Algebra1, alapszint

ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Előadó: Kiss Emil
ewkiss@cs.elte.hu

4. előadás

A hatványok periódikusan ismétlődnek

Tétel

Legyen $0 \neq z \in \mathbb{C}$.

A hatványok periódikusan ismétlődnek

Tétel

Legyen $0 \neq z \in \mathbb{C}$. Ha z egységgyök, akkor hatványai periódikusan ismétlődnek.

A hatványok periódikusan ismétlődnek

Tétel

Legyen $0 \neq z \in \mathbb{C}$. Ha z egységgyök, akkor hatványai periódikusan ismétlődnek. Ha z nem egységgyök, akkor bármely két, egész kitevőjű hatványa különböző.

A hatványok periódikusan ismétlődnek

Tétel

Legyen $0 \neq z \in \mathbb{C}$. Ha z egységgyök, akkor hatványai periódikusan ismétlődnek. Ha z nem egységgyök, akkor bármely két, egész kitevőjű hatványa különböző.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $z^k = z^\ell$, de $k \neq \ell$.

A hatványok periódikusan ismétlődnek

Tétel

Legyen $0 \neq z \in \mathbb{C}$. Ha z egységgyök, akkor hatványai periódikusan ismétlődnek. Ha z nem egységgyök, akkor bármely két, egész kitevőjű hatványa különböző.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $z^k = z^\ell$, de $k \neq \ell$. Ekkor $z^{k-\ell} = z^{\ell-k} = 1$. Így:

A hatványok periódikusan ismétlődnek

Tétel

Legyen $0 \neq z \in \mathbb{C}$. Ha z egységgyök, akkor hatványai periódikusan ismétlődnek. Ha z nem egységgyök, akkor bármely két, egész kitevőjű hatványa különböző.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $z^k = z^\ell$, de $k \neq \ell$. Ekkor $z^{k-\ell} = z^{\ell-k} = 1$. Így:

Definíció

Az n egész szám jó kitevője a z komplex számnak, ha $z^n = 1$.

A hatványok periódikusan ismétlődnek

Tétel

Legyen $0 \neq z \in \mathbb{C}$. Ha z egységgyök, akkor hatványai periódikusan ismétlődnek. Ha z nem egységgyök, akkor bármely két, egész kitevőjű hatványa különböző.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $z^k = z^\ell$, de $k \neq \ell$. Ekkor $z^{k-\ell} = z^{\ell-k} = 1$. Így:

Definíció

Az n egész szám **jó kitevője** a z komplex számnak, ha $z^n = 1$.

Mivel a $k - \ell$ és $\ell - k$ jó kitevők egyike pozitív,

A hatványok periódikusan ismétlődnek

Tétel

Legyen $0 \neq z \in \mathbb{C}$. Ha z egységgyök, akkor hatványai periódikusan ismétlődnek. Ha z nem egységgyök, akkor bármely két, egész kitevőjű hatványa különböző.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $z^k = z^\ell$, de $k \neq \ell$. Ekkor $z^{k-\ell} = z^{\ell-k} = 1$. Így:

Definíció

Az n egész szám **jó kitevője** a z komplex számnak, ha $z^n = 1$.

Mivel a $k - \ell$ és $\ell - k$ jó kitevők egyike pozitív, ezért z-nek van pozitív jó kitevője.

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás

Legyen n jó kitevő.

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás

Legyen n jó kitevő. Osszuk el n-et maradékosan d-vel:

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás

Legyen n jó kitevő. Osszuk el n-et maradékosan d-vel:
$n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$.

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás

Legyen n jó kitevő. Osszuk el n-et maradékosan d-vel:
$n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$. Ekkor
$1 = z^n$

mert n jó kitevő

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás

Legyen n jó kitevő. Osszuk el n-et maradékosan d-vel:
$n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$. Ekkor
$1 = z^n = z^{dq+r}$

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás

Legyen n jó kitevő. Osszuk el n-et maradékosan d-vel:
$n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$. Ekkor
$1 = z^n = z^{dq+r} = (z^d)^q z^r$

a hatványozás azonosságai miatt

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás

Legyen n jó kitevő. Osszuk el n-et maradékosan d-vel:
$n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$. Ekkor
$1 = z^n = z^{dq+r} = (z^d)^q z^r = 1^q z^r$

$z^d = 1$, mert d jó kitevő

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás

Legyen n jó kitevő. Osszuk el n-et maradékosan d-vel:
$n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$. Ekkor
$1 = z^n = z^{dq+r} = (z^d)^q z^r = 1^q z^r = z^r$.

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás

Legyen n jó kitevő. Osszuk el n-et maradékosan d-vel:
$n = dq + r$, ahol $0 \le r < d$. Ekkor
$1 = z^n = z^{dq+r} = (z^d)^q z^r = 1^q z^r = z^r$.
Tehát r is jó kitevő.

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás

Legyen n jó kitevő. Osszuk el n-et maradékosan d-vel:
$n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$. Ekkor
$1 = z^n = z^{dq+r} = (z^d)^q z^r = 1^q z^r = z^r$.
Tehát r is jó kitevő. A d a legkisebb pozitív jó kitevő.

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás

Legyen n jó kitevő. Osszuk el n-et maradékosan d-vel:
$n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$. Ekkor
$1 = z^n = z^{dq+r} = (z^d)^q z^r = 1^q z^r = z^r$.
Tehát r is jó kitevő. A d a legkisebb pozitív jó kitevő.
Mivel $r < d$, ezért r nem lehet pozitív.

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás

Legyen n jó kitevő. Osszuk el n-et maradékosan d-vel:
$n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$. Ekkor
$1 = z^n = z^{dq+r} = (z^d)^q z^r = 1^q z^r = z^r$.
Tehát r is jó kitevő. A d a legkisebb pozitív jó kitevő.
Mivel $r < d$, ezért r nem lehet pozitív. Tehát $r = 0$.

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás

Legyen n jó kitevő. Osszuk el n-et maradékosan d-vel:
$n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$. Ekkor
$1 = z^n = z^{dq+r} = (z^d)^q z^r = 1^q z^r = z^r$.
Tehát r is jó kitevő. A d a legkisebb pozitív jó kitevő.
Mivel $r < d$, ezért r nem lehet pozitív. Tehát $r = 0$.
De akkor $n = dq + r = dq$,

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás

Legyen n jó kitevő. Osszuk el n-et maradékosan d-vel:
$n = dq + r$, ahol $0 \le r < d$. Ekkor
$1 = z^n = z^{dq+r} = (z^d)^q z^r = 1^q z^r = z^r$.
Tehát r is jó kitevő. A d a legkisebb pozitív jó kitevő.
Mivel $r < d$, ezért r nem lehet pozitív. Tehát $r = 0$.
De akkor $n = dq + r = dq$, azaz n többszöröse d-nek.

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás

Legyen n jó kitevő. Osszuk el n-et maradékosan d-vel:
$n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$. Ekkor
$1 = z^n = z^{dq+r} = (z^d)^q z^r = 1^q z^r = z^r$.
Tehát r is jó kitevő. A d a legkisebb pozitív jó kitevő.
Mivel $r < d$, ezért r nem lehet pozitív. Tehát $r = 0$.
De akkor $n = dq + r = dq$, azaz n többszöröse d-nek.
Megfordítva, ha n többszöröse d-nek,

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás

Legyen n jó kitevő. Osszuk el n-et maradékosan d-vel:
$n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$. Ekkor
$1 = z^n = z^{dq+r} = (z^d)^q z^r = 1^q z^r = z^r$.
Tehát r is jó kitevő. A d a legkisebb pozitív jó kitevő.
Mivel $r < d$, ezért r nem lehet pozitív. Tehát $r = 0$.
De akkor $n = dq + r = dq$, azaz n többszöröse d-nek.
Megfordítva, ha n többszöröse d-nek, azaz $n = dq$,

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás

Legyen n jó kitevő. Osszuk el n-et maradékosan d-vel:
$n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$. Ekkor
$1 = z^n = z^{dq+r} = (z^d)^q z^r = 1^q z^r = z^r$.
Tehát r is jó kitevő. A d a legkisebb pozitív jó kitevő.
Mivel $r < d$, ezért r nem lehet pozitív. Tehát $r = 0$.
De akkor $n = dq + r = dq$, azaz n többszöröse d-nek.
Megfordítva, ha n többszöröse d-nek, azaz $n = dq$,
akkor $z^n = z^{dq}$

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás

Legyen n jó kitevő. Osszuk el n-et maradékosan d-vel:
$n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$. Ekkor
$1 = z^n = z^{dq+r} = (z^d)^q z^r = 1^q z^r = z^r$.
Tehát r is jó kitevő. A d a legkisebb pozitív jó kitevő.
Mivel $r < d$, ezért r nem lehet pozitív. Tehát $r = 0$.
De akkor $n = dq + r = dq$, azaz n többszöröse d-nek.
Megfordítva, ha n többszöröse d-nek, azaz $n = dq$,
akkor $z^n = z^{dq} = (z^d)^q$

a hatványozás azonosságai miatt

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás

Legyen n jó kitevő. Osszuk el n-et maradékosan d-vel:
$n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$. Ekkor
$1 = z^n = z^{dq+r} = (z^d)^q z^r = 1^q z^r = z^r$.
Tehát r is jó kitevő. A d a legkisebb pozitív jó kitevő.
Mivel $r < d$, ezért r nem lehet pozitív. Tehát $r = 0$.
De akkor $n = dq + r = dq$, azaz n többszöröse d-nek.
Megfordítva, ha n többszöröse d-nek, azaz $n = dq$,
akkor $z^n = z^{dq} = (z^d)^q = 1^q = 1$,

$z^d = 1$, mert d jó kitevő

A jó kitevők tulajdonságai

Lemma

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Bizonyítás

Legyen n jó kitevő. Osszuk el n-et maradékosan d-vel:
$n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$. Ekkor
$1 = z^n = z^{dq+r} = (z^d)^q z^r = 1^q z^r = z^r$.
Tehát r is jó kitevő. A d a legkisebb pozitív jó kitevő.
Mivel $r < d$, ezért r nem lehet pozitív. Tehát $r = 0$.
De akkor $n = dq + r = dq$, azaz n többszöröse d-nek.
Megfordítva, ha n többszöröse d-nek, azaz $n = dq$,
akkor $z^n = z^{dq} = (z^d)^q = 1^q = 1$, azaz n jó kitevő. $\square$

A tétel bizonyításának vége

Beláttuk:

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

A tétel bizonyításának vége

Beláttuk:

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Következmények:

$$z^k = z^\ell \iff z^{k-\ell} = 1$$

A tétel bizonyításának vége

Beláttuk:

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Következmények:

$$z^k = z^\ell \iff z^{k-\ell} = 1 \iff d \mid k - \ell .$$

A tétel bizonyításának vége

Beláttuk:

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Következmények:

$z^k = z^\ell \iff z^{k-\ell} = 1 \iff d \mid k - \ell$.
Ezért $1 = z^0 = z^d, z^1, \ldots, z^{d-1}$ páronként különböző.

A tétel bizonyításának vége

Beláttuk:

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Következmények:

$z^k = z^\ell \iff z^{k-\ell} = 1 \iff d \mid k - \ell$.
Ezért $1 = z^0 = z^d, z^1, \ldots, z^{d-1}$ páronként különböző.
Ezek z összes hatványai, mert

A tétel bizonyításának vége

Beláttuk:

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Következmények:

$z^k = z^\ell \iff z^{k-\ell} = 1 \iff d \mid k - \ell$.
Ezért $1 = z^0 = z^d, z^1, \ldots, z^{d-1}$ páronként különböző.
Ezek z összes hatványai, mert ha n tetszőleges egész, akkor $n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$,

A tétel bizonyításának vége

Beláttuk:

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Következmények:

$z^k = z^\ell \iff z^{k-\ell} = 1 \iff d \mid k - \ell$.
Ezért $1 = z^0 = z^d, z^1, \ldots, z^{d-1}$ páronként különböző.
Ezek z összes hatványai, mert ha n tetszőleges egész, akkor $n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$, és $d \mid n - r$ miatt $z^n = z^r$.

A tétel bizonyításának vége

Beláttuk:

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Következmények:

$z^k = z^\ell \iff z^{k-\ell} = 1 \iff d \mid k - \ell$.
Ezért $1 = z^0 = z^d, z^1, \ldots, z^{d-1}$ páronként különböző.
Ezek z összes hatványai, mert ha n tetszőleges egész, akkor $n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$, és $d \mid n - r$ miatt $z^n = z^r$.
(Így z^n csak az n-nek a d-vel való osztási maradékától függ.)

A tétel bizonyításának vége

Beláttuk:

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Következmények:

$z^k = z^\ell \iff z^{k-\ell} = 1 \iff d \mid k - \ell$.
Ezért $1 = z^0 = z^d, z^1, \ldots, z^{d-1}$ páronként különböző.
Ezek z összes hatványai, mert ha n tetszőleges egész, akkor $n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$, és $d \mid n - r$ miatt $z^n = z^r$.
(Így z^n csak az n-nek a d-vel való osztási maradékától függ.)
Tehát z különböző hatványainak a száma d.

A tétel bizonyításának vége

Beláttuk:

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Következmények:

$z^k = z^\ell \iff z^{k-\ell} = 1 \iff d \mid k - \ell$.
Ezért $1 = z^0 = z^d, z^1, \ldots, z^{d-1}$ páronként különböző.
Ezek z összes hatványai, mert ha n tetszőleges egész, akkor $n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$, és $d \mid n - r$ miatt $z^n = z^r$.
(Így z^n csak az n-nek a d-vel való osztási maradékától függ.)
Tehát z különböző hatványainak a száma d.
Azaz z rendje d,

A tétel bizonyításának vége

Beláttuk:

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Következmények:

$z^k = z^\ell \iff z^{k-\ell} = 1 \iff d \mid k - \ell$.
Ezért $1 = z^0 = z^d, z^1, \ldots, z^{d-1}$ páronként különböző.
Ezek z összes hatványai, mert ha n tetszőleges egész, akkor $n = dq + r$, ahol $0 \le r < d$, és $d \mid n - r$ miatt $z^n = z^r$.
(Így z^n csak az n-nek a d-vel való osztási maradékától függ.)
Tehát z különböző hatványainak a száma d.
Azaz z rendje d, és a hatványok periódikusan ismétlődnek.

A tétel bizonyításának vége

Beláttuk:

Legyen d a z legkisebb pozitív jó kitevője.
Ekkor a jó kitevők pontosan a d többszörösei.

Következmények:

$z^k = z^\ell \iff z^{k-\ell} = 1 \iff d \mid k - \ell$.
Ezért $1 = z^0 = z^d, z^1, \ldots, z^{d-1}$ páronként különböző.
Ezek z összes hatványai, mert ha n tetszőleges egész, akkor $n = dq + r$, ahol $0 \leq r < d$, és $d \mid n - r$ miatt $z^n = z^r$.
(Így z^n csak az n-nek a d-vel való osztási maradékától függ.)
Tehát z különböző hatványainak a száma d.
Azaz z rendje d, és a hatványok periódikusan ismétlődnek.
Ezzel a tételt beláttuk. $\square$

A rend tulajdonságainak összefoglalása

Összefoglalás

Legyen z nem nulla komplex szám.

- A z egységgyök, ha $z^m = 1$ alkalmas $m > 0$ egészre.

A rend tulajdonságainak összefoglalása

Összefoglalás

Legyen z nem nulla komplex szám.

- A z egységgyök, ha $z^m = 1$ alkalmas $m > 0$ egészre.
- A z pontosan akkor egységgyök, ha hossza 1, szöge 2π-nek racionális többszöröse.

A rend tulajdonságainak összefoglalása

Összefoglalás

Legyen z nem nulla komplex szám.

- A z egységgyök, ha $z^m = 1$ alkalmas $m > 0$ egészre.
- A z pontosan akkor egységgyök, ha hossza 1, szöge 2π-nek racionális többszöröse.
- Ha z nem egységgyök, akkor bármely két egész kitevőjű hatványa különböző. Ilyenkor z rendje ∞.

A rend tulajdonságainak összefoglalása

Összefoglalás

Legyen z nem nulla komplex szám.

- A z egységgyök, ha $z^m = 1$ alkalmas $m > 0$ egészre.
- A z pontosan akkor egységgyök, ha hossza 1, szöge 2π-nek racionális többszöröse.
- Ha z nem egységgyök, akkor bármely két egész kitevőjű hatványa különböző. Ilyenkor z rendje ∞.
- Ha z egységgyök, akkor a hatványai periódikusan ismétlődnek. A periódus hossza z rendje, jele $o(z)$.

A rend tulajdonságainak összefoglalása

Összefoglalás

Legyen z nem nulla komplex szám.

- A z egységgyök, ha $z^m = 1$ alkalmas $m > 0$ egészre.
- A z pontosan akkor egységgyök, ha hossza 1, szöge 2π-nek racionális többszöröse.
- Ha z nem egységgyök, akkor bármely két egész kitevőjű hatványa különböző. Ilyenkor z rendje ∞.
- Ha z egységgyök, akkor a hatványai periódikusan ismétlődnek. A periódus hossza z rendje, jele $o(z)$.
- $z^k = z^\ell \iff o(z) \mid k - \ell$. Így $z^n = 1 \iff o(z) \mid n$.

A rend tulajdonságainak összefoglalása

Összefoglalás

Legyen z nem nulla komplex szám.

- A z egységgyök, ha $z^m = 1$ alkalmas $m > 0$ egészre.
- A z pontosan akkor egységgyök, ha hossza 1, szöge 2π-nek racionális többszöröse.
- Ha z nem egységgyök, akkor bármely két egész kitevőjű hatványa különböző. Ilyenkor z rendje ∞.
- Ha z egységgyök, akkor a hatványai periódikusan ismétlődnek. A periódus hossza z rendje, jele $o(z)$.
- $z^k = z^\ell \iff o(z) \mid k - \ell$. Így $z^n = 1 \iff o(z) \mid n$.
- A z jó kitevői azok az n egészek, melyekre $z^n = 1$.

A rend tulajdonságainak összefoglalása

Összefoglalás

Legyen z nem nulla komplex szám.

- A z egységgyök, ha $z^m = 1$ alkalmas $m > 0$ egészre.
- A z pontosan akkor egységgyök, ha hossza 1, szöge 2π-nek racionális többszöröse.
- Ha z nem egységgyök, akkor bármely két egész kitevőjű hatványa különböző. Ilyenkor z rendje ∞.
- Ha z egységgyök, akkor a hatványai periódikusan ismétlődnek. A periódus hossza z rendje, jele $o(z)$.
- $z^k = z^\ell \iff o(z) \mid k - \ell$. Így $z^n = 1 \iff o(z) \mid n$.
- A z jó kitevői azok az n egészek, melyekre $z^n = 1$.
- A z rendje a legkisebb pozitív jó kitevője. A jó kitevők pontosan a rend többszörösei.

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt?

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1				
2				
3				
4				
5				
k				

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0			
2				
3				
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1			
2				
3				
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2			
2				
3				
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3			
2				
3				
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4			
2				
3				
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5			
2				
3				
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0			
2				
3				
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6		
2				
3				
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	
2				
3				
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2				
3				
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0			
3				
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2			
3				
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4			
3				
4				
5				
k				

0123<u>4</u>50

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0			
3				
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3		
3				
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	
3				
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3				
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0			
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3			
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos *n*-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál *k* csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0			
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2		
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4				
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0			
5				
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0-4			
5				
k				

0123<u>4</u>50

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0-4-2			
5				
k				

0123450123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0-4-2-0			
5				
k				

0123450123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0-4-2-0	3		
5				
k				

0123450123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0-4-2-0	3	2	
5				
k				

0123450123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos *n*-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál *k* csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0-4-2-0	3	2	3
5				
k				

0123450123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0-4-2-0	3	2	3
5	0			
k				

0123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0-4-2-0	3	2	3
5	0-5			
k				

01234<u>5</u>0

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos *n*-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál *k* csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0-4-2-0	3	2	3
5	0-5-4			
k				

0123450123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos *n*-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál *k* csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0-4-2-0	3	2	3
5	0-5-4-3			
k				

012345012345012345<u>3</u>450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0-4-2-0	3	2	3
5	0-5-4-3-2			
k				

0123450123450123450123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0-4-2-0	3	2	3
5	0-5-4-3-2-1			
k				

0123450123450123450123450123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0-4-2-0	3	2	3
5	0-5-4-3-2-1-0			
k				

0123450123450123450123450123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0-4-2-0	3	2	3
5	0-5-4-3-2-1-0	6		
k				

0123450123450123450123450123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0-4-2-0	3	2	3
5	0-5-4-3-2-1-0	6	5	
k				

0123450123450123450123450123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0-4-2-0	3	2	3
5	0-5-4-3-2-1-0	6	5	6
k				

0123450123450123450123450123450

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos *n*-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál *k* csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0-4-2-0	3	2	3
5	0-5-4-3-2-1-0	6	5	6
k		$n/(n, k)$		

Az (n, k) legnagyobb közös osztót jelöl.

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0-4-2-0	3	2	3
5	0-5-4-3-2-1-0	6	5	6
k		$n/(n,k)$		$n/(n,k)$

Az (n, k) legnagyobb közös osztót jelöl.

A bolhás feladat

Egy bolha ugrál körbe egy szabályos n-szög csúcsain úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit jut előre.
Hány ugrás után jut vissza a kiindulóponthoz?
Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?

Legyen $n = 6$, a csúcsokat számozzuk így: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

k	bejárás	ugrásszám	körszám	csúcsszám
1	0-1-2-3-4-5-0	6	1	6
2	0-2-4-0	3	1	3
3	0-3-0	2	1	2
4	0-4-2-0	3	2	3
5	0-5-4-3-2-1-0	6	5	6
k		$n/(n,k)$	$k/(n,k)$	$n/(n,k)$

Az (n, k) legnagyobb közös osztót jelöl.

A bolhás feladat megoldása

Az (n, k) legnagyobb közös osztót jelöl.

A bolha k-asával ugrál:

A bolhás feladat megoldása

Az (n, k) legnagyobb közös osztót jelöl.

A bolha k-asával ugrál: m ugrás után a km-edik csúcson lesz.

A bolhás feladat megoldása

Az (n, k) legnagyobb közös osztót jelöl.

A bolha k-asával ugrál: m ugrás után a km-edik csúcson lesz.
Ez akkor a kiindulópont, ha $n \mid km$.

A bolhás feladat megoldása

Az (n, k) legnagyobb közös osztót jelöl.

A bolha k-asával ugrál: m ugrás után a km-edik csúcson lesz. Ez akkor a kiindulópont, ha $n \mid km$. A legkisebb ilyen m kell.

A bolhás feladat megoldása

Az (n, k) legnagyobb közös osztót jelöl.

A bolha k-asával ugrál: m ugrás után a km-edik csúcson lesz. Ez akkor a kiindulópont, ha $n \mid km$. A legkisebb ilyen m kell.

$$n \mid km \iff \frac{n}{(n,k)} \,\Big|\, \frac{k}{(n,k)} m$$

A bolhás feladat megoldása

Az (n, k) legnagyobb közös osztót jelöl.

A bolha k-asával ugrál: m ugrás után a km-edik csúcson lesz. Ez akkor a kiindulópont, ha $n \mid km$. A legkisebb ilyen m kell.

$$n \mid km \iff \frac{n}{(n,k)} \,\Bigg|\, \frac{k}{(n,k)} m$$

Mivel $n/(n,k)$ és $k/(n,k)$ relatív prímek,

A bolhás feladat megoldása

Az (n, k) legnagyobb közös osztót jelöl.

A bolha k-asával ugrál: m ugrás után a km-edik csúcson lesz. Ez akkor a kiindulópont, ha $n \mid km$. A legkisebb ilyen m kell.

$$n \mid km \iff \frac{n}{(n,k)} \,\Bigg|\, \frac{k}{(n,k)} m$$

Mivel $n/(n,k)$ és $k/(n,k)$ relatív prímek, ez akkor igaz, ha:

$$\frac{n}{(n,k)} \,\Bigg|\, m.$$

A bolhás feladat megoldása

Az (n, k) legnagyobb közös osztót jelöl.

A bolha k-asával ugrál: m ugrás után a km-edik csúcson lesz. Ez akkor a kiindulópont, ha $n \mid km$. A legkisebb ilyen m kell.

$$n \mid km \iff \frac{n}{(n, k)} \,\Big|\, \frac{k}{(n, k)} m$$

Mivel $n/(n, k)$ és $k/(n, k)$ relatív prímek, ez akkor igaz, ha:

$$\frac{n}{(n, k)} \,\Big|\, m.$$

A legkisebb ilyen m maga az $n/(n, k)$.

A bolhás feladat megoldása

Az (n, k) legnagyobb közös osztót jelöl.

A bolha k-asával ugrál: m ugrás után a km-edik csúcson lesz.
Ez akkor a kiindulópont, ha $n \mid km$. A legkisebb ilyen m kell.

$$n \mid km \iff \frac{n}{(n, k)} \,\Bigg|\, \frac{k}{(n, k)} m$$

Mivel $n/(n, k)$ és $k/(n, k)$ relatív prímek, ez akkor igaz, ha:

$$\frac{n}{(n, k)} \,\Bigg|\, m.$$

A legkisebb ilyen m maga az $n/(n, k)$.
Így a bolha $n/(n, k)$ ugrást tesz meg, amikor először visszaér.

A bolhás feladat megoldása

Az (n, k) legnagyobb közös osztót jelöl.

A bolha k-asával ugrál: m ugrás után a km-edik csúcson lesz. Ez akkor a kiindulópont, ha $n \mid km$. A legkisebb ilyen m kell.

$$n \mid km \iff \frac{n}{(n,k)} \,\Big|\, \frac{k}{(n,k)} m$$

Mivel $n/(n,k)$ és $k/(n,k)$ relatív prímek, ez akkor igaz, ha:

$$\frac{n}{(n,k)} \,\Big|\, m.$$

A legkisebb ilyen m maga az $n/(n,k)$.
Így a bolha $n/(n,k)$ ugrást tesz meg, amikor először visszaér.
HF: ennyi csúcsot is érint.

A bolhás feladat megoldása

Az (n, k) legnagyobb közös osztót jelöl.

A bolha k-asával ugrál: m ugrás után a km-edik csúcson lesz. Ez akkor a kiindulópont, ha $n \mid km$. A legkisebb ilyen m kell.

$$n \mid km \iff \frac{n}{(n,k)} \,\Big|\, \frac{k}{(n,k)} m$$

Mivel $n/(n, k)$ és $k/(n, k)$ relatív prímek, ez akkor igaz, ha:

$$\frac{n}{(n,k)} \,\Big|\, m.$$

A legkisebb ilyen m maga az $n/(n, k)$.
Így a bolha $n/(n, k)$ ugrást tesz meg, amikor először visszaér.
HF: ennyi csúcsot is érint. Ezalatt k-szor ennyi „távolságot” tesz meg,

A bolhás feladat megoldása

Az (n, k) legnagyobb közös osztót jelöl.

A bolha k-asával ugrál: m ugrás után a km-edik csúcson lesz. Ez akkor a kiindulópont, ha $n \mid km$. A legkisebb ilyen m kell.

$$n \mid km \iff \frac{n}{(n,k)} \,\Bigg|\, \frac{k}{(n,k)} m$$

Mivel $n/(n,k)$ és $k/(n,k)$ relatív prímek, ez akkor igaz, ha:

$$\frac{n}{(n,k)} \,\Bigg|\, m.$$

A legkisebb ilyen m maga az $n/(n,k)$.
Így a bolha $n/(n,k)$ ugrást tesz meg, amikor először visszaér.
HF: ennyi csúcsot is érint. Ezalatt k-szor ennyi „távolságot" tesz meg, ami $kn/(n,k)$.

A bolhás feladat megoldása

Az (n,k) legnagyobb közös osztót jelöl.

A bolha k-asával ugrál: m ugrás után a km-edik csúcson lesz. Ez akkor a kiindulópont, ha $n \mid km$. A legkisebb ilyen m kell.

$$n \mid km \iff \frac{n}{(n,k)} \,\Big|\, \frac{k}{(n,k)} m$$

Mivel $n/(n,k)$ és $k/(n,k)$ relatív prímek, ez akkor igaz, ha:

$$\frac{n}{(n,k)} \,\Big|\, m.$$

A legkisebb ilyen m maga az $n/(n,k)$.
Így a bolha $n/(n,k)$ ugrást tesz meg, amikor először visszaér.
HF: ennyi csúcsot is érint. Ezalatt k-szor ennyi „távolságot” tesz meg, ami $kn/(n,k)$. A kör hossza n,

A bolhás feladat megoldása

Az (n, k) legnagyobb közös osztót jelöl.

A bolha k-asával ugrál: m ugrás után a km-edik csúcson lesz. Ez akkor a kiindulópont, ha $n \mid km$. A legkisebb ilyen m kell.

$$n \mid km \iff \frac{n}{(n,k)} \,\Big|\, \frac{k}{(n,k)} m$$

Mivel $n/(n,k)$ és $k/(n,k)$ relatív prímek, ez akkor igaz, ha:

$$\frac{n}{(n,k)} \,\Big|\, m.$$

A legkisebb ilyen m maga az $n/(n,k)$.
Így a bolha $n/(n,k)$ ugrást tesz meg, amikor először visszaér.
HF: ennyi csúcsot is érint. Ezalatt k-szor ennyi „távolságot” tesz meg, ami $kn/(n,k)$. A kör hossza n, ezért a megtett körök száma a megtett távolság n-edrésze,

A bolhás feladat megoldása

Az (n, k) legnagyobb közös osztót jelöl.

A bolha k-asával ugrál: m ugrás után a km-edik csúcson lesz. Ez akkor a kiindulópont, ha $n \mid km$. A legkisebb ilyen m kell.

$$n \mid km \iff \frac{n}{(n,k)} \,\Big|\, \frac{k}{(n,k)} m$$

Mivel $n/(n,k)$ és $k/(n,k)$ relatív prímek, ez akkor igaz, ha:

$$\frac{n}{(n,k)} \,\Big|\, m.$$

A legkisebb ilyen m maga az $n/(n,k)$.
Így a bolha $n/(n,k)$ ugrást tesz meg, amikor először visszaér.
HF: ennyi csúcsot is érint. Ezalatt k-szor ennyi „távolságot” tesz meg, ami $kn/(n,k)$. A kör hossza n, ezért a megtett körök száma a megtett távolság n-edrésze, vagyis $k/(n,k)$.

Hatvány rendjének képlete

Tétel

Ha z rendje véges és k egész, akkor $o(z^k) = \dfrac{o(z)}{(o(z), k)}$.

Hatvány rendjének képlete

Tétel

Ha z rendje véges és k egész, akkor $o(z^k) = \dfrac{o(z)}{(o(z), k)}$.

Bizonyítás

Legyen z rendje n, írjuk z hatványait egy n-szög csúcsaira.

Hatvány rendjének képlete

Tétel

Ha z rendje véges és k egész, akkor $o(z^k) = \dfrac{o(z)}{(o(z), k)}$.

Bizonyítás

Legyen z rendje n, írjuk z hatványait egy n-szög csúcsaira.
Amikor z^k-t hatványozzuk, akkor k-asával ugrálunk körbe a csúcsokon,

Hatvány rendjének képlete

Tétel

Ha z rendje véges és k egész, akkor $o(z^k) = \dfrac{o(z)}{(o(z), k)}$.

Bizonyítás

Legyen z rendje n, írjuk z hatványait egy n-szög csúcsaira. Amikor z^k-t hatványozzuk, akkor k-asával ugrálunk körbe a csúcsokon, a $z^0 = 1$-ből kiindulva.

Hatvány rendjének képlete

Tétel

Ha z rendje véges és k egész, akkor $o(z^k) = \dfrac{o(z)}{(o(z), k)}$.

Bizonyítás

Legyen z rendje n, írjuk z hatványait egy n-szög csúcsaira. Amikor z^k-t hatványozzuk, akkor k-asával ugrálunk körbe a csúcsokon, a $z^0 = 1$-ből kiindulva. A bolhás feladat miatt először az $n/(n, k)$-adik lépésben kapunk 1-et.

Hatvány rendjének képlete

Tétel

Ha z rendje véges és k egész, akkor $o(z^k) = \dfrac{o(z)}{(o(z), k)}$.

Bizonyítás

Legyen z rendje n, írjuk z hatványait egy n-szög csúcsaira.
Amikor z^k-t hatványozzuk, akkor k-asával ugrálunk körbe a csúcsokon, a $z^0 = 1$-ből kiindulva. A bolhás feladat miatt először az $n/(n, k)$-adik lépésben kapunk 1-et.
Vagyis z^k-nak az $n/(n, k)$-adik hatványa lesz először 1. $\square$

Hatvány rendjének képlete

Tétel

Ha z rendje véges és k egész, akkor $o(z^k) = \dfrac{o(z)}{(o(z), k)}$.

Bizonyítás

Legyen z rendje n, írjuk z hatványait egy n-szög csúcsaira. Amikor z^k-t hatványozzuk, akkor k-asával ugrálunk körbe a csúcsokon, a $z^0 = 1$-ből kiindulva. A bolhás feladat miatt először az $n/(n, k)$-adik lépésben kapunk 1-et.
Vagyis z^k-nak az $n/(n, k)$-adik hatványa lesz először 1. $\square$

Példa

$o(i) = 4$.

Hatvány rendjének képlete

Tétel

Ha z rendje véges és k egész, akkor $o(z^k) = \dfrac{o(z)}{(o(z), k)}$.

Bizonyítás

Legyen z rendje n, írjuk z hatványait egy n-szög csúcsaira. Amikor z^k-t hatványozzuk, akkor k-asával ugrálunk körbe a csúcsokon, a $z^0 = 1$-ből kiindulva. A bolhás feladat miatt először az $n/(n, k)$-adik lépésben kapunk 1-et.
Vagyis z^k-nak az $n/(n, k)$-adik hatványa lesz először 1. $\square$

Példa

$o(i) = 4$. Ezért $o(i^3) =$

Hatvány rendjének képlete

Tétel

Ha z rendje véges és k egész, akkor $o(z^k) = \dfrac{o(z)}{(o(z), k)}$.

Bizonyítás

Legyen z rendje n, írjuk z hatványait egy n-szög csúcsaira. Amikor z^k-t hatványozzuk, akkor k-asával ugrálunk körbe a csúcsokon, a $z^0 = 1$-ből kiindulva. A bolhás feladat miatt először az $n/(n, k)$-adik lépésben kapunk 1-et.
Vagyis z^k-nak az $n/(n, k)$-adik hatványa lesz először 1. $\square$

Példa

$o(i) = 4$. Ezért $o(i^3) = \dfrac{4}{(4, 3)}$

Hatvány rendjének képlete

Tétel

Ha z rendje véges és k egész, akkor $o(z^k) = \dfrac{o(z)}{(o(z), k)}$.

Bizonyítás

Legyen z rendje n, írjuk z hatványait egy n-szög csúcsaira. Amikor z^k-t hatványozzuk, akkor k-asával ugrálunk körbe a csúcsokon, a $z^0 = 1$-ből kiindulva. A bolhás feladat miatt először az $n/(n, k)$-adik lépésben kapunk 1-et.
Vagyis z^k-nak az $n/(n, k)$-adik hatványa lesz először 1. $\square$

Példa

$o(i) = 4$. Ezért $o(i^3) = \dfrac{4}{(4, 3)} = 4$.

A rend meghatározása

Állítás

Ha $(n, k) = 1$, akkor $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ rendje n.

A rend meghatározása

Állítás

Ha $(n, k) = 1$, akkor $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ rendje n.

Bizonyítás

Láttuk, hogy $\varepsilon_1 = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$-nek a k-adik hatványa ε_k,

A rend meghatározása

Állítás

Ha $(n, k) = 1$, akkor $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$ rendje n.

Bizonyítás

Láttuk, hogy $\varepsilon_1 = \cos(2\pi/n) + i \sin(2\pi/n)$-nek a k-adik hatványa ε_k, ezért ε_1 hatványai pontosan az n-edik egységgyökök.

A rend meghatározása

Állítás

Ha $(n, k) = 1$, akkor $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ rendje n.

Bizonyítás

Láttuk, hogy $\varepsilon_1 = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$-nek a k-adik hatványa ε_k, ezért ε_1 hatványai pontosan az n-edik egységgyökök. Így ε_1-nek n darab hatványa van,

A rend meghatározása

Állítás

Ha $(n, k) = 1$, akkor $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ rendje n.

Bizonyítás

Láttuk, hogy $\varepsilon_1 = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$-nek a k-adik hatványa ε_k, ezért ε_1 hatványai pontosan az n-edik egységgyökök. Így ε_1-nek n darab hatványa van, azaz rendje $o(\varepsilon_1) = n$.

A rend meghatározása

Állítás

Ha $(n, k) = 1$, akkor $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ rendje n.

Bizonyítás

Láttuk, hogy $\varepsilon_1 = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$-nek a k-adik hatványa ε_k, ezért ε_1 hatványai pontosan az n-edik egységgyökök. Így ε_1-nek n darab hatványa van, azaz rendje $o(\varepsilon_1) = n$. A hatvány rendjének képlete miatt $o(\varepsilon_k) = o(\varepsilon_1^k) =$

A rend meghatározása

Állítás

Ha $(n, k) = 1$, akkor $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ rendje n.

Bizonyítás

Láttuk, hogy $\varepsilon_1 = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$-nek a k-adik hatványa ε_k, ezért ε_1 hatványai pontosan az n-edik egységgyökök. Így ε_1-nek n darab hatványa van, azaz rendje $o(\varepsilon_1) = n$. A hatvány rendjének képlete miatt $o(\varepsilon_k) = o(\varepsilon_1^k) = n/(n, k)$.

A rend meghatározása

Állítás

Ha $(n, k) = 1$, akkor $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ rendje n.

Bizonyítás

Láttuk, hogy $\varepsilon_1 = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$-nek a k-adik hatványa ε_k, ezért ε_1 hatványai pontosan az n-edik egységgyökök. Így ε_1-nek n darab hatványa van, azaz rendje $o(\varepsilon_1) = n$. A hatvány rendjének képlete miatt $o(\varepsilon_k) = o(\varepsilon_1^k) = n/(n, k)$. Mivel $(n, k) = 1$, ezért $o(\varepsilon_k) = n$.

A rend meghatározása

Állítás

Ha $(n, k) = 1$, akkor $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ rendje n.

Bizonyítás

Láttuk, hogy $\varepsilon_1 = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$-nek a k-adik hatványa ε_k, ezért ε_1 hatványai pontosan az n-edik egységgyökök. Így ε_1-nek n darab hatványa van, azaz rendje $o(\varepsilon_1) = n$. A hatvány rendjének képlete miatt $o(\varepsilon_k) = o(\varepsilon_1^k) = n/(n, k)$. Mivel $(n, k) = 1$, ezért $o(\varepsilon_k) = n$.

Megjegyzés

Ha n és k nem relatív prímek, akkor ε_k rendje kisebb, mint n

A rend meghatározása

Állítás

Ha $(n, k) = 1$, akkor $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ rendje n.

Bizonyítás

Láttuk, hogy $\varepsilon_1 = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$-nek a k-adik hatványa ε_k, ezért ε_1 hatványai pontosan az n-edik egységgyökök. Így ε_1-nek n darab hatványa van, azaz rendje $o(\varepsilon_1) = n$. A hatvány rendjének képlete miatt $o(\varepsilon_k) = o(\varepsilon_1^k) = n/(n, k)$. Mivel $(n, k) = 1$, ezért $o(\varepsilon_k) = n$.

Megjegyzés

Ha n és k nem relatív prímek, akkor ε_k rendje kisebb, mint n (az n-nek valódi osztója).

Példa a rend meghatározására

Állítás

Ha $(n, k) = 1$, akkor $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ rendje n.

Példa a rend meghatározására

Állítás

Ha $(n, k) = 1$, akkor $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ rendje n.

Példa

Mennyi lesz $z = \cos 336^\circ + i\sin 336^\circ$ rendje?

Példa a rend meghatározására

Állítás

Ha $(n, k) = 1$, akkor $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ rendje n.

Példa

Mennyi lesz $z = \cos 336^\circ + i\sin 336^\circ$ rendje?

Megoldás

$\cos 336^\circ + i\sin 336^\circ$ hossza 1,

Példa a rend meghatározására

Állítás

Ha $(n, k) = 1$, akkor $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ rendje n.

Példa

Mennyi lesz $z = \cos 336^\circ + i\sin 336^\circ$ rendje?

Megoldás

$\cos 336^\circ + i\sin 336^\circ$ hossza 1, szöge $336 \cdot 1^\circ$,

Példa a rend meghatározására

Állítás

Ha $(n, k) = 1$, akkor $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ rendje n.

Példa

Mennyi lesz $z = \cos 336^\circ + i\sin 336^\circ$ rendje?

Megoldás

$\cos 336^\circ + i\sin 336^\circ$ hossza 1, szöge $336 \cdot 1^\circ$, ami $336/360 \cdot 2\pi$.

Példa a rend meghatározására

Állítás

Ha $(n, k) = 1$, akkor $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$ rendje n.

Példa

Mennyi lesz $z = \cos 336^\circ + i \sin 336^\circ$ rendje?

Megoldás

$\cos 336^\circ + i \sin 336^\circ$ hossza 1, szöge $336 \cdot 1^\circ$, ami $336/360 \cdot 2\pi$.
Mivel $336/360$ racionális szám, z egységgyök.

Példa a rend meghatározására

Állítás

Ha $(n, k) = 1$, akkor $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ rendje n.

Példa

Mennyi lesz $z = \cos 336^\circ + i\sin 336^\circ$ rendje?

Megoldás

$\cos 336^\circ + i\sin 336^\circ$ hossza 1, szöge $336 \cdot 1^\circ$, ami $336/360 \cdot 2\pi$.
Mivel $336/360$ racionális szám, z egységgyök. Egyszerűsítve:

$$\frac{336}{360} = \frac{14}{15}.$$

Példa a rend meghatározására

Állítás

Ha $(n, k) = 1$, akkor $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$ rendje n.

Példa

Mennyi lesz $z = \cos 336^\circ + i \sin 336^\circ$ rendje?

Megoldás

$\cos 336^\circ + i \sin 336^\circ$ hossza 1, szöge $336 \cdot 1^\circ$, ami $336/360 \cdot 2\pi$. Mivel $336/360$ racionális szám, z egységgyök. Egyszerűsítve:

$$\frac{336}{360} = \frac{14}{15}.$$

Tehát $z = \cos(14 \cdot 2\pi/15) + i \sin(14 \cdot 2\pi/15)$.

Példa a rend meghatározására

Állítás

Ha $(n, k) = 1$, akkor $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ rendje n.

Példa

Mennyi lesz $z = \cos 336^\circ + i\sin 336^\circ$ rendje?

Megoldás

$\cos 336^\circ + i\sin 336^\circ$ hossza 1, szöge $336 \cdot 1^\circ$, ami $336/360 \cdot 2\pi$.
Mivel $336/360$ racionális szám, z egységgyök. Egyszerűsítve:

$$\frac{336}{360} = \frac{14}{15}.$$

Tehát $z = \cos(14 \cdot 2\pi/15) + i\sin(14 \cdot 2\pi/15)$.
Mivel $(14, 15) = 1$, ezért z rendje a fenti állítás miatt 15.

Primitív n-edik egységgyökök

Definíció

Az ε szám primitív n-edik egységgyök, ha hatványai pontosan az n-edik egységgyökök.

Primitív n-edik egységgyökök

Definíció

Az ε szám primitív n-edik egységgyök, ha hatványai pontosan az n-edik egységgyökök.

Tétel

Az $\varepsilon \neq 0$ számra az alábbi három állítás ekvivalens.

Primitív n-edik egységgyökök

Definíció

Az ε szám primitív n-edik egységgyök, ha hatványai pontosan az n-edik egységgyökök.

Tétel

Az $\varepsilon \neq 0$ számra az alábbi három állítás ekvivalens.

(1) Az ε primitív n-edik egységgyök.

Primitív n-edik egységgyökök

Definíció

Az ε szám primitív n-edik egységgyök, ha hatványai pontosan az n-edik egységgyökök.

Tétel

Az $\varepsilon \neq 0$ számra az alábbi három állítás ekvivalens.

(1) Az ε primitív n-edik egységgyök.

(2) Az ε rendje n.

Primitív n-edik egységgyökök

Definíció

Az ε szám **primitív n-edik egységgyök**, ha hatványai pontosan az n-edik egységgyökök.

Tétel

Az $\varepsilon \neq 0$ számra az alábbi három állítás ekvivalens.

(1) Az ε primitív n-edik egységgyök.

(2) Az ε rendje n.

(3) $\varepsilon = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$, ahol $(k, n) = 1$.

Primitív n-edik egységgyökök

Definíció

Az ε szám primitív n-edik egységgyök, ha hatványai pontosan az n-edik egységgyökök.

Tétel

Az $\varepsilon \neq 0$ számra az alábbi három állítás ekvivalens.

(1) Az ε primitív n-edik egységgyök.

(2) Az ε rendje n.

(3) $\varepsilon = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$, ahol $(k, n) = 1$.

Emlékeztető

Ha $(n, k) = 1$, akkor $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ rendje n.

Primitív n-edik egységgyökök

Definíció

Az ε szám **primitív n-edik egységgyök**, ha hatványai pontosan az n-edik egységgyökök.

Tétel

Az $\varepsilon \neq 0$ számra az alábbi három állítás ekvivalens.

(1) Az ε primitív n-edik egységgyök.

(2) Az ε rendje n.

(3) $\varepsilon = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$, ahol $(k, n) = 1$.

Emlékeztető

Ha $(n, k) = 1$, akkor $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ rendje n.
Ha $(n, k) \neq 1$, akkor ε_k rendje n-nél kisebb.

Primitív n-edik egységgyökök

Definíció

Az ε szám primitív n-edik egységgyök, ha hatványai pontosan az n-edik egységgyökök.

Tétel

Az $\varepsilon \neq 0$ számra az alábbi három állítás ekvivalens.

(1) Az ε primitív n-edik egységgyök.

(2) Az ε rendje n.

(3) $\varepsilon = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$, ahol $(k, n) = 1$.

Emlékeztető

Ha $(n, k) = 1$, akkor $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ rendje n.
Ha $(n, k) \neq 1$, akkor ε_k rendje n-nél kisebb. Így (2) $\Longleftrightarrow$ (3).

A primitív n-edik egységgyökök jellemzése

Emlékeztető

Az ε szám **primitív n-edik egységgyök**, ha hatványai pontosan az n-edik egységgyökök.

A primitív *n*-edik egységgyökök jellemzése

Emlékeztető

Az ε szám primitív *n*-edik egységgyök, ha hatványai pontosan az *n*-edik egységgyökök.

Bizonyítandó: Az $\varepsilon \neq 0$ számra ekvivalens:

(1) Az ε primitív *n*-edik egységgyök.

(2) Az ε rendje *n*.

A primitív n-edik egységgyökök jellemzése

Emlékeztető

Az ε szám primitív n-edik egységgyök, ha hatványai pontosan az n-edik egységgyökök.

Bizonyítandó: Az $\varepsilon \neq 0$ számra ekvivalens:

(1) Az ε primitív n-edik egységgyök.

(2) Az ε rendje n.

Bizonyítás

(1) $\Longrightarrow$ (2) Ha ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök,

A primitív *n*-edik egységgyökök jellemzése

Emlékeztető

Az ε szám primitív *n*-edik egységgyök, ha hatványai pontosan az *n*-edik egységgyökök.

Bizonyítandó: Az $\varepsilon \neq 0$ számra ekvivalens:

(1) Az ε primitív *n*-edik egységgyök.

(2) Az ε rendje *n*.

Bizonyítás

(1) $\Longrightarrow$ (2) Ha ε hatványai pontosan az *n*-edik egységgyökök, akkor *n* darab hatványa van, így rendje *n*.

A primitív n-edik egységgyökök jellemzése

Emlékeztető

Az ε szám primitív n-edik egységgyök, ha hatványai pontosan az n-edik egységgyökök.

Bizonyítandó: Az $\varepsilon \neq 0$ számra ekvivalens:

(1) Az ε primitív n-edik egységgyök.

(2) Az ε rendje n.

Bizonyítás

(1) $\implies$ (2) Ha ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök, akkor n darab hatványa van, így rendje n.

(2) $\implies$ (1) Ha ε rendje n,

A primitív n-edik egységgyökök jellemzése

Emlékeztető

Az ε szám primitív n-edik egységgyök, ha hatványai pontosan az n-edik egységgyökök.

Bizonyítandó: Az $\varepsilon \neq 0$ számra ekvivalens:

(1) Az ε primitív n-edik egységgyök.

(2) Az ε rendje n.

Bizonyítás

(1) $\implies$ (2) Ha ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök, akkor n darab hatványa van, így rendje n.

(2) $\implies$ (1) Ha ε rendje n, akkor n-edik hatványa 1,

A primitív n-edik egységgyökök jellemzése

Emlékeztető

Az ε szám primitív n-edik egységgyök, ha hatványai pontosan az n-edik egységgyökök.

Bizonyítandó: Az $\varepsilon \neq 0$ számra ekvivalens:

(1) Az ε primitív n-edik egységgyök.

(2) Az ε rendje n.

Bizonyítás

(1) $\Longrightarrow$ (2) Ha ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök, akkor n darab hatványa van, így rendje n.
(2) $\Longrightarrow$ (1) Ha ε rendje n, akkor n-edik hatványa 1, és ezért n-edik egységgyök.

A primitív *n*-edik egységgyökök jellemzése

Emlékeztető

Az ε szám primitív *n*-edik egységgyök, ha hatványai pontosan az *n*-edik egységgyökök.

Bizonyítandó: Az $\varepsilon \neq 0$ számra ekvivalens:

(1) Az ε primitív *n*-edik egységgyök.

(2) Az ε rendje *n*.

Bizonyítás

(1) $\implies$ (2) Ha ε hatványai pontosan az *n*-edik egységgyökök, akkor *n* darab hatványa van, így rendje *n*.
(2) $\implies$ (1) Ha ε rendje *n*, akkor *n*-edik hatványa 1, és ezért *n*-edik egységgyök. Így minden hatványa is az.

$$\varepsilon^n = 1 \implies (\varepsilon^k)^n =$$

A primitív n-edik egységgyökök jellemzése

Emlékeztető

Az ε szám primitív n-edik egységgyök, ha hatványai pontosan az n-edik egységgyökök.

Bizonyítandó: Az $\varepsilon \neq 0$ számra ekvivalens:

(1) Az ε primitív n-edik egységgyök.

(2) Az ε rendje n.

Bizonyítás

(1) $\implies$ (2) Ha ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök, akkor n darab hatványa van, így rendje n.
(2) $\implies$ (1) Ha ε rendje n, akkor n-edik hatványa 1, és ezért n-edik egységgyök. Így minden hatványa is az.

$$\varepsilon^n = 1 \implies (\varepsilon^k)^n = (\varepsilon^n)^k = 1^k = 1.$$

A primitív n-edik egységgyökök jellemzése

Emlékeztető

Az ε szám primitív n-edik egységgyök, ha hatványai pontosan az n-edik egységgyökök.

Bizonyítandó: Az $\varepsilon \neq 0$ számra ekvivalens:

(1) Az ε primitív n-edik egységgyök.

(2) Az ε rendje n.

Bizonyítás

(1) $\Longrightarrow$ (2) Ha ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök, akkor n darab hatványa van, így rendje n.
(2) $\Longrightarrow$ (1) Ha ε rendje n, akkor n-edik hatványa 1, és ezért n-edik egységgyök. Így minden hatványa is az. Rendje n, tehát n hatványa van.

$$\varepsilon^n = 1 \implies (\varepsilon^k)^n = (\varepsilon^n)^k = 1^k = 1.$$

A primitív n-edik egységgyökök jellemzése

Emlékeztető

Az ε szám primitív n-edik egységgyök, ha hatványai pontosan az n-edik egységgyökök.

Bizonyítandó: Az $\varepsilon \neq 0$ számra ekvivalens:

(1) Az ε primitív n-edik egységgyök.

(2) Az ε rendje n.

Bizonyítás

(1) $\implies$ (2) Ha ε hatványai pontosan az n-edik egységgyökök, akkor n darab hatványa van, így rendje n.

(2) $\implies$ (1) Ha ε rendje n, akkor n-edik hatványa 1, és ezért n-edik egységgyök. Így minden hatványa is az. Rendje n, tehát n hatványa van. Így minden n-edik egységgyököt megkapunk.

$$\varepsilon^n = 1 \implies (\varepsilon^k)^n = (\varepsilon^n)^k = 1^k = 1.$$

A primitív n-edik egységgyökök száma

Legyen n pozitív egész. Ekkor a $\varphi(n)$ Euler-függvény a $0, 1, \ldots, n-1$ számok közül az n-hez relatív prímek száma.

A primitív n-edik egységgyökök száma

Legyen n pozitív egész. Ekkor a $\varphi(n)$ Euler-függvény a $0, 1, \ldots, n-1$ számok közül az n-hez relatív prímek száma.

Számelméleti tétel

Ha n kanonikus alakja $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$, ahol $\alpha_i \neq 0$, akkor

$$\varphi(n) = (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}) \ldots (p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k - 1}).$$

A primitív n-edik egységgyökök száma

Legyen n pozitív egész. Ekkor a $\varphi(n)$ Euler-függvény a $0, 1, \ldots, n-1$ számok közül az n-hez relatív prímek száma.

Számelméleti tétel

Ha n kanonikus alakja $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$, ahol $\alpha_i \neq 0$, akkor

$$\varphi(n) = \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}\right) \ldots \left(p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k - 1}\right).$$

Állítás

A primitív n-edik egységgyökök száma $\varphi(n)$.

A primitív n-edik egységgyökök száma

Legyen n pozitív egész. Ekkor a $\varphi(n)$ Euler-függvény a $0, 1, \ldots, n-1$ számok közül az n-hez relatív prímek száma.

Számelméleti tétel

Ha n kanonikus alakja $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$, ahol $\alpha_i \neq 0$, akkor

$$\varphi(n) = (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}) \ldots (p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k - 1}).$$

Állítás

A primitív n-edik egységgyökök száma $\varphi(n)$.

Bizonyítás

A primitív n-edik egységgyökök: $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$, ahol $(k, n) = 1$.

A primitív n-edik egységgyökök száma

Legyen n pozitív egész. Ekkor a $\varphi(n)$ Euler-függvény a $0, 1, \ldots, n-1$ számok közül az n-hez relatív prímek száma.

Számelméleti tétel

Ha n kanonikus alakja $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$, ahol $\alpha_i \neq 0$, akkor

$$\varphi(n) = \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}\right) \ldots \left(p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k - 1}\right).$$

Állítás

A primitív n-edik egységgyökök száma $\varphi(n)$.

Bizonyítás

A primitív n-edik egységgyökök: $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$, ahol $(k, n) = 1$. Láttuk: $\varepsilon_k = \varepsilon_\ell \iff n \mid k - \ell$.

Példák primitív *n*-edik egységgyökökre

Példa

A negyedik primitív egységgyökök

Példák primitív n-edik egységgyökökre

Példa

A negyedik primitív egységgyökök $i^1 = i$

Példák primitív n-edik egységgyökökre

Példa

A negyedik primitív egységgyökök $i^1 = i$ és $i^3 = -i$,

Példák primitív n-edik egységgyökökre

Példa

A negyedik primitív egységgyökök $i^1 = i$ és $i^3 = -i$,
mert 1 és 3 relatív prímek 4-hez,

Példák primitív n-edik egységgyökökre

Példa

A negyedik primitív egységgyökök $i^1 = i$ és $i^3 = -i$,
mert 1 és 3 relatív prímek 4-hez, de 0 és 2 nem.

Példák primitív *n*-edik egységgyökökre

Példa

A negyedik primitív egységgyökök $i^1 = i$ és $i^3 = -i$,
mert 1 és 3 relatív prímek 4-hez, de 0 és 2 nem. $\varphi(4) = 2$.

Példák primitív n-edik egységgyökökre

Példa

A negyedik primitív egységgyökök $i^1 = i$ és $i^3 = -i$,
mert 1 és 3 relatív prímek 4-hez, de 0 és 2 nem. $\varphi(4) = 2$.

Példa

A hatodik primitív egységgyökök

Példák primitív n-edik egységgyökökre

Példa

A negyedik primitív egységgyökök $i^1 = i$ és $i^3 = -i$,
mert 1 és 3 relatív prímek 4-hez, de 0 és 2 nem. $\varphi(4) = 2$.

Példa

A hatodik primitív egységgyökök

$$\cos(2\pi/6) + i\sin(2\pi/6) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Példák primitív n-edik egységgyökökre

Példa

A negyedik primitív egységgyökök $i^1 = i$ és $i^3 = -i$,
mert 1 és 3 relatív prímek 4-hez, de 0 és 2 nem. $\varphi(4) = 2$.

Példa

A hatodik primitív egységgyökök

$$\cos(2\pi/6) + i\sin(2\pi/6) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{és}$$

$$\cos(5 \cdot 2\pi/6) + i\sin(5 \cdot 2\pi/6) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

Példák primitív *n*-edik egységgyökökre

Példa

A negyedik primitív egységgyökök $i^1 = i$ és $i^3 = -i$, mert 1 és 3 relatív prímek 4-hez, de 0 és 2 nem. $\varphi(4) = 2$.

Példa

A hatodik primitív egységgyökök

$$\cos(2\pi/6) + i\sin(2\pi/6) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{és}$$

$$\cos(5\cdot 2\pi/6) + i\sin(5\cdot 2\pi/6) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

mert 1 és 5 relatív prímek 6-hoz,

Példák primitív n-edik egységgyökökre

Példa

A negyedik primitív egységgyökök $i^1 = i$ és $i^3 = -i$, mert 1 és 3 relatív prímek 4-hez, de 0 és 2 nem. $\varphi(4) = 2$.

Példa

A hatodik primitív egységgyökök

$$\cos(2\pi/6) + i\sin(2\pi/6) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{és}$$

$$\cos(5\cdot 2\pi/6) + i\sin(5\cdot 2\pi/6) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

mert 1 és 5 relatív prímek 6-hoz, de 0, 2, 3, 4 nem.

Példák primitív *n*-edik egységgyökökre

Példa

A negyedik primitív egységgyökök $i^1 = i$ és $i^3 = -i$,
mert 1 és 3 relatív prímek 4-hez, de 0 és 2 nem. $\varphi(4) = 2$.

Példa

A hatodik primitív egységgyökök

$$\cos(2\pi/6) + i\sin(2\pi/6) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{és}$$

$$\cos(5\cdot 2\pi/6) + i\sin(5\cdot 2\pi/6) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

mert 1 és 5 relatív prímek 6-hoz, de 0, 2, 3, 4 nem. $\varphi(6) = 2$.

Példák primitív n-edik egységgyökökre

Példa

A negyedik primitív egységgyökök $i^1 = i$ és $i^3 = -i$, mert 1 és 3 relatív prímek 4-hez, de 0 és 2 nem. $\varphi(4) = 2$.

Példa

A hatodik primitív egységgyökök

$$\cos(2\pi/6) + i\sin(2\pi/6) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{és}$$

$$\cos(5 \cdot 2\pi/6) + i\sin(5 \cdot 2\pi/6) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

mert 1 és 5 relatív prímek 6-hoz, de 0, 2, 3, 4 nem. $\varphi(6) = 2$.

Ezzel elvégeztük a Kiss-jegyzet 1.4. Szakaszát.

Binomiális együtthatók

Ismétlés

Ha van n tárgyunk, akkor ezeket $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ különböző módon tudjuk sorba rakni.

Binomiális együtthatók

Ismétlés

Ha van n tárgyunk, akkor ezeket $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ különböző módon tudjuk sorba rakni. Az itt szereplő $n!$ szám neve: n faktoriális.

Binomiális együtthatók

Ismétlés

Ha van n tárgyunk, akkor ezeket $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ különböző módon tudjuk sorba rakni. Az itt szereplő $n!$ szám neve: n faktoriális. Megállapodás szerint $0! = 1$.

Binomiális együtthatók

Ismétlés

Ha van n tárgyunk, akkor ezeket $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ különböző módon tudjuk sorba rakni. Az itt szereplő $n!$ szám neve: n faktoriális. Megállapodás szerint $0! = 1$.

Ismétlés

Ha van n tárgyunk, és ebből k darabot akarunk kiválasztani (a sorrendre való tekintet nélkül), akkor ezt

Binomiális együtthatók

Ismétlés

Ha van n tárgyunk, akkor ezeket $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ különböző módon tudjuk sorba rakni. Az itt szereplő $n!$ szám neve: n faktoriális. Megállapodás szerint $0! = 1$.

Ismétlés

Ha van n tárgyunk, és ebből k darabot akarunk kiválasztani (a sorrendre való tekintet nélkül), akkor ezt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$$

különböző módon tehetjük meg.

Binomiális együtthatók

Ismétlés

Ha van n tárgyunk, akkor ezeket $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ különböző módon tudjuk sorba rakni. Az itt szereplő $n!$ szám neve: n faktoriális. Megállapodás szerint $0! = 1$.

Ismétlés

Ha van n tárgyunk, és ebből k darabot akarunk kiválasztani (a sorrendre való tekintet nélkül), akkor ezt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$$

különböző módon tehetjük meg. Az itt szereplő kifejezés az „n alatt a k” binomiális együttható.

Binomiális együtthatók

Ismétlés

Ha van n tárgyunk, akkor ezeket $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ különböző módon tudjuk sorba rakni. Az itt szereplő $n!$ szám neve: n faktoriális. Megállapodás szerint $0! = 1$.

Ismétlés

Ha van n tárgyunk, és ebből k darabot akarunk kiválasztani (a sorrendre való tekintet nélkül), akkor ezt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$$

különböző módon tehetjük meg. Az itt szereplő kifejezés az „n alatt a k” binomiális együttható. Megállapodás szerint ennek értéke nulla, ha $k > n$,

Binomiális együtthatók

Ismétlés

Ha van n tárgyunk, akkor ezeket $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ különböző módon tudjuk sorba rakni. Az itt szereplő $n!$ szám neve: n faktoriális. Megállapodás szerint $0! = 1$.

Ismétlés

Ha van n tárgyunk, és ebből k darabot akarunk kiválasztani (a sorrendre való tekintet nélkül), akkor ezt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$$

különböző módon tehetjük meg. Az itt szereplő kifejezés az „n alatt a k” binomiális együttható. Megállapodás szerint ennek értéke nulla, ha $k > n$, vagy ha $k < 0$.

A binomiális tétel

Fejtsük ki az $(a+b)^3$ szorzatot.

A binomiális tétel

Fejtsük ki az $(a+b)^3$ szorzatot.

Az $(a+b)(a+b)(a+b)$ szorzatot kifejtve egy összeget kapunk.

A binomiális tétel

Fejtsük ki az $(a+b)^3$ szorzatot.

Az $(a+b)(a+b)(a+b)$ szorzatot kifejtve egy összeget kapunk.
A tagok $u_1 \cdot u_2 \cdot u_3$ szorzatok, ahol $u_1, u_2, u_3 \in \{a, b\}$,
az összes lehetséges kombinációban

A binomiális tétel

Fejtsük ki az $(a+b)^3$ szorzatot.

Az $(a+b)(a+b)(a+b)$ szorzatot kifejtve egy összeget kapunk.
A tagok $u_1 \cdot u_2 \cdot u_3$ szorzatok, ahol $u_1, u_2, u_3 \in \{a, b\}$,
az összes lehetséges kombinációban (összesen $2^3 = 8$ tag).

A binomiális tétel

Fejtsük ki az $(a + b)^3$ szorzatot.

Az $(a + b)(a + b)(a + b)$ szorzatot kifejtve egy összeget kapunk.
A tagok $u_1 \cdot u_2 \cdot u_3$ szorzatok, ahol $u_1, u_2, u_3 \in \{a, b\}$,
az összes lehetséges kombinációban (összesen $2^3 = 8$ tag).
a^3 csak egyféleképpen keletkezhet:

A binomiális tétel

Fejtsük ki az $(a+b)^3$ szorzatot.

Az $(a+b)(a+b)(a+b)$ szorzatot kifejtve egy összeget kapunk.
A tagok $u_1 \cdot u_2 \cdot u_3$ szorzatok, ahol $u_1, u_2, u_3 \in \{a, b\}$,
az összes lehetséges kombinációban (összesen $2^3 = 8$ tag).
a^3 csak egyféleképpen keletkezhet: ha $u_1 = u_2 = u_3 = a$.

A binomiális tétel

Fejtsük ki az $(a+b)^3$ szorzatot.

Az $(a+b)(a+b)(a+b)$ szorzatot kifejtve egy összeget kapunk.
A tagok $u_1 \cdot u_2 \cdot u_3$ szorzatok, ahol $u_1, u_2, u_3 \in \{a, b\}$,
az összes lehetséges kombinációban (összesen $2^3 = 8$ tag).
a^3 csak egyféleképpen keletkezhet: ha $u_1 = u_2 = u_3 = a$.
a^2b úgy keletkezhet, hogy u_1, u_2, u_3 közül kettő a-val egyenlő.

A binomiális tétel

Fejtsük ki az $(a+b)^3$ szorzatot.

Az $(a+b)(a+b)(a+b)$ szorzatot kifejtve egy összeget kapunk.
A tagok $u_1 \cdot u_2 \cdot u_3$ szorzatok, ahol $u_1, u_2, u_3 \in \{a, b\}$,
az összes lehetséges kombinációban (összesen $2^3 = 8$ tag).
a^3 csak egyféleképpen keletkezhet: ha $u_1 = u_2 = u_3 = a$.
a^2b úgy keletkezhet, hogy u_1, u_2, u_3 közül kettő a-val egyenlő.
Ezt a kettőt $\binom{3}{2} = 3$-féleképpen választhatjuk ki.

A binomiális tétel

Fejtsük ki az $(a+b)^3$ szorzatot.

Az $(a+b)(a+b)(a+b)$ szorzatot kifejtve egy összeget kapunk.
A tagok $u_1 \cdot u_2 \cdot u_3$ szorzatok, ahol $u_1, u_2, u_3 \in \{a, b\}$,
az összes lehetséges kombinációban (összesen $2^3 = 8$ tag).
a^3 csak egyféleképpen keletkezhet: ha $u_1 = u_2 = u_3 = a$.
$a^2 b$ úgy keletkezhet, hogy u_1, u_2, u_3 közül kettő a-val egyenlő.
Ezt a kettőt $\binom{3}{2} = 3$-féleképpen választhatjuk ki.
Hasonlóan ab^2-ből is három darab lesz,

A binomiális tétel

Fejtsük ki az $(a+b)^3$ szorzatot.

Az $(a+b)(a+b)(a+b)$ szorzatot kifejtve egy összeget kapunk.
A tagok $u_1 \cdot u_2 \cdot u_3$ szorzatok, ahol $u_1, u_2, u_3 \in \{a, b\}$,
az összes lehetséges kombinációban (összesen $2^3 = 8$ tag).
a^3 csak egyféleképpen keletkezhet: ha $u_1 = u_2 = u_3 = a$.
a^2b úgy keletkezhet, hogy u_1, u_2, u_3 közül kettő a-val egyenlő.
Ezt a kettőt $\binom{3}{2} = 3$-féleképpen választhatjuk ki.
Hasonlóan ab^2-ből is három darab lesz, b^3-ből pedig egy.

A binomiális tétel

Fejtsük ki az $(a+b)^3$ szorzatot.

Az $(a+b)(a+b)(a+b)$ szorzatot kifejtve egy összeget kapunk.
A tagok $u_1 \cdot u_2 \cdot u_3$ szorzatok, ahol $u_1, u_2, u_3 \in \{a, b\}$,
az összes lehetséges kombinációban (összesen $2^3 = 8$ tag).
a^3 csak egyféleképpen keletkezhet: ha $u_1 = u_2 = u_3 = a$.
a^2b úgy keletkezhet, hogy u_1, u_2, u_3 közül kettő a-val egyenlő.
Ezt a kettőt $\binom{3}{2} = 3$-féleképpen választhatjuk ki.
Hasonlóan ab^2-ből is három darab lesz, b^3-ből pedig egy.

A binomiális tétel (Kiss-jegyzet, 2.2.42. Gyakorlat)

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n .$$

A binomiális tétel

Fejtsük ki az $(a+b)^3$ szorzatot.

Az $(a+b)(a+b)(a+b)$ szorzatot kifejtve egy összeget kapunk.
A tagok $u_1 \cdot u_2 \cdot u_3$ szorzatok, ahol $u_1, u_2, u_3 \in \{a, b\}$,
az összes lehetséges kombinációban (összesen $2^3 = 8$ tag).
a^3 csak egyféleképpen keletkezhet: ha $u_1 = u_2 = u_3 = a$.
a^2b úgy keletkezhet, hogy u_1, u_2, u_3 közül kettő a-val egyenlő.
Ezt a kettőt $\binom{3}{2} = 3$-féleképpen választhatjuk ki.
Hasonlóan ab^2-ből is három darab lesz, b^3-ből pedig egy.

A binomiális tétel (Kiss-jegyzet, 2.2.42. Gyakorlat)

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n .$$

(Lásd a 2.1.4. és 2.1.10. Gyakorlatokat is.)