε_k gyöke $x^n - 1$-nek.

Példák gyöktényezős alakra

Állítás

$x^n - 1 = (x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2)\dots(x - \varepsilon_n)$, ahol
$\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ az n-edik egységgyökök.

Bizonyítás

Mivel $\varepsilon_k^n = 1$, ezért mindegyik ε_k gyöke $x^n - 1$-nek.
Ezért mindegyik $x - \varepsilon_k$ szerepel $x^n - 1$ gyöktényezős alakjában.

Példák gyöktényezős alakra

Állítás

$x^n - 1 = (x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2)\dots(x - \varepsilon_n)$, ahol
$\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ az n-edik egységgyökök.

Bizonyítás

Mivel $\varepsilon_k^n = 1$, ezért mindegyik ε_k gyöke $x^n - 1$-nek.
Ezért mindegyik $x - \varepsilon_k$ szerepel $x^n - 1$ gyöktényezős alakjában.
De $x^n - 1$ foka n,

Példák gyöktényezős alakra

Állítás

$x^n - 1 = (x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2)\dots(x - \varepsilon_n)$, ahol
$\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ az n-edik egységgyökök.

Bizonyítás

Mivel $\varepsilon_k^n = 1$, ezért mindegyik ε_k gyöke $x^n - 1$-nek.
Ezért mindegyik $x - \varepsilon_k$ szerepel $x^n - 1$ gyöktényezős alakjában.
De $x^n - 1$ foka n, és így legfeljebb n gyöke lehet.

Példák gyöktényezős alakra

Állítás

$x^n - 1 = (x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2)\dots(x - \varepsilon_n)$, ahol
$\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ az n-edik egységgyökök.

Bizonyítás

Mivel $\varepsilon_k^n = 1$, ezért mindegyik ε_k gyöke $x^n - 1$-nek.
Ezért mindegyik $x - \varepsilon_k$ szerepel $x^n - 1$ gyöktényezős alakjában.
De $x^n - 1$ foka n, és így legfeljebb n gyöke lehet.
Az $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ páronként különböző,

Példák gyöktényezős alakra

Állítás

$x^n - 1 = (x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2)\dots(x - \varepsilon_n)$, ahol
$\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ az n-edik egységgyökök.

Bizonyítás

Mivel $\varepsilon_k^n = 1$, ezért mindegyik ε_k gyöke $x^n - 1$-nek.
Ezért mindegyik $x - \varepsilon_k$ szerepel $x^n - 1$ gyöktényezős alakjában.
De $x^n - 1$ foka n, és így legfeljebb n gyöke lehet.
Az $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ páronként különböző, így ez az összes gyök.

Példák gyöktényezős alakra

Állítás

$x^n - 1 = (x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2)\dots(x - \varepsilon_n)$, ahol
$\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ az n-edik egységgyökök.

Bizonyítás

Mivel $\varepsilon_k^n = 1$, ezért mindegyik ε_k gyöke $x^n - 1$-nek.
Ezért mindegyik $x - \varepsilon_k$ szerepel $x^n - 1$ gyöktényezős alakjában.
De $x^n - 1$ foka n, és így legfeljebb n gyöke lehet.
Az $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ páronként különböző, így ez az összes gyök.
Az $x^n - 1$ főegyütthatója 1,

Példák gyöktényezős alakra

Állítás

$x^n - 1 = (x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2) \dots (x - \varepsilon_n)$, ahol
$\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$ az n-edik egységgyökök.

Bizonyítás

Mivel $\varepsilon_k^n = 1$, ezért mindegyik ε_k gyöke $x^n - 1$-nek.
Ezért mindegyik $x - \varepsilon_k$ szerepel $x^n - 1$ gyöktényezős alakjában.
De $x^n - 1$ foka n, és így legfeljebb n gyöke lehet.
Az $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ páronként különböző, így ez az összes gyök.
Az $x^n - 1$ főegyütthatója 1, ezért $c = 1$-gyel kell szorozni.

Példák gyöktényezős alakra

Állítás

$x^n - 1 = (x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2)\dots(x - \varepsilon_n)$, ahol
$\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ az n-edik egységgyökök.

Bizonyítás

Mivel $\varepsilon_k^n = 1$, ezért mindegyik ε_k gyöke $x^n - 1$-nek.
Ezért mindegyik $x - \varepsilon_k$ szerepel $x^n - 1$ gyöktényezős alakjában.
De $x^n - 1$ foka n, és így legfeljebb n gyöke lehet.
Az $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ páronként különböző, így ez az összes gyök.
Az $x^n - 1$ főegyütthatója 1, ezért $c = 1$-gyel kell szorozni.

Házi feladat

$x^4 + 4 = \big((x - (1+i)\big)\big((x - (-1+i)\big)\big((x - (-1-i)\big)\big((x - (1-i)\big)$.

Gyök multiplicitása

Példa

$$x^3 - 3x - 2 = (x+1)(x+1)(x-2)$$

Gyök multiplicitása

Példa

$$x^3 - 3x - 2 = (x+1)(x+1)(x-2) = (x+1)^2(x-2).$$

Gyök multiplicitása

Példa

$x^3 - 3x - 2 = (x+1)(x+1)(x-2) = (x+1)^2(x-2).$

Általában:

$f(x) = c(x-d_1)^{k_1}(x-d_2)^{k_2}\dots(x-d_m)^{k_m},$

Gyök multiplicitása

Példa

$x^3 - 3x - 2 = (x+1)(x+1)(x-2) = (x+1)^2(x-2).$

Általában:

$f(x) = c(x-d_1)^{k_1}(x-d_2)^{k_2}\dots(x-d_m)^{k_m}$,
ahol a $d_1, \dots, d_m$ már páronként különbözők.

Gyök multiplicitása

Példa

$x^3 - 3x - 2 = (x+1)(x+1)(x-2) = (x+1)^2(x-2)$.

Általában:

$f(x) = c(x-d_1)^{k_1}(x-d_2)^{k_2}\dots(x-d_m)^{k_m}$,
ahol a $d_1, \dots, d_m$ már páronként különbözők.

Definíció

A k_i a d_i gyök multiplicitása.

Gyök multiplicitása

Példa

$x^3 - 3x - 2 = (x+1)(x+1)(x-2) = (x+1)^2(x-2)$.

Általában:

$f(x) = c(x-d_1)^{k_1}(x-d_2)^{k_2}\dots(x-d_m)^{k_m}$,
ahol a $d_1, \dots, d_m$ már páronként különbözők.

Definíció

A k_i a d_i gyök multiplicitása. Azaz d_i egy k_i-szoros gyök.

Gyök multiplicitása

Példa

$x^3 - 3x - 2 = (x+1)(x+1)(x-2) = (x+1)^2(x-2).$

Általában:

$f(x) = c(x-d_1)^{k_1}(x-d_2)^{k_2}\ldots(x-d_m)^{k_m}$,
ahol a $d_1, \ldots, d_m$ már páronként különbözők.

Definíció

A k_i a d_i gyök multiplicitása. Azaz d_i egy k_i-szoros gyök.

Következmény

$\mathrm{gr}(f) = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$,

Gyök multiplicitása

Példa

$x^3 - 3x - 2 = (x+1)(x+1)(x-2) = (x+1)^2(x-2).$

Általában:

$f(x) = c(x-d_1)^{k_1}(x-d_2)^{k_2} \dots (x-d_m)^{k_m}$,
ahol a $d_1, \dots, d_m$ már páronként különbözők.

Definíció

A k_i a d_i gyök multiplicitása. Azaz d_i egy k_i-szoros gyök.

Következmény

$\mathrm{gr}(f) = k_1 + k_2 + \dots + k_n$, azaz egy n-edfokú polinomnak multiplicitásokkal számolva n darab gyöke van.

Többszörös gyökök

Példa

$$f(x) = x^3 - 3x - 2 = (x+1)(x+1)(x-2) = (x+1)^2(x-2).$$

Többszörös gyökök

Példa

$f(x) = x^3 - 3x - 2 = (x+1)(x+1)(x-2) = (x+1)^2(x-2)$.
Legyen $g(x) = x - 2$.

Többszörös gyökök

Példa

$f(x) = x^3 - 3x - 2 = (x+1)(x+1)(x-2) = (x+1)^2(x-2)$.
Legyen $g(x) = x - 2$. Ekkor $g(-1) \neq 0$.

Többszörös gyökök

Példa

$f(x) = x^3 - 3x - 2 = (x+1)(x+1)(x-2) = (x+1)^2(x-2)$.
Legyen $g(x) = x - 2$. Ekkor $g(-1) \neq 0$.

Ezentúl $f^*(b)$ helyett $f(b)$

Többszörös gyökök

Példa

$f(x) = x^3 - 3x - 2 = (x+1)(x+1)(x-2) = (x+1)^2(x-2)$.
Legyen $g(x) = x - 2$. Ekkor $g(-1) \neq 0$.

Ezentúl $f^*(b)$ helyett $f(b)$ (de polinom $\neq$ polinomfüggvény).

Többszörös gyökök

Példa

$f(x) = x^3 - 3x - 2 = (x+1)(x+1)(x-2) = (x+1)^2(x-2)$.
Legyen $g(x) = x - 2$. Ekkor $g(-1) \neq 0$.

Ezentúl $f^*(b)$ helyett $f(b)$ (de polinom $\neq$ polinomfüggvény).

Pontosabb definíció

Az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak a $b \in \mathbb{C}$ szám *k-szoros gyöke*

Többszörös gyökök

Példa

$f(x) = x^3 - 3x - 2 = (x+1)(x+1)(x-2) = (x+1)^2(x-2)$.
Legyen $g(x) = x - 2$. Ekkor $g(-1) \neq 0$.

Ezentúl $f^*(b)$ helyett $f(b)$ (de polinom $\neq$ polinomfüggvény).

Pontosabb definíció

Az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak a $b \in \mathbb{C}$ szám k-szoros gyöke
(vagyis a b gyök multiplicitása k),

Többszörös gyökök

Példa

$f(x) = x^3 - 3x - 2 = (x+1)(x+1)(x-2) = (x+1)^2(x-2)$.
Legyen $g(x) = x - 2$. Ekkor $g(-1) \neq 0$.

Ezentúl $f^*(b)$ helyett $f(b)$ (de polinom $\neq$ polinomfüggvény).

Pontosabb definíció

Az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak a $b \in \mathbb{C}$ szám *k-szoros gyöke* (vagyis a b gyök multiplicitása k), ha $f(x) = (x-b)^k q(x)$,

Többszörös gyökök

Példa

$f(x) = x^3 - 3x - 2 = (x+1)(x+1)(x-2) = (x+1)^2(x-2)$.
Legyen $g(x) = x - 2$. Ekkor $g(-1) \neq 0$.

Ezentúl $f^*(b)$ helyett $f(b)$ (de polinom $\neq$ polinomfüggvény).

Pontosabb definíció

Az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak a $b \in \mathbb{C}$ szám *k-szoros gyöke* (vagyis a b gyök *multiplicitása* k), ha $f(x) = (x-b)^k q(x)$, ahol a $q \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak b már nem gyöke.

Többszörös gyökök

Példa

$f(x) = x^3 - 3x - 2 = (x+1)(x+1)(x-2) = (x+1)^2(x-2)$.
Legyen $g(x) = x - 2$. Ekkor $g(-1) \neq 0$.

Ezentúl $f^*(b)$ helyett $f(b)$ (de polinom $\neq$ polinomfüggvény).

Pontosabb definíció

Az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak a $b \in \mathbb{C}$ szám k-szoros gyöke (vagyis a b gyök multiplicitása k), ha $f(x) = (x-b)^k q(x)$, ahol a $q \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak b már nem gyöke.

Megjegyzés

A többszörös gyökök kényelmesen meghatározhatók a formális deriválás módszerével (Kiss-jegyzet, 3.6. szakasz).

Többszörös gyökök

Példa

$f(x) = x^3 - 3x - 2 = (x+1)(x+1)(x-2) = (x+1)^2(x-2)$.
Legyen $g(x) = x - 2$. Ekkor $g(-1) \neq 0$.

Ezentúl $f^*(b)$ helyett $f(b)$ (de polinom $\neq$ polinomfüggvény).

Pontosabb definíció

Az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak a $b \in \mathbb{C}$ szám k-szoros gyöke (vagyis a b gyök multiplicitása k), ha $f(x) = (x-b)^k q(x)$, ahol a $q \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak b már nem gyöke.

Megjegyzés

A többszörös gyökök kényelmesen meghatározhatók a formális deriválás módszerével (Kiss-jegyzet, 3.6. szakasz). Ez csak emelt szinten szerepel ebben a félévben.

A racionális gyökteszt

A racionális gyökteszt (Kiss-jegyzet, 3.3.9. Tétel)

$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ egész együtthatós polinom.

A racionális gyökteszt

A racionális gyökteszt (Kiss-jegyzet, 3.3.9. Tétel)

$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ egész együtthatós polinom.
Ha a p/q nem egyszerűsíthető tört gyöke f-nek, akkor

A racionális gyökteszt

A racionális gyökteszt (Kiss-jegyzet, 3.3.9. Tétel)

$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ egész együtthatós polinom.
Ha a p/q nem egyszerűsíthető tört gyöke f-nek, akkor
$p \mid a_0$

A racionális gyökteszt

A racionális gyökteszt (Kiss-jegyzet, 3.3.9. Tétel)

$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ egész együtthatós polinom.
Ha a p/q nem egyszerűsíthető tört gyöke f-nek, akkor
$p \mid a_0$ (a számláló osztja f konstans tagját),

A racionális gyökteszt

A racionális gyökteszt (Kiss-jegyzet, 3.3.9. Tétel)

$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ egész együtthatós polinom.
Ha a p/q nem egyszerűsíthető tört gyöke f-nek, akkor
$p \mid a_0$ (a számláló osztja f konstans tagját), és
$q \mid a_n$

A racionális gyökteszt

A racionális gyökteszt (Kiss-jegyzet, 3.3.9. Tétel)

$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ egész együtthatós polinom.
Ha a p/q nem egyszerűsíthető tört gyöke f-nek, akkor
$p \mid a_0$ (a számláló osztja f konstans tagját), és
$q \mid a_n$ (a nevező osztja f főegyütthatóját).

A racionális gyökteszt

A racionális gyökteszt (Kiss-jegyzet, 3.3.9. Tétel)

$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ egész együtthatós polinom.
Ha a p/q nem egyszerűsíthető tört gyöke f-nek, akkor
$p \mid a_0$ (a számláló osztja f konstans tagját), és
$q \mid a_n$ (a nevező osztja f főegyütthatóját).

Bizonyítás

$0 = f(p/q)$

A racionális gyökteszt

A racionális gyökteszt (Kiss-jegyzet, 3.3.9. Tétel)

$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ egész együtthatós polinom.
Ha a p/q nem egyszerűsíthető tört gyöke f-nek, akkor
$p \mid a_0$ (a számláló osztja f konstans tagját), és
$q \mid a_n$ (a nevező osztja f főegyütthatóját).

Bizonyítás

$$0 = f(p/q) = a_0 + a_1(p/q) + \ldots + a_{n-1}(p/q)^{n-1} + a_n(p/q)^n.$$

A racionális gyökteszt

A racionális gyökteszt (Kiss-jegyzet, 3.3.9. Tétel)

$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ egész együtthatós polinom.
Ha a p/q nem egyszerűsíthető tört gyöke f-nek, akkor
$p \mid a_0$ (a számláló osztja f konstans tagját), és
$q \mid a_n$ (a nevező osztja f főegyütthatóját).

Bizonyítás

$0 = f(p/q) = a_0 + a_1(p/q) + \ldots + a_{n-1}(p/q)^{n-1} + a_n(p/q)^n.$
q^n-nel szorozva

A racionális gyökteszt

A racionális gyökteszt (Kiss-jegyzet, 3.3.9. Tétel)

$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ egész együtthatós polinom.
Ha a p/q nem egyszerűsíthető tört gyöke f-nek, akkor
$p \mid a_0$ (a számláló osztja f konstans tagját), és
$q \mid a_n$ (a nevező osztja f főegyütthatóját).

Bizonyítás

$0 = f(p/q) = a_0 + a_1(p/q) + \ldots + a_{n-1}(p/q)^{n-1} + a_n(p/q)^n$.
q^n-nel szorozva $a_0 q^n + a_1 p q^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p^{n-1} q + a_n p^n = 0$.

A racionális gyökteszt

A racionális gyökteszt (Kiss-jegyzet, 3.3.9. Tétel)

$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ egész együtthatós polinom.
Ha a p/q nem egyszerűsíthető tört gyöke f-nek, akkor
$p \mid a_0$ (a számláló osztja f konstans tagját), és
$q \mid a_n$ (a nevező osztja f főegyütthatóját).

Bizonyítás

$0 = f(p/q) = a_0 + a_1(p/q) + \ldots + a_{n-1}(p/q)^{n-1} + a_n(p/q)^n$.
q^n-nel szorozva $a_0 q^n + a_1 p q^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p^{n-1} q + a_n p^n = 0$.
Mindegyik tag osztható p-vel, kivéve esetleg a legelsőt.

A racionális gyökteszt

A racionális gyökteszt (Kiss-jegyzet, 3.3.9. Tétel)

$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ egész együtthatós polinom.
Ha a p/q nem egyszerűsíthető tört gyöke f-nek, akkor
$p \mid a_0$ (a számláló osztja f konstans tagját), és
$q \mid a_n$ (a nevező osztja f főegyütthatóját).

Bizonyítás

$0 = f(p/q) = a_0 + a_1(p/q) + \ldots + a_{n-1}(p/q)^{n-1} + a_n(p/q)^n$.
q^n-nel szorozva $a_0 q^n + a_1 p q^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p^{n-1} q + a_n p^n = 0$.
Mindegyik tag osztható p-vel, kivéve esetleg a legelsőt.
Mivel $p \mid 0$, ezért a legelső tag is:

A racionális gyökteszt

A racionális gyökteszt (Kiss-jegyzet, 3.3.9. Tétel)

$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ egész együtthatós polinom.
Ha a p/q nem egyszerűsíthető tört gyöke f-nek, akkor
$p \mid a_0$ (a számláló osztja f konstans tagját), és
$q \mid a_n$ (a nevező osztja f főegyütthatóját).

Bizonyítás

$0 = f(p/q) = a_0 + a_1(p/q) + \ldots + a_{n-1}(p/q)^{n-1} + a_n(p/q)^n$.
q^n-nel szorozva $a_0 q^n + a_1 p q^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p^{n-1} q + a_n p^n = 0$.
Mindegyik tag osztható p-vel, kivéve esetleg a legelsőt.
Mivel $p \mid 0$, ezért a legelső tag is: $p \mid a_0 q^n$.

A racionális gyökteszt

A racionális gyökteszt (Kiss-jegyzet, 3.3.9. Tétel)

$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ egész együtthatós polinom.
Ha a p/q nem egyszerűsíthető tört gyöke f-nek, akkor
$p \mid a_0$ (a számláló osztja f konstans tagját), és
$q \mid a_n$ (a nevező osztja f főegyütthatóját).

Bizonyítás

$0 = f(p/q) = a_0 + a_1(p/q) + \ldots + a_{n-1}(p/q)^{n-1} + a_n(p/q)^n$.
q^n-nel szorozva $a_0 q^n + a_1 p q^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p^{n-1} q + a_n p^n = 0$.
Mindegyik tag osztható p-vel, kivéve esetleg a legelsőt.
Mivel $p \mid 0$, ezért a legelső tag is: $p \mid a_0 q^n$.
A p/q nem egyszerűsíthető, így p és q relatív prímek.

A racionális gyökteszt

A racionális gyökteszt (Kiss-jegyzet, 3.3.9. Tétel)

$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ egész együtthatós polinom.
Ha a p/q nem egyszerűsíthető tört gyöke f-nek, akkor
$p \mid a_0$ (a számláló osztja f konstans tagját), és
$q \mid a_n$ (a nevező osztja f főegyütthatóját).

Bizonyítás

$0 = f(p/q) = a_0 + a_1(p/q) + \ldots + a_{n-1}(p/q)^{n-1} + a_n(p/q)^n$.
q^n-nel szorozva $a_0 q^n + a_1 p q^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p^{n-1} q + a_n p^n = 0$.
Mindegyik tag osztható p-vel, kivéve esetleg a legelsőt.
Mivel $p \mid 0$, ezért a legelső tag is: $p \mid a_0 q^n$.
A p/q nem egyszerűsíthető, így p és q relatív prímek.
Tehát $p \mid a_0 q^n$-ből $p \mid a_0$ következik.

A racionális gyökteszt

A racionális gyökteszt (Kiss-jegyzet, 3.3.9. Tétel)

$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ egész együtthatós polinom.
Ha a p/q nem egyszerűsíthető tört gyöke f-nek, akkor
$p \mid a_0$ (a számláló osztja f konstans tagját), és
$q \mid a_n$ (a nevező osztja f főegyütthatóját).

Bizonyítás

$0 = f(p/q) = a_0 + a_1(p/q) + \ldots + a_{n-1}(p/q)^{n-1} + a_n(p/q)^n$.
q^n-nel szorozva $a_0q^n + a_1pq^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p^{n-1}q + a_np^n = 0$.
Mindegyik tag osztható p-vel, kivéve esetleg a legelsőt.
Mivel $p \mid 0$, ezért a legelső tag is: $p \mid a_0q^n$.
A p/q nem egyszerűsíthető, így p és q relatív prímek.
Tehát $p \mid a_0q^n$-ből $p \mid a_0$ következik.
Ugyanezzel a módszerrel kapjuk a $q \mid a_n$ oszthatóságot is.

Példa a racionális gyöktesztre

Példa

Határozzuk meg $f(x) = 4x^4 + 5x^2 + 4x^3 + 4x + 1$ gyökeit.

Példa a racionális gyöktesztre

Példa

Határozzuk meg $f(x) = 4x^4 + 5x^2 + 4x^3 + 4x + 1$ gyökeit.

Megoldás

Ha a p/q egyszerűsíthetetlen tört gyök, akkor

Példa a racionális gyöktesztre

Példa

Határozzuk meg $f(x) = 4x^4 + 5x^2 + 4x^3 + 4x + 1$ gyökeit.

Megoldás

Ha a p/q egyszerűsíthetetlen tört gyök, akkor $p \mid 1$

Példa a racionális gyöktesztre

Példa

Határozzuk meg $f(x) = 4x^4 + 5x^2 + 4x^3 + 4x + 1$ gyökeit.

Megoldás

Ha a p/q egyszerűsíthetetlen tört gyök, akkor $p \mid 1$ és $q \mid 4$.

Példa a racionális gyöktesztre

Példa

Határozzuk meg $f(x) = 4x^4 + 5x^2 + 4x^3 + 4x + 1$ gyökeit.

Megoldás

Ha a p/q egyszerűsíthetetlen tört gyök, akkor $p \mid 1$ és $q \mid 4$.
Ezért $p = \pm 1$

Példa a racionális gyöktesztre

Példa

Határozzuk meg $f(x) = 4x^4 + 5x^2 + 4x^3 + 4x + 1$ gyökeit.

Megoldás

Ha a p/q egyszerűsíthetetlen tört gyök, akkor $p \mid 1$ és $q \mid 4$.
Ezért $p = \pm 1$ és $q = \pm 1$,

Példa a racionális gyöktesztre

Példa

Határozzuk meg $f(x) = 4x^4 + 5x^2 + 4x^3 + 4x + 1$ gyökeit.

Megoldás

Ha a p/q egyszerűsíthetetlen tört gyök, akkor $p \mid 1$ és $q \mid 4$.
Ezért $p = \pm 1$ és $q = \pm 1, \ \pm 2,$

Példa a racionális gyöktesztre

Példa

Határozzuk meg $f(x) = 4x^4 + 5x^2 + 4x^3 + 4x + 1$ gyökeit.

Megoldás

Ha a p/q egyszerűsíthetetlen tört gyök, akkor $p \mid 1$ és $q \mid 4$.
Ezért $p = \pm 1$ és $q = \pm 1, \pm 2, \pm 4$.

Példa a racionális gyöktesztre

Példa

Határozzuk meg $f(x) = 4x^4 + 5x^2 + 4x^3 + 4x + 1$ gyökeit.

Megoldás

Ha a p/q egyszerűsíthetetlen tört gyök, akkor $p \mid 1$ és $q \mid 4$.
Ezért $p = \pm 1$ és $q = \pm 1, \ \pm 2, \ \pm 4$. Így $p/q = \pm 1, \pm 1/2, \pm 1/4$.

Példa a racionális gyöktesztre

Példa

Határozzuk meg $f(x) = 4x^4 + 5x^2 + 4x^3 + 4x + 1$ gyökeit.

Megoldás

Ha a p/q egyszerűsíthetetlen tört gyök, akkor $p \mid 1$ és $q \mid 4$.
Ezért $p = \pm 1$ és $q = \pm 1, \ \pm 2, \ \pm 4$. Így $p/q = \pm 1, \pm 1/2, \pm 1/4$.
Ezeket végigpróbálgatva kapjuk, hogy csak $-1/2$ jó.

Példa a racionális gyöktesztre

Példa

Határozzuk meg $f(x) = 4x^4 + 5x^2 + 4x^3 + 4x + 1$ gyökeit.

Megoldás

Ha a p/q egyszerűsíthetetlen tört gyök, akkor $p \mid 1$ és $q \mid 4$.
Ezért $p = \pm 1$ és $q = \pm 1, \pm 2, \pm 4$. Így $p/q = \pm 1, \pm 1/2, \pm 1/4$.
Ezeket végigpróbálgatva kapjuk, hogy csak $-1/2$ jó.
Hornerrel leosztva

Példa a racionális gyöktesztre

Példa

Határozzuk meg $f(x) = 4x^4 + 5x^2 + 4x^3 + 4x + 1$ gyökeit.

Megoldás

Ha a p/q egyszerűsíthetetlen tört gyök, akkor $p \mid 1$ és $q \mid 4$.
Ezért $p = \pm 1$ és $q = \pm 1, \pm 2, \pm 4$. Így $p/q = \pm 1, \pm 1/2, \pm 1/4$.
Ezeket végigpróbálgatva kapjuk, hogy csak $-1/2$ jó.
Hornerrel leosztva $f(x) = \big(x + (1/2)\big)$

Példa a racionális gyöktesztre

Példa

Határozzuk meg $f(x) = 4x^4 + 5x^2 + 4x^3 + 4x + 1$ gyökeit.

Megoldás

Ha a p/q egyszerűsíthetetlen tört gyök, akkor $p \mid 1$ és $q \mid 4$.
Ezért $p = \pm 1$ és $q = \pm 1, \ \pm 2, \ \pm 4$. Így $p/q = \pm 1, \pm 1/2, \pm 1/4$.
Ezeket végigpróbálgatva kapjuk, hogy csak $-1/2$ jó.
Hornerrel leosztva $f(x) = \big(x + (1/2)\big)(4x^3 + 2x^2 + 4x + 2)$.

Példa a racionális gyöktesztre

Példa

Határozzuk meg $f(x) = 4x^4 + 5x^2 + 4x^3 + 4x + 1$ gyökeit.

Megoldás

Ha a p/q egyszerűsíthetetlen tört gyök, akkor $p \mid 1$ és $q \mid 4$.
Ezért $p = \pm 1$ és $q = \pm 1, \ \pm 2, \ \pm 4$. Így $p/q = \pm 1, \pm 1/2, \pm 1/4$.
Ezeket végigpróbálgatva kapjuk, hogy csak $-1/2$ jó.
Hornerrel leosztva $f(x) = \big(x + (1/2)\big)(4x^3 + 2x^2 + 4x + 2)$.
Itt $4x^2 + 2x^2 + 4x + 2$-nek csak $-1/2$ lehet racionális gyöke.

Példa a racionális gyöktesztre

Példa

Határozzuk meg $f(x) = 4x^4 + 5x^2 + 4x^3 + 4x + 1$ gyökeit.

Megoldás

Ha a p/q egyszerűsíthetetlen tört gyök, akkor $p \mid 1$ és $q \mid 4$.
Ezért $p = \pm 1$ és $q = \pm 1, \pm 2, \pm 4$. Így $p/q = \pm 1, \pm 1/2, \pm 1/4$.
Ezeket végigpróbálgatva kapjuk, hogy csak $-1/2$ jó.
Hornerrel leosztva $f(x) = \big(x + (1/2)\big)(4x^3 + 2x^2 + 4x + 2)$.
Itt $4x^2 + 2x^2 + 4x + 2$-nek csak $-1/2$ lehet racionális gyöke.

Ez tényleg gyök:

Példa a racionális gyöktesztre

Példa

Határozzuk meg $f(x) = 4x^4 + 5x^2 + 4x^3 + 4x + 1$ gyökeit.

Megoldás

Ha a p/q egyszerűsíthetetlen tört gyök, akkor $p \mid 1$ és $q \mid 4$.
Ezért $p = \pm 1$ és $q = \pm 1, \ \pm 2, \ \pm 4$. Így $p/q = \pm 1, \pm 1/2, \pm 1/4$.
Ezeket végigpróbálgatva kapjuk, hogy csak $-1/2$ jó.
Hornerrel leosztva $f(x) = \big(x + (1/2)\big)(4x^3 + 2x^2 + 4x + 2)$.
Itt $4x^2 + 2x^2 + 4x + 2$-nek csak $-1/2$ lehet racionális gyöke.
Ez tényleg gyök: $f(x) = \big(x + (1/2)\big)^2$

Példa a racionális gyöktesztre

Példa

Határozzuk meg $f(x) = 4x^4 + 5x^2 + 4x^3 + 4x + 1$ gyökeit.

Megoldás

Ha a p/q egyszerűsíthetetlen tört gyök, akkor $p \mid 1$ és $q \mid 4$.
Ezért $p = \pm 1$ és $q = \pm 1, \pm 2, \pm 4$. Így $p/q = \pm 1, \pm 1/2, \pm 1/4$.
Ezeket végigpróbálgatva kapjuk, hogy csak $-1/2$ jó.
Hornerrel leosztva $f(x) = \big(x + (1/2)\big)(4x^3 + 2x^2 + 4x + 2)$.
Itt $4x^2 + 2x^2 + 4x + 2$-nek csak $-1/2$ lehet racionális gyöke.
Ez tényleg gyök: $f(x) = \big(x + (1/2)\big)^2 (4x^2 + 4)$.

Példa a racionális gyöktesztre

Példa

Határozzuk meg $f(x) = 4x^4 + 5x^2 + 4x^3 + 4x + 1$ gyökeit.

Megoldás

Ha a p/q egyszerűsíthetetlen tört gyök, akkor $p \mid 1$ és $q \mid 4$.
Ezért $p = \pm 1$ és $q = \pm 1, \ \pm 2, \ \pm 4$. Így $p/q = \pm 1, \pm 1/2, \pm 1/4$.
Ezeket végigpróbálgatva kapjuk, hogy csak $-1/2$ jó.
Hornerrel leosztva $f(x) = \big(x + (1/2)\big)(4x^3 + 2x^2 + 4x + 2)$.
Itt $4x^2 + 2x^2 + 4x + 2$-nek csak $-1/2$ lehet racionális gyöke.
Ez tényleg gyök: $f(x) = \big(x + (1/2)\big)^2 (4x^2 + 4)$.
Itt $4x^2 + 4 = 4(x^2 + 1) = 4(x + i)(x - i)$.

Példa a racionális gyöktesztre

Példa

Határozzuk meg $f(x) = 4x^4 + 5x^2 + 4x^3 + 4x + 1$ gyökeit.

Megoldás

Ha a p/q egyszerűsíthetetlen tört gyök, akkor $p \mid 1$ és $q \mid 4$.
Ezért $p = \pm 1$ és $q = \pm 1, \ \pm 2, \ \pm 4$. Így $p/q = \pm 1, \pm 1/2, \pm 1/4$.
Ezeket végigpróbálgatva kapjuk, hogy csak $-1/2$ jó.
Hornerrel leosztva $f(x) = \big(x + (1/2)\big)(4x^3 + 2x^2 + 4x + 2)$.
Itt $4x^2 + 2x^2 + 4x + 2$-nek csak $-1/2$ lehet racionális gyöke.
Ez tényleg gyök: $f(x) = \big(x + (1/2)\big)^2 (4x^2 + 4)$.
Itt $4x^2 + 4 = 4(x^2 + 1) = 4(x + i)(x - i)$.
Tehát f gyökei:

Példa a racionális gyöktesztre

Példa

Határozzuk meg $f(x) = 4x^4 + 5x^2 + 4x^3 + 4x + 1$ gyökeit.

Megoldás

Ha a p/q egyszerűsíthetetlen tört gyök, akkor $p \mid 1$ és $q \mid 4$.
Ezért $p = \pm 1$ és $q = \pm 1, \ \pm 2, \ \pm 4$. Így $p/q = \pm 1, \pm 1/2, \pm 1/4$.
Ezeket végigpróbálgatva kapjuk, hogy csak $-1/2$ jó.
Hornerrel leosztva $f(x) = \big(x + (1/2)\big)(4x^3 + 2x^2 + 4x + 2)$.
Itt $4x^2 + 2x^2 + 4x + 2$-nek csak $-1/2$ lehet racionális gyöke.
Ez tényleg gyök: $f(x) = \big(x + (1/2)\big)^2(4x^2 + 4)$.
Itt $4x^2 + 4 = 4(x^2 + 1) = 4(x + i)(x - i)$.
Tehát f gyökei: $-1/2$

Példa a racionális gyöktesztre

Példa

Határozzuk meg $f(x) = 4x^4 + 5x^2 + 4x^3 + 4x + 1$ gyökeit.

Megoldás

Ha a p/q egyszerűsíthetetlen tört gyök, akkor $p \mid 1$ és $q \mid 4$.
Ezért $p = \pm 1$ és $q = \pm 1, \ \pm 2, \ \pm 4$. Így $p/q = \pm 1, \pm 1/2, \pm 1/4$.
Ezeket végigpróbálgatva kapjuk, hogy csak $-1/2$ jó.
Hornerrel leosztva $f(x) = \big(x + (1/2)\big)(4x^3 + 2x^2 + 4x + 2)$.
Itt $4x^2 + 2x^2 + 4x + 2$-nek csak $-1/2$ lehet racionális gyöke.
Ez tényleg gyök: $f(x) = \big(x + (1/2)\big)^2(4x^2 + 4)$.
Itt $4x^2 + 4 = 4(x^2 + 1) = 4(x + i)(x - i)$.
Tehát f gyökei: $-1/2$ (kétszeres),

Példa a racionális gyöktesztre

Példa

Határozzuk meg $f(x) = 4x^4 + 5x^2 + 4x^3 + 4x + 1$ gyökeit.

Megoldás

Ha a p/q egyszerűsíthetetlen tört gyök, akkor $p \mid 1$ és $q \mid 4$.
Ezért $p = \pm 1$ és $q = \pm 1, \ \pm 2, \ \pm 4$. Így $p/q = \pm 1, \pm 1/2, \pm 1/4$.
Ezeket végigpróbálgatva kapjuk, hogy csak $-1/2$ jó.
Hornerrel leosztva $f(x) = \big(x + (1/2)\big)(4x^3 + 2x^2 + 4x + 2)$.
Itt $4x^2 + 2x^2 + 4x + 2$-nek csak $-1/2$ lehet racionális gyöke.
Ez tényleg gyök: $f(x) = \big(x + (1/2)\big)^2 (4x^2 + 4)$.
Itt $4x^2 + 4 = 4(x^2 + 1) = 4(x + i)(x - i)$.
Tehát f gyökei: $-1/2$ (kétszeres), i

Példa a racionális gyöktesztre

Példa

Határozzuk meg $f(x) = 4x^4 + 5x^2 + 4x^3 + 4x + 1$ gyökeit.

Megoldás

Ha a p/q egyszerűsíthetetlen tört gyök, akkor $p \mid 1$ és $q \mid 4$.
Ezért $p = \pm 1$ és $q = \pm 1, \ \pm 2, \ \pm 4$. Így $p/q = \pm 1, \pm 1/2, \pm 1/4$.
Ezeket végigpróbálgatva kapjuk, hogy csak $-1/2$ jó.
Hornerrel leosztva $f(x) = \big(x + (1/2)\big)(4x^3 + 2x^2 + 4x + 2)$.
Itt $4x^2 + 2x^2 + 4x + 2$-nek csak $-1/2$ lehet racionális gyöke.
Ez tényleg gyök: $f(x) = \big(x + (1/2)\big)^2 (4x^2 + 4)$.
Itt $4x^2 + 4 = 4(x^2 + 1) = 4(x + i)(x - i)$.
Tehát f gyökei: $-1/2$ (kétszeres), i és $-i$.

Példa a racionális gyöktesztre

Példa

Határozzuk meg $f(x) = 4x^4 + 5x^2 + 4x^3 + 4x + 1$ gyökeit.

Megoldás

Ha a p/q egyszerűsíthetetlen tört gyök, akkor $p \mid 1$ és $q \mid 4$.
Ezért $p = \pm 1$ és $q = \pm 1, \ \pm 2, \ \pm 4$. Így $p/q = \pm 1, \pm 1/2, \pm 1/4$.
Ezeket végigpróbálgatva kapjuk, hogy csak $-1/2$ jó.
Hornerrel leosztva $f(x) = \big(x + (1/2)\big)(4x^3 + 2x^2 + 4x + 2)$.
Itt $4x^2 + 2x^2 + 4x + 2$-nek csak $-1/2$ lehet racionális gyöke.
Ez tényleg gyök: $f(x) = \big(x + (1/2)\big)^2(4x^2 + 4)$.
Itt $4x^2 + 4 = 4(x^2 + 1) = 4(x + i)(x - i)$.
Tehát f gyökei: $-1/2$ (kétszeres), i és $-i$.
Gyöktényezős alakja $f(x) = 4\big(x + (1/2)\big)^2(x + i)(x - i)$.

Példa a racionális gyöktesztre

Példa

Határozzuk meg $f(x) = 4x^4 + 5x^2 + 4x^3 + 4x + 1$ gyökeit.

Megoldás

Ha a p/q egyszerűsíthetetlen tört gyök, akkor $p \mid 1$ és $q \mid 4$.
Ezért $p = \pm 1$ és $q = \pm 1, \ \pm 2, \ \pm 4$. Így $p/q = \pm 1, \pm 1/2, \pm 1/4$.
Ezeket végigpróbálgatva kapjuk, hogy csak $-1/2$ jó.
Hornerrel leosztva $f(x) = \big(x + (1/2)\big)(4x^3 + 2x^2 + 4x + 2)$.
Itt $4x^2 + 2x^2 + 4x + 2$-nek csak $-1/2$ lehet racionális gyöke.
Ez tényleg gyök: $f(x) = \big(x + (1/2)\big)^2 (4x^2 + 4)$.
Itt $4x^2 + 4 = 4(x^2 + 1) = 4(x + i)(x - i)$.
Tehát f gyökei: $-1/2$ (kétszeres), i és $-i$.
Gyöktényezős alakja $f(x) = 4\big(x + (1/2)\big)^2 (x + i)(x - i)$.
Azaz $f(x) = (2x + 1)^2 (x + i)(x - i)$.