Algebra1, alapszint

ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Előadó: Kiss Emil
ewkiss@cs.elte.hu

3. előadás

Gyökvonás komplex számból

Ismétlés:

Ha $r, s > 0$ valós, akkor $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = s(\cos\beta + i\sin\beta)$ pontosan akkor, ha $r = s$, és $\alpha - \beta$ a 360° egész számszorosa.

Gyökvonás komplex számból

Ismétlés:

Ha $r, s > 0$ valós, akkor $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = s(\cos\beta + i\sin\beta)$ pontosan akkor, ha $r = s$, és $\alpha - \beta$ a 360° egész számszorosa.

Moivre képlete

$$\big(s(\cos\beta + i\sin\beta)\big)^n = s^n(\cos n\beta + i\sin n\beta).$$

Gyökvonás komplex számból

Ismétlés:

Ha $r, s > 0$ valós, akkor $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = s(\cos\beta + i\sin\beta)$ pontosan akkor, ha $r = s$, és $\alpha - \beta$ a 360° egész számszorosa.

Moivre képlete

$\big(s(\cos\beta + i\sin\beta)\big)^n = s^n(\cos n\beta + i\sin n\beta)$.
Azaz hatványozáskor a hosszat a kitevőre emeljük, a szöget a kitevővel szorozzuk.

Gyökvonás komplex számból

Ismétlés:

Ha $r, s > 0$ valós, akkor $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = s(\cos\beta + i\sin\beta)$ pontosan akkor, ha $r = s$, és $\alpha - \beta$ a 360° egész számszorosa.

Moivre képlete

$\big(s(\cos\beta + i\sin\beta)\big)^n = s^n(\cos n\beta + i\sin n\beta)$.
Azaz hatványozáskor a hosszat a kitevőre emeljük,
a szöget a kitevővel szorozzuk.

Határozzuk meg $0 \neq z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ n-edik gyökeit.

Gyökvonás komplex számból

Ismétlés:

Ha $r, s > 0$ valós, akkor $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = s(\cos\beta + i\sin\beta)$ pontosan akkor, ha $r = s$, és $\alpha - \beta$ a 360° egész számszorosa.

Moivre képlete

$\big(s(\cos\beta + i\sin\beta)\big)^n = s^n(\cos n\beta + i\sin n\beta)$.
Azaz hatványozáskor a hosszat a kitevőre emeljük,
a szöget a kitevővel szorozzuk.

Határozzuk meg $0 \neq z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ n-edik gyökeit. Ha $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \big(s(\cos\beta + i\sin\beta)\big)^n$

Gyökvonás komplex számból

Ismétlés:

Ha $r, s > 0$ valós, akkor $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = s(\cos\beta + i\sin\beta)$ pontosan akkor, ha $r = s$, és $\alpha - \beta$ a 360° egész számszorosa.

Moivre képlete

$\big(s(\cos\beta + i\sin\beta)\big)^n = s^n(\cos n\beta + i\sin n\beta)$.
Azaz hatványozáskor a hosszat a kitevőre emeljük,
a szöget a kitevővel szorozzuk.

Határozzuk meg $0 \neq z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ n-edik gyökeit. Ha $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \big(s(\cos\beta + i\sin\beta)\big)^n = s^n(\cos n\beta + i\sin n\beta)$,

Gyökvonás komplex számból

Ismétlés:

Ha $r, s > 0$ valós, akkor $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = s(\cos\beta + i\sin\beta)$ pontosan akkor, ha $r = s$, és $\alpha - \beta$ a 360° egész számszorosa.

Moivre képlete

$\big(s(\cos\beta + i\sin\beta)\big)^n = s^n(\cos n\beta + i\sin n\beta)$.
Azaz hatványozáskor a hosszat a kitevőre emeljük,
a szöget a kitevővel szorozzuk.

Határozzuk meg $0 \neq z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ n-edik gyökeit. Ha $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \big(s(\cos\beta + i\sin\beta)\big)^n = s^n(\cos n\beta + i\sin n\beta)$, akkor $s^n = r$,

Gyökvonás komplex számból

Ismétlés:

Ha $r, s > 0$ valós, akkor $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = s(\cos\beta + i\sin\beta)$ pontosan akkor, ha $r = s$, és $\alpha - \beta$ a 360° egész számszorosa.

Moivre képlete

$\big(s(\cos\beta + i\sin\beta)\big)^n = s^n(\cos n\beta + i\sin n\beta)$.
Azaz hatványozáskor a hosszat a kitevőre emeljük,
a szöget a kitevővel szorozzuk.

Határozzuk meg $0 \neq z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ n-edik gyökeit. Ha $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \big(s(\cos\beta + i\sin\beta)\big)^n = s^n(\cos n\beta + i\sin n\beta)$, akkor $s^n = r$, és $n\beta - \alpha = k \cdot 2\pi$ (k egész).

Gyökvonás komplex számból

Ismétlés:

Ha $r, s > 0$ valós, akkor $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = s(\cos\beta + i\sin\beta)$ pontosan akkor, ha $r = s$, és $\alpha - \beta$ a 360° egész számszorosa.

Moivre képlete

$\big(s(\cos\beta + i\sin\beta)\big)^n = s^n(\cos n\beta + i\sin n\beta)$.
Azaz hatványozáskor a hosszat a kitevőre emeljük, a szöget a kitevővel szorozzuk.

Határozzuk meg $0 \neq z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ n-edik gyökeit. Ha $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \big(s(\cos\beta + i\sin\beta)\big)^n = s^n(\cos n\beta + i\sin n\beta)$, akkor $s^n = r$, és $n\beta - \alpha = k\cdot 2\pi$ (k egész). Ezért

Gyökvonás komplex számból

Ismétlés:

Ha $r, s > 0$ valós, akkor $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = s(\cos\beta + i\sin\beta)$ pontosan akkor, ha $r = s$, és $\alpha - \beta$ a 360° egész számszorosa.

Moivre képlete

$\big(s(\cos\beta + i\sin\beta)\big)^n = s^n(\cos n\beta + i\sin n\beta)$.
Azaz hatványozáskor a hosszat a kitevőre emeljük,
a szöget a kitevővel szorozzuk.

Határozzuk meg $0 \neq z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ n-edik gyökeit. Ha $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \big(s(\cos\beta + i\sin\beta)\big)^n = s^n(\cos n\beta + i\sin n\beta)$, akkor $s^n = r$, és $n\beta - \alpha = k \cdot 2\pi$ (k egész). Ezért

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}$$

Gyökvonás komplex számból

Ismétlés:

Ha $r, s > 0$ valós, akkor $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = s(\cos\beta + i\sin\beta)$ pontosan akkor, ha $r = s$, és $\alpha - \beta$ a 360° egész számszorosa.

Moivre képlete

$\big(s(\cos\beta + i\sin\beta)\big)^n = s^n(\cos n\beta + i\sin n\beta)$.
Azaz hatványozáskor a hosszat a kitevőre emeljük, a szöget a kitevővel szorozzuk.

Határozzuk meg $0 \neq z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ n-edik gyökeit. Ha $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \big(s(\cos\beta + i\sin\beta)\big)^n = s^n(\cos n\beta + i\sin n\beta)$, akkor $s^n = r$, és $n\beta - \alpha = k \cdot 2\pi$ (k egész). Ezért

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right).$$

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\ (k \in \mathbb{Z})$$

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\ (k\in\mathbb{Z})$$

($\sqrt[n]{r}$:

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\ (k \in \mathbb{Z})$$

($\sqrt[n]{r}$: $r > 0$ valós, egyértelműen vonható pozitív n-edik gyök.)

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \quad (k\in\mathbb{Z})$$

($\sqrt[n]{r}$: $r > 0$ valós, egyértelműen vonható pozitív n-edik gyök.)

Példa

$z = -4 =$

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \quad (k\in\mathbb{Z})$$

($\sqrt[n]{r}$: $r > 0$ valós, egyértelműen vonható pozitív n-edik gyök.)

Példa

$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) =$

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

($\sqrt[n]{r}$: $r > 0$ valós, egyértelműen vonható pozitív n-edik gyök.)

Példa

$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

($\sqrt[n]{r}$: $r > 0$ valós, egyértelműen vonható pozitív n-edik gyök.)

Példa

$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$

$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}$

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \quad (k\in\mathbb{Z})$$

($\sqrt[n]{r}$: $r > 0$ valós, egyértelműen vonható pozitív n-edik gyök.)

Példa

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right) \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \quad (k\in\mathbb{Z})$$

($\sqrt[n]{r}$: $r>0$ valós, egyértelműen vonható pozitív n-edik gyök.)

Példa

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right) \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Hányféle számot kapunk?

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \quad (k\in\mathbb{Z})$$

($\sqrt[n]{r}$: $r > 0$ valós, egyértelműen vonható pozitív n-edik gyök.)

Példa

$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right) \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Hányféle számot kapunk?

$k = 0$:

$k = 1$:

$k = 2$:

$k = 3$:

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

($\sqrt[n]{r}$: $r > 0$ valós, egyértelműen vonható pozitív n-edik gyök.)

Példa

$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Hányféle számot kapunk?

$k = 0$: $\sqrt{2}$

$k = 1$:

$k = 2$:

$k = 3$:

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

($\sqrt[n]{r}$: $r > 0$ valós, egyértelműen vonható pozitív n-edik gyök.)

Példa

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Hányféle számot kapunk?

$k = 0$: $\sqrt{2}\left(\cos(\ \pi/4) + i\sin(\ \pi/4)\right)$

$k = 1$:

$k = 2$:

$k = 3$:

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \quad (k\in\mathbb{Z})$$

($\sqrt[n]{r}$: $r > 0$ valós, egyértelműen vonható pozitív n-edik gyök.)

Példa

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right) \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Hányféle számot kapunk?

$k = 0$: $\sqrt{2}\left(\cos(\ \pi/4) + i\sin(\ \pi/4)\right) = \ \ 1 + i.$

$k = 1$:

$k = 2$:

$k = 3$:

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

($\sqrt[n]{r}$: $r > 0$ valós, egyértelműen vonható pozitív n-edik gyök.)

Példa

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Hányféle számot kapunk?

$k = 0$: $\sqrt{2}\left(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)\right) = 1 + i$.

$k = 1$: $\sqrt{2}\left(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)\right)$

$k = 2$:

$k = 3$:

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

($\sqrt[n]{r}$: $r > 0$ valós, egyértelműen vonható pozitív n-edik gyök.)

Példa

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Hányféle számot kapunk?

$k = 0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)\big) = 1 + i$.

$k = 1$: $\sqrt{2}\big(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)\big) = -1 + i$.

$k = 2$:

$k = 3$:

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

($\sqrt[n]{r}$: $r > 0$ valós, egyértelműen vonható pozitív n-edik gyök.)

Példa

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Hányféle számot kapunk?

$k = 0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)\big) = 1 + i.$

$k = 1$: $\sqrt{2}\big(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)\big) = -1 + i.$

$k = 2$: $\sqrt{2}\big(\cos(5\pi/4) + i\sin(5\pi/4)\big)$

$k = 3$:

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

($\sqrt[n]{r}$: $r > 0$ valós, egyértelműen vonható pozitív n-edik gyök.)

Példa

$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Hányféle számot kapunk?

$k = 0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)\big) = 1 + i.$

$k = 1$: $\sqrt{2}\big(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)\big) = -1 + i.$

$k = 2$: $\sqrt{2}\big(\cos(5\pi/4) + i\sin(5\pi/4)\big) = -1 - i.$

$k = 3$:

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\ (k\in\mathbb{Z})$$

($\sqrt[n]{r}$: $r>0$ valós, egyértelműen vonható pozitív n-edik gyök.)

Példa

$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)\quad (k\in\mathbb{Z})$$

Hányféle számot kapunk?

$k=0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)\big) = 1+i.$

$k=1$: $\sqrt{2}\big(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)\big) = -1+i.$

$k=2$: $\sqrt{2}\big(\cos(5\pi/4) + i\sin(5\pi/4)\big) = -1-i.$

$k=3$: $\sqrt{2}\big(\cos(7\pi/4) + i\sin(7\pi/4)\big)$

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \quad (k\in\mathbb{Z})$$

($\sqrt[n]{r}$: $r > 0$ valós, egyértelműen vonható pozitív n-edik gyök.)

Példa

$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right) \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Hányféle számot kapunk?

$k = 0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)\big) = 1 + i$.

$k = 1$: $\sqrt{2}\big(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)\big) = -1 + i$.

$k = 2$: $\sqrt{2}\big(\cos(5\pi/4) + i\sin(5\pi/4)\big) = -1 - i$.

$k = 3$: $\sqrt{2}\big(\cos(7\pi/4) + i\sin(7\pi/4)\big) = 1 - i$.

Példa gyökvonásra

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \quad (k\in\mathbb{Z})$$

($\sqrt[n]{r}$: $r > 0$ valós, egyértelműen vonható pozitív n-edik gyök.)

Példa

$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right) \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Hányféle számot kapunk?

$k = 0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)\big) = 1 + i$.

$k = 1$: $\sqrt{2}\big(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)\big) = -1 + i$.

$k = 2$: $\sqrt{2}\big(\cos(5\pi/4) + i\sin(5\pi/4)\big) = -1 - i$.

$k = 3$: $\sqrt{2}\big(\cos(7\pi/4) + i\sin(7\pi/4)\big) = 1 - i$. Tovább?

A negyedik gyökök száma

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$$

A negyedik gyökök száma

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

A negyedik gyökök száma

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$k = 0$:

$k = 4$:

A negyedik gyökök száma

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$k = 0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\ \ \pi/4) + i \sin(\ \ \pi/4)\big) = 1 + i$.

$k = 4$:

A negyedik gyökök száma

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$$
$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\Big(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin\frac{\pi + 2k\pi}{4}\Big) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$k = 0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\ \pi/4) + i \sin(\ \pi/4)\big) = 1 + i$.
$k = 4$: $\sqrt{2}\big(\cos(9\pi/4) + i \sin(9\pi/4)\big)$

A negyedik gyökök száma

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$k = 0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\ \pi/4) + i \sin(\ \pi/4)\big) = 1 + i.$

$k = 4$: $\sqrt{2}\big(\cos(9\pi/4) + i \sin(9\pi/4)\big) = 1 + i.$

A negyedik gyökök száma

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$k = 0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\ \pi/4) + i \sin(\ \pi/4)\big) = 1 + i$.

$k = 4$: $\sqrt{2}\big(\cos(9\pi/4) + i \sin(9\pi/4)\big) = 1 + i$. Mint $k = 0$-ra.

A negyedik gyökök száma

$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$k = 0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\ \pi/4) + i \sin(\ \pi/4)\big) = 1 + i$.
$k = 4$: $\sqrt{2}\big(\cos(9\pi/4) + i \sin(9\pi/4)\big) = 1 + i$. Mint $k = 0$-ra.
Oka: $9\pi/4 - \pi/4 = 2\pi$.

A negyedik gyökök száma

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$$
$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right) \quad (k\in\mathbb{Z})$$

$k=0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\ \pi/4) + i\sin(\ \pi/4)\big) = 1+i.$
$k=4$: $\sqrt{2}\big(\cos(9\pi/4) + i\sin(9\pi/4)\big) = 1+i.$ Mint $k=0$-ra.
Oka: $9\pi/4 - \pi/4 = 2\pi$.

$$\frac{\pi+2(k+4)\pi}{4} =$$

A negyedik gyökök száma

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$k = 0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\ \pi/4) + i \sin(\ \pi/4)\big) = 1 + i$.
$k = 4$: $\sqrt{2}\big(\cos(9\pi/4) + i \sin(9\pi/4)\big) = 1 + i$. Mint $k = 0$-ra.
Oka: $9\pi/4 - \pi/4 = 2\pi$.

$$\frac{\pi + 2(k+4)\pi}{4} = \frac{\pi + 2k\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} =$$

A negyedik gyökök száma

$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$k = 0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\ \ \pi/4) + i \sin(\ \ \pi/4)\big) = 1 + i$.

$k = 4$: $\sqrt{2}\big(\cos(9\pi/4) + i \sin(9\pi/4)\big) = 1 + i$. Mint $k = 0$-ra.

Oka: $9\pi/4 - \pi/4 = 2\pi$.

$$\frac{\pi + 2(k+4)\pi}{4} = \frac{\pi + 2k\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} = \frac{\pi + 2k\pi}{4} + 2\pi.$$

A negyedik gyökök száma

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$$
$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right) \quad (k\in\mathbb{Z})$$

$k=0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\ \pi/4) + i\sin(\ \pi/4)\big) = 1+i$.
$k=4$: $\sqrt{2}\big(\cos(9\pi/4) + i\sin(9\pi/4)\big) = 1+i$. Mint $k=0$-ra.
Oka: $9\pi/4 - \pi/4 = 2\pi$.

$$\frac{\pi+2(k+4)\pi}{4} = \frac{\pi+2k\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} = \frac{\pi+2k\pi}{4} + 2\pi.$$

Ha $m-k$ osztható 4-gyel, akkor m és k ugyanazt adja.

A negyedik gyökök száma

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$k = 0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\ \pi/4) + i \sin(\ \pi/4)\big) = 1 + i$.
$k = 4$: $\sqrt{2}\big(\cos(9\pi/4) + i \sin(9\pi/4)\big) = 1 + i$. Mint $k = 0$-ra.
Oka: $9\pi/4 - \pi/4 = 2\pi$.

$$\frac{\pi + 2(k+4)\pi}{4} = \frac{\pi + 2k\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} = \frac{\pi + 2k\pi}{4} + 2\pi.$$

Ha $m - k$ osztható 4-gyel, akkor m és k ugyanazt adja.
Ezért csak k-nak a 4-gyel való osztási maradéka számít.

A negyedik gyökök száma

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$k = 0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\ \pi/4) + i \sin(\ \pi/4)\big) = 1 + i$.
$k = 4$: $\sqrt{2}\big(\cos(9\pi/4) + i \sin(9\pi/4)\big) = 1 + i$. Mint $k = 0$-ra.
Oka: $9\pi/4 - \pi/4 = 2\pi$.

$$\frac{\pi + 2(k+4)\pi}{4} = \frac{\pi + 2k\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} = \frac{\pi + 2k\pi}{4} + 2\pi.$$

Ha $m - k$ osztható 4-gyel, akkor m és k ugyanazt adja.
Ezért csak k-nak a 4-gyel való osztási maradéka számít.

$\sqrt[4]{-4}$-nek négy értéke van:

A negyedik gyökök száma

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$k = 0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\ \pi/4) + i \sin(\ \pi/4)\big) = 1 + i$.
$k = 4$: $\sqrt{2}\big(\cos(9\pi/4) + i \sin(9\pi/4)\big) = 1 + i$. Mint $k = 0$-ra.
Oka: $9\pi/4 - \pi/4 = 2\pi$.

$$\frac{\pi + 2(k+4)\pi}{4} = \frac{\pi + 2k\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} = \frac{\pi + 2k\pi}{4} + 2\pi.$$

Ha $m - k$ osztható 4-gyel, akkor m és k ugyanazt adja.
Ezért csak k-nak a 4-gyel való osztási maradéka számít.

$\sqrt[4]{-4}$-nek négy értéke van: $1 + i$,

A negyedik gyökök száma

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$k = 0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\ \pi/4) + i \sin(\ \pi/4)\big) = 1 + i$.
$k = 4$: $\sqrt{2}\big(\cos(9\pi/4) + i \sin(9\pi/4)\big) = 1 + i$. Mint $k = 0$-ra.
Oka: $9\pi/4 - \pi/4 = 2\pi$.

$$\frac{\pi + 2(k+4)\pi}{4} = \frac{\pi + 2k\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} = \frac{\pi + 2k\pi}{4} + 2\pi.$$

Ha $m - k$ osztható 4-gyel, akkor m és k ugyanazt adja.
Ezért csak k-nak a 4-gyel való osztási maradéka számít.

$\sqrt[4]{-4}$-nek négy értéke van: $1 + i$, $-1 + i$,

A negyedik gyökök száma

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$k = 0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\ \pi/4) + i \sin(\ \pi/4)\big) = 1 + i$.
$k = 4$: $\sqrt{2}\big(\cos(9\pi/4) + i \sin(9\pi/4)\big) = 1 + i$. Mint $k = 0$-ra.
Oka: $9\pi/4 - \pi/4 = 2\pi$.

$$\frac{\pi + 2(k+4)\pi}{4} = \frac{\pi + 2k\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} = \frac{\pi + 2k\pi}{4} + 2\pi.$$

Ha $m - k$ osztható 4-gyel, akkor m és k ugyanazt adja.
Ezért csak k-nak a 4-gyel való osztási maradéka számít.

$\sqrt[4]{-4}$-nek négy értéke van: $1 + i$, $-1 + i$, $-1 - i$,

A negyedik gyökök száma

$$z = -4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$k = 0$: $\sqrt{2}\big(\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4)\big) = 1 + i$.

$k = 4$: $\sqrt{2}\big(\cos(9\pi/4) + i \sin(9\pi/4)\big) = 1 + i$. Mint $k = 0$-ra.

Oka: $9\pi/4 - \pi/4 = 2\pi$.

$$\frac{\pi + 2(k+4)\pi}{4} = \frac{\pi + 2k\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} = \frac{\pi + 2k\pi}{4} + 2\pi.$$

Ha $m - k$ osztható 4-gyel, akkor m és k ugyanazt adja.

Ezért csak k-nak a 4-gyel való osztási maradéka számít.

$\sqrt[4]{-4}$-nek négy értéke van: $1 + i$, $-1 + i$, $-1 - i$, $1 - i$.

Az n-edik gyökök száma

Tétel

Minden nem nulla komplex számnak n darab n-edik gyöke van.

Az n-edik gyökök száma

Tétel

Minden nem nulla komplex számnak n darab n-edik gyöke van.

Bizonyítás

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Az n-edik gyökök száma

Tétel

Minden nem nulla komplex számnak n darab n-edik gyöke van.

Bizonyítás

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Ha $m - k$ osztható n-nel,

Az n-edik gyökök száma

Tétel

Minden nem nulla komplex számnak n darab n-edik gyöke van.

Bizonyítás

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\ (k\in\mathbb{Z})$$

Ha $m-k$ osztható n-nel, azaz $m = k + n\ell$ (ℓ egész),

Az n-edik gyökök száma

Tétel

Minden nem nulla komplex számnak n darab n-edik gyöke van.

Bizonyítás

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Ha $m-k$ osztható n-nel, azaz $m = k + n\ell$ (ℓ egész), akkor

$$\frac{\pi+2m\pi}{n} =$$

Az n-edik gyökök száma

Tétel

Minden nem nulla komplex számnak n darab n-edik gyöke van.

Bizonyítás

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Ha $m-k$ osztható n-nel, azaz $m = k + n\ell$ (ℓ egész), akkor

$$\frac{\pi+2m\pi}{n} = \frac{\pi+2k\pi}{n} + \frac{2n\ell\pi}{n} =$$

Az n-edik gyökök száma

Tétel

Minden nem nulla komplex számnak n darab n-edik gyöke van.

Bizonyítás

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Ha $m-k$ osztható n-nel, azaz $m = k + n\ell$ (ℓ egész), akkor

$$\frac{\pi+2m\pi}{n} = \frac{\pi+2k\pi}{n} + \frac{2n\ell\pi}{n} = \frac{\pi+2k\pi}{n} + \ell\cdot 2\pi\,.$$

Az n-edik gyökök száma

Tétel

Minden nem nulla komplex számnak n darab n-edik gyöke van.

Bizonyítás

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\ (k\in\mathbb{Z})$$

Ha $m-k$ osztható n-nel, azaz $m = k + n\ell$ (ℓ egész), akkor

$$\frac{\pi+2m\pi}{n} = \frac{\pi+2k\pi}{n} + \frac{2n\ell\pi}{n} = \frac{\pi+2k\pi}{n} + \ell\cdot 2\pi.$$

Ezért csak k-nak az n-nel való osztási maradéka számít.

Az n-edik gyökök száma

Tétel

Minden nem nulla komplex számnak n darab n-edik gyöke van.

Bizonyítás

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Ha $m-k$ osztható n-nel, azaz $m = k + n\ell$ (ℓ egész), akkor

$$\frac{\pi+2m\pi}{n} = \frac{\pi+2k\pi}{n} + \frac{2n\ell\pi}{n} = \frac{\pi+2k\pi}{n} + \ell\cdot 2\pi.$$

Ezért csak k-nak az n-nel való osztási maradéka számít.

Házi feladat (a bizonyításhoz hozzátartozik)

Ha $m-k$ nem osztható n-nel,

Az n-edik gyökök száma

Tétel

Minden nem nulla komplex számnak n darab n-edik gyöke van.

Bizonyítás

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Ha $m-k$ osztható n-nel, azaz $m = k + n\ell$ (ℓ egész), akkor

$$\frac{\pi+2m\pi}{n} = \frac{\pi+2k\pi}{n} + \frac{2n\ell\pi}{n} = \frac{\pi+2k\pi}{n} + \ell\cdot 2\pi\,.$$

Ezért csak k-nak az n-nel való osztási maradéka számít.

Házi feladat (a bizonyításhoz hozzátartozik)

Ha $m-k$ nem osztható n-nel, akkor a szögek különbsége nem lesz 2π egész többszöröse,

Az n-edik gyökök száma

Tétel

Minden nem nulla komplex számnak n darab n-edik gyöke van.

Bizonyítás

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Ha $m-k$ osztható n-nel, azaz $m=k+n\ell$ (ℓ egész), akkor

$$\frac{\pi+2m\pi}{n} = \frac{\pi+2k\pi}{n} + \frac{2n\ell\pi}{n} = \frac{\pi+2k\pi}{n} + \ell\cdot 2\pi.$$

Ezért csak k-nak az n-nel való osztási maradéka számít.

Házi feladat (a bizonyításhoz hozzátartozik)

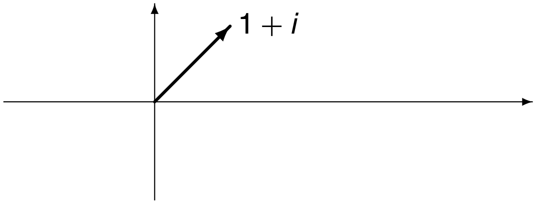
Ha $m-k$ nem osztható n-nel, akkor a szögek különbsége nem lesz 2π egész többszöröse, és így a két n-edik gyök különböző.

A negyedik gyökök elhelyezkedése

$\sqrt[4]{-4}$-nek négy értéke van:

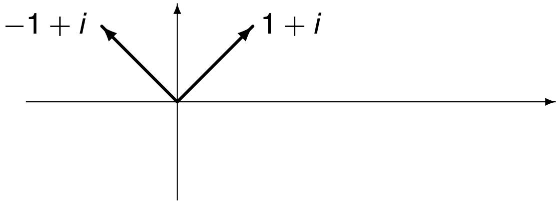
A negyedik gyökök elhelyezkedése

$\sqrt[4]{-4}$-nek négy értéke van: $1+i$,



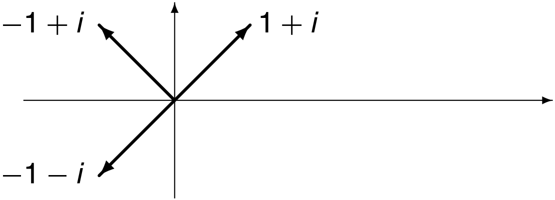
A negyedik gyökök elhelyezkedése

$\sqrt[4]{-4}$-nek négy értéke van: $1+i$, $-1+i$,



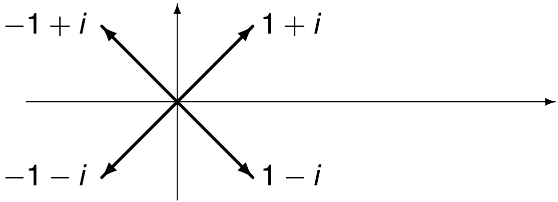
A negyedik gyökök elhelyezkedése

$\sqrt[4]{-4}$-nek négy értéke van: $1+i,\ -1+i,\ -1-i,$



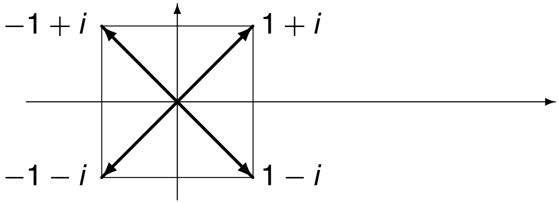
A negyedik gyökök elhelyezkedése

$\sqrt[4]{-4}$-nek négy értéke van: $1+i, \ -1+i, \ -1-i, \ 1-i$.



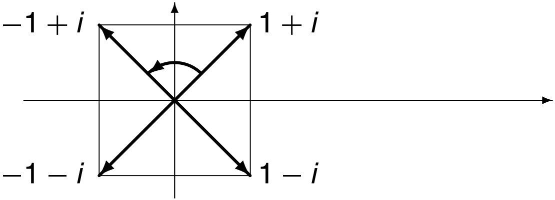
A negyedik gyökök elhelyezkedése

$\sqrt[4]{-4}$-nek négy értéke van: $1+i$, $-1+i$, $-1-i$, $1-i$.
Ezek egy négyzet négy csúcsában helyezkednek el, melynek középpontja az origó.



A negyedik gyökök elhelyezkedése

$\sqrt[4]{-4}$-nek négy értéke van: $1+i$, $-1+i$, $-1-i$, $1-i$.
Ezek egy négyzet négy csúcsában helyezkednek el, melynek középpontja az origó.

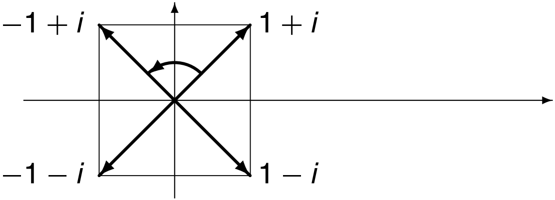


Bizonyítás

$1+i$-nek a $+90^\circ$-os elforgatottja $-1+i$, mert

A negyedik gyökök elhelyezkedése

$\sqrt[4]{-4}$-nek négy értéke van: $1+i,\ \ -1+i,\ \ -1-i,\ \ 1-i$.
Ezek egy négyzet négy csúcsában helyezkednek el, melynek középpontja az origó.



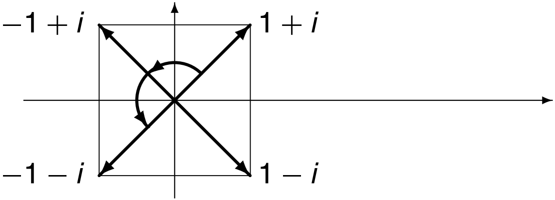
Bizonyítás

$1+i$-nek a $+90°$-os elforgatottja $-1+i$, mert $i(1+i) = -1+i$.

$i = \cos 90° + i \sin 90°$.

A negyedik gyökök elhelyezkedése

$\sqrt[4]{-4}$-nek négy értéke van: $1+i$, $-1+i$, $-1-i$, $1-i$.
Ezek egy négyzet négy csúcsában helyezkednek el, melynek középpontja az origó.



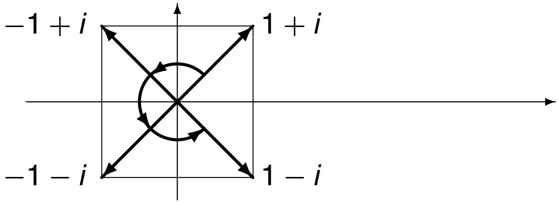
Bizonyítás

$1+i$-nek a $+90°$-os elforgatottja $-1+i$, mert $i(1+i) = -1+i$.
Hasonlóan $i(-1+i) = -1-i$,

$i = \cos 90° + i \sin 90°$.

A negyedik gyökök elhelyezkedése

$\sqrt[4]{-4}$-nek négy értéke van: $1+i, \; -1+i, \; -1-i, \; 1-i$.
Ezek egy négyzet négy csúcsában helyezkednek el, melynek középpontja az origó.



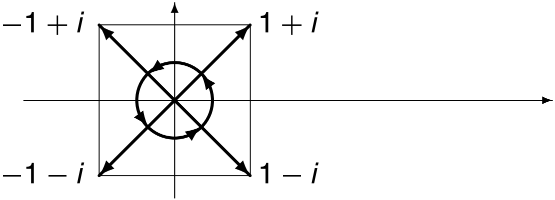
Bizonyítás

$1+i$-nek a $+90^\circ$-os elforgatottja $-1+i$, mert $i(1+i)=-1+i$.
Hasonlóan $i(-1+i)=-1-i, \; i(-1-i)=1-i$,

$i=\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ$.

A negyedik gyökök elhelyezkedése

$\sqrt[4]{-4}$-nek négy értéke van: $1+i, \ \ -1+i, \ \ -1-i, \ \ 1-i$.
Ezek egy négyzet négy csúcsában helyezkednek el, melynek középpontja az origó.



Bizonyítás

$1+i$-nek a $+90^\circ$-os elforgatottja $-1+i$, mert $i(1+i) = -1+i$.
Hasonlóan $i(-1+i) = -1-i$, $\ i(-1-i) = 1-i$, $\ i(1-i) = 1+i$.

$i = \cos 90^\circ + i \sin 90^\circ$.

Az n-edik gyökök elhelyezkedése

Tétel

Egy nem nulla komplex szám n-edik gyökei szabályos n-szöget alkotnak a komplex számsíkon, melynek középpontja az origó.

Az n-edik gyökök elhelyezkedése

Tétel

Egy nem nulla komplex szám n-edik gyökei szabályos n-szöget alkotnak a komplex számsíkon, melynek középpontja az origó.

Bizonyítás

Ha $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, akkor $\sqrt[n]{z}$ értékei

Az n-edik gyökök elhelyezkedése

Tétel

Egy nem nulla komplex szám n-edik gyökei szabályos n-szöget alkotnak a komplex számsíkon, melynek középpontja az origó.

Bizonyítás

Ha $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, akkor $\sqrt[n]{z}$ értékei $w_1, w_2, \ldots, w_n$, ahol $w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Az n-edik gyökök elhelyezkedése

Tétel

Egy nem nulla komplex szám n-edik gyökei szabályos n-szöget alkotnak a komplex számsíkon, melynek középpontja az origó.

Bizonyítás

Ha $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, akkor $\sqrt[n]{z}$ értékei $w_1, w_2, \ldots, w_n$,

ahol $w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Ha $\varepsilon = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$,

Az n-edik gyökök elhelyezkedése

Tétel

Egy nem nulla komplex szám n-edik gyökei szabályos n-szöget alkotnak a komplex számsíkon, melynek középpontja az origó.

Bizonyítás

Ha $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, akkor $\sqrt[n]{z}$ értékei $w_1, w_2, \ldots, w_n$, ahol $w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Ha $\varepsilon = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$, akkor $\varepsilon w_k = w_{k+1}$, mert

Az n-edik gyökök elhelyezkedése

Tétel

Egy nem nulla komplex szám n-edik gyökei szabályos n-szöget alkotnak a komplex számsíkon, melynek középpontja az origó.

Bizonyítás

Ha $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, akkor $\sqrt[n]{z}$ értékei $w_1, w_2, \ldots, w_n$,
ahol $w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)$ $(k \in \mathbb{Z})$.
Ha $\varepsilon = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$, akkor $\varepsilon w_k = w_{k+1}$, mert

$$\frac{\alpha+2k\pi}{n} + \frac{2\pi}{n} =$$

Az n-edik gyökök elhelyezkedése

Tétel

Egy nem nulla komplex szám n-edik gyökei szabályos n-szöget alkotnak a komplex számsíkon, melynek középpontja az origó.

Bizonyítás

Ha $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, akkor $\sqrt[n]{z}$ értékei $w_1, w_2, \ldots, w_n$, ahol $w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\alpha+2k\pi}{n}\right)$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Ha $\varepsilon = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$, akkor $\varepsilon w_k = w_{k+1}$, mert

$$\frac{\alpha+2k\pi}{n} + \frac{2\pi}{n} = \frac{\alpha+2(k+1)\pi}{n}.$$

Az n-edik gyökök elhelyezkedése

Tétel

Egy nem nulla komplex szám n-edik gyökei szabályos n-szöget alkotnak a komplex számsíkon, melynek középpontja az origó.

Bizonyítás

Ha $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, akkor $\sqrt[n]{z}$ értékei $w_1, w_2, \ldots, w_n$, ahol $w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Ha $\varepsilon = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$, akkor $\varepsilon w_k = w_{k+1}$, mert

$$\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + \frac{2\pi}{n} = \frac{\alpha + 2(k+1)\pi}{n}.$$

De az ε-nal szorzás $2\pi/n$-nel forgat,

Az n-edik gyökök elhelyezkedése

Tétel

Egy nem nulla komplex szám n-edik gyökei szabályos n-szöget alkotnak a komplex számsíkon, melynek középpontja az origó.

Bizonyítás

Ha $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, akkor $\sqrt[n]{z}$ értékei $w_1, w_2, \ldots, w_n$,

ahol $w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\alpha+2k\pi}{n}\right)$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Ha $\varepsilon = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$, akkor $\varepsilon w_k = w_{k+1}$, mert

$$\frac{\alpha+2k\pi}{n} + \frac{2\pi}{n} = \frac{\alpha+2(k+1)\pi}{n}.$$

De az ε-nal szorzás $2\pi/n$-nel forgat, ami a szabályos n-szögben egy oldalhoz tartozó középponti szög.

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük.

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük.

$1 = 1(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük.

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) \ (k \in \mathbb{Z})$$

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció

Az 1 szám n-edik gyökeit *n-edik egységgyököknek* nevezzük. Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \ (k \in \mathbb{Z})$$

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció

Az 1 szám n-edik gyökeit *n-edik egységgyököknek* nevezzük.
Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$.
Összesen n darab n-edik egységgyök van.

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció

Az 1 szám n-edik gyökeit *n-edik egységgyököknek* nevezzük. Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$. Összesen n darab n-edik egységgyök van.

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) \ (k \in \mathbb{Z})$$

Példa

A negyedik egységgyökök a következők.

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük. Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$. Összesen n darab n-edik egységgyök van.

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Példa

A negyedik egységgyökök a következők.

$\cos(2\pi/4) + i\sin(2\pi/4)$

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció

Az 1 szám n-edik gyökeit *n-edik egységgyököknek* nevezzük. Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$. Összesen n darab n-edik egységgyök van.

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Példa

A negyedik egységgyökök a következők.

$\cos(2\pi/4) + i\sin(2\pi/4) = \quad 0 + 1i$

Az 1 szám *n*-edik gyökei

Definíció

Az 1 szám n-edik gyökeit *n-edik egységgyököknek* nevezzük.
Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$.
Összesen n darab n-edik egységgyök van.

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\ (k \in \mathbb{Z})$$

Példa

A negyedik egységgyökök a következők.
$\cos(2\pi/4) + i\sin(2\pi/4) = \quad 0 + 1i = \quad i$.

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció

Az 1 szám n-edik gyökeit *n-edik egységgyököknek* nevezzük.
Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$.
Összesen n darab n-edik egységgyök van.

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Példa

A negyedik egységgyökök a következők.
$\cos(2\pi/4) + i\sin(2\pi/4) = \quad 0 + 1i = \quad i$.
$\cos(4\pi/4) + i\sin(4\pi/4)$

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció

Az 1 szám n-edik gyökeit *n-edik egységgyököknek* nevezzük.
Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$.
Összesen n darab n-edik egységgyök van.

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Példa

A negyedik egységgyökök a következők.
$\cos(2\pi/4) + i\sin(2\pi/4) = \quad 0 + 1i = \quad i.$
$\cos(4\pi/4) + i\sin(4\pi/4) = -1 + 0i$

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció

Az 1 szám n-edik gyökeit *n-edik egységgyököknek* nevezzük.
Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$.
Összesen n darab n-edik egységgyök van.

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) \ (k \in \mathbb{Z})$$

Példa

A negyedik egységgyökök a következők.
$\cos(2\pi/4) + i\sin(2\pi/4) = \quad 0 + 1i = \quad i.$
$\cos(4\pi/4) + i\sin(4\pi/4) = -1 + 0i = -1.$

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció

Az 1 szám n-edik gyökeit *n-edik egységgyököknek* nevezzük. Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$. Összesen n darab n-edik egységgyök van.

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Példa

A negyedik egységgyökök a következők.

$\cos(2\pi/4) + i\sin(2\pi/4) = 0 + 1i = i$.

$\cos(4\pi/4) + i\sin(4\pi/4) = -1 + 0i = -1$.

$\cos(6\pi/4) + i\sin(6\pi/4)$

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció

Az 1 szám n-edik gyökeit *n-edik egységgyököknek* nevezzük.
Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$.
Összesen n darab n-edik egységgyök van.

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Példa

A negyedik egységgyökök a következők.

$\cos(2\pi/4) + i\sin(2\pi/4) = 0 + 1i = i.$

$\cos(4\pi/4) + i\sin(4\pi/4) = -1 + 0i = -1.$

$\cos(6\pi/4) + i\sin(6\pi/4) = 0 - 1i$

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük. Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$. Összesen n darab n-edik egységgyök van.

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Példa

A negyedik egységgyökök a következők.

$\cos(2\pi/4) + i\sin(2\pi/4) = 0 + 1i = i$.

$\cos(4\pi/4) + i\sin(4\pi/4) = -1 + 0i = -1$.

$\cos(6\pi/4) + i\sin(6\pi/4) = 0 - 1i = -i$.

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük. Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$. Összesen n darab n-edik egységgyök van.

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Példa

A negyedik egységgyökök a következők.

$\cos(2\pi/4) + i\sin(2\pi/4) = 0 + 1i = i.$

$\cos(4\pi/4) + i\sin(4\pi/4) = -1 + 0i = -1.$

$\cos(6\pi/4) + i\sin(6\pi/4) = 0 - 1i = -i.$

$\cos(8\pi/4) + i\sin(8\pi/4)$

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük.
Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$.
Összesen n darab n-edik egységgyök van.

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Példa

A negyedik egységgyökök a következők.

$\cos(2\pi/4) + i\sin(2\pi/4) = \quad 0 + 1i = \quad i.$

$\cos(4\pi/4) + i\sin(4\pi/4) = -1 + 0i = -1.$

$\cos(6\pi/4) + i\sin(6\pi/4) = \quad 0 - 1i = -i.$

$\cos(8\pi/4) + i\sin(8\pi/4) = \quad 1 + 0i$

Az 1 szám n-edik gyökei

Definíció

Az 1 szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük. Ezek a $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ számok, ahol $k \in \mathbb{Z}$. Összesen n darab n-edik egységgyök van.

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Példa

A negyedik egységgyökök a következők.

$\cos(2\pi/4) + i\sin(2\pi/4) = 0 + 1i = i$.

$\cos(4\pi/4) + i\sin(4\pi/4) = -1 + 0i = -1$.

$\cos(6\pi/4) + i\sin(6\pi/4) = 0 - 1i = -i$.

$\cos(8\pi/4) + i\sin(8\pi/4) = 1 + 0i = 1$.

A hatodik egységgyökök

Példa

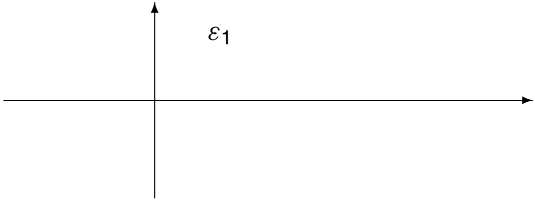
A hatodik egységgyökök a következők.

A hatodik egységgyökök

Példa

A hatodik egységgyökök a következők.

$\varepsilon_1 = \cos(\ 2\pi/6) + i \sin(\ 2\pi/6)$

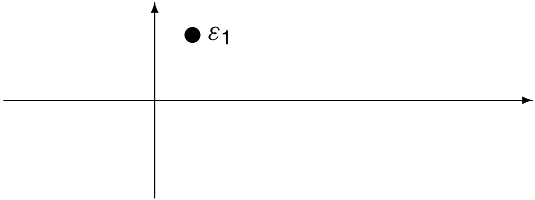


A hatodik egységgyökök

Példa

A hatodik egységgyökök a következők.

$\varepsilon_1 = \cos(\ 2\pi/6) + i \sin(\ 2\pi/6) = \quad 1/2 + i\sqrt{3}/2.$



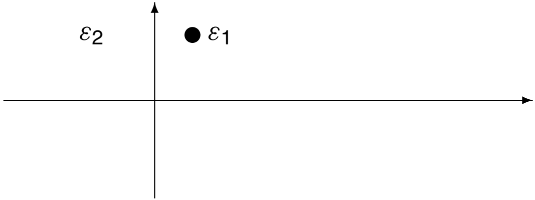
A hatodik egységgyökök

Példa

A hatodik egységgyökök a következők.

$\varepsilon_1 = \cos(\ 2\pi/6) + i\sin(\ 2\pi/6) = \ \ 1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_2 = \cos(\ 4\pi/6) + i\sin(\ 4\pi/6)$



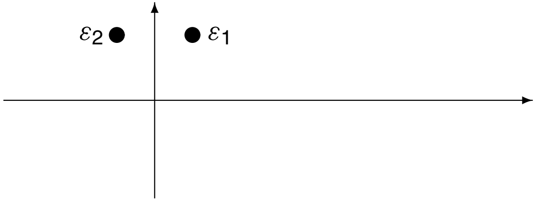
A hatodik egységgyökök

Példa

A hatodik egységgyökök a következők.

$\varepsilon_1 = \cos(2\pi/6) + i\sin(2\pi/6) = 1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_2 = \cos(4\pi/6) + i\sin(4\pi/6) = -1/2 + i\sqrt{3}/2.$



A hatodik egységgyökök

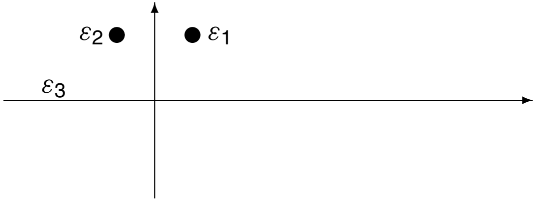
Példa

A hatodik egységgyökök a következők.

$\varepsilon_1 = \cos(\ 2\pi/6) + i\sin(\ 2\pi/6) = \ \ 1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_2 = \cos(\ 4\pi/6) + i\sin(\ 4\pi/6) = -1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_3 = \cos(\ 6\pi/6) + i\sin(\ 6\pi/6)$



A hatodik egységgyökök

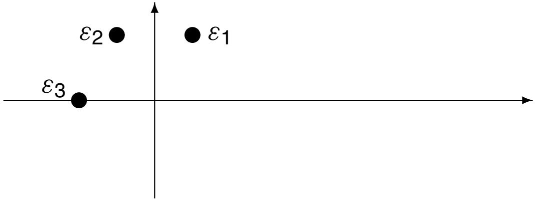
Példa

A hatodik egységgyökök a következők.

$\varepsilon_1 = \cos(\ 2\pi/6) + i\sin(\ 2\pi/6) = \ \ 1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_2 = \cos(\ 4\pi/6) + i\sin(\ 4\pi/6) = -1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_3 = \cos(\ 6\pi/6) + i\sin(\ 6\pi/6) = -1.$



A hatodik egységgyökök

Példa

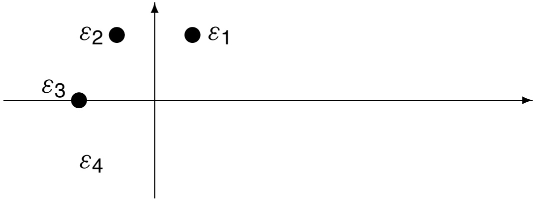
A hatodik egységgyökök a következők.

$\varepsilon_1 = \cos(2\pi/6) + i\sin(2\pi/6) = 1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_2 = \cos(4\pi/6) + i\sin(4\pi/6) = -1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_3 = \cos(6\pi/6) + i\sin(6\pi/6) = -1.$

$\varepsilon_4 = \cos(8\pi/6) + i\sin(8\pi/6)$



A hatodik egységgyökök

Példa

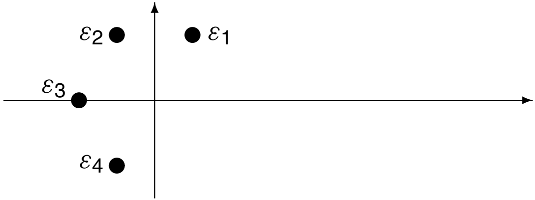
A hatodik egységgyökök a következők.

$\varepsilon_1 = \cos(\ 2\pi/6) + i\sin(\ 2\pi/6) = \ \ 1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_2 = \cos(\ 4\pi/6) + i\sin(\ 4\pi/6) = -1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_3 = \cos(\ 6\pi/6) + i\sin(\ 6\pi/6) = -1.$

$\varepsilon_4 = \cos(\ 8\pi/6) + i\sin(\ 8\pi/6) = -1/2 - i\sqrt{3}/2.$



A hatodik egységgyökök

Példa

A hatodik egységgyökök a következők.

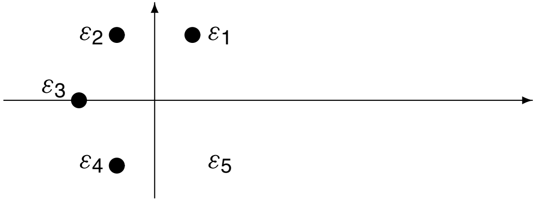
$\varepsilon_1 = \cos(\ 2\pi/6) + i\sin(\ 2\pi/6) = \ \ 1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_2 = \cos(\ 4\pi/6) + i\sin(\ 4\pi/6) = -1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_3 = \cos(\ 6\pi/6) + i\sin(\ 6\pi/6) = -1.$

$\varepsilon_4 = \cos(\ 8\pi/6) + i\sin(\ 8\pi/6) = -1/2 - i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_5 = \cos(10\pi/6) + i\sin(10\pi/6)$



A hatodik egységgyökök

Példa

A hatodik egységgyökök a következők.

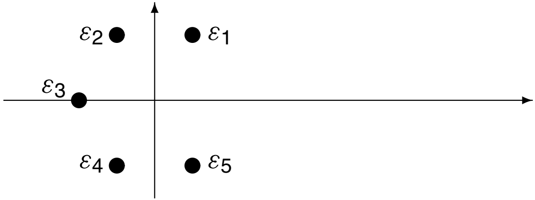
$\varepsilon_1 = \cos(2\pi/6) + i\sin(2\pi/6) = 1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_2 = \cos(4\pi/6) + i\sin(4\pi/6) = -1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_3 = \cos(6\pi/6) + i\sin(6\pi/6) = -1.$

$\varepsilon_4 = \cos(8\pi/6) + i\sin(8\pi/6) = -1/2 - i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_5 = \cos(10\pi/6) + i\sin(10\pi/6) = 1/2 - i\sqrt{3}/2.$

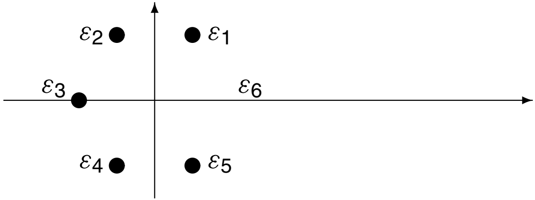


A hatodik egységgyökök

Példa

A hatodik egységgyökök a következők.

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \cos(2\pi/6) + i\sin(2\pi/6) = 1/2 + i\sqrt{3}/2.\\
\varepsilon_2 &= \cos(4\pi/6) + i\sin(4\pi/6) = -1/2 + i\sqrt{3}/2.\\
\varepsilon_3 &= \cos(6\pi/6) + i\sin(6\pi/6) = -1.\\
\varepsilon_4 &= \cos(8\pi/6) + i\sin(8\pi/6) = -1/2 - i\sqrt{3}/2.\\
\varepsilon_5 &= \cos(10\pi/6) + i\sin(10\pi/6) = 1/2 - i\sqrt{3}/2.\\
\varepsilon_6 &= \cos(12\pi/6) + i\sin(12\pi/6)
\end{aligned}
$$



A hatodik egységgyökök

Példa

A hatodik egységgyökök a következők.

$\varepsilon_1 = \cos(2\pi/6) + i\sin(2\pi/6) = 1/2 + i\sqrt{3}/2.$

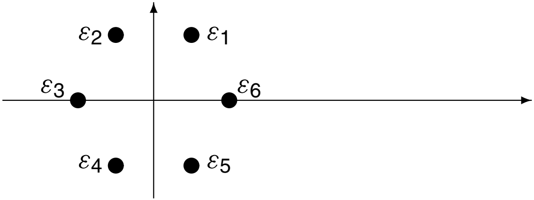
$\varepsilon_2 = \cos(4\pi/6) + i\sin(4\pi/6) = -1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_3 = \cos(6\pi/6) + i\sin(6\pi/6) = -1.$

$\varepsilon_4 = \cos(8\pi/6) + i\sin(8\pi/6) = -1/2 - i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_5 = \cos(10\pi/6) + i\sin(10\pi/6) = 1/2 - i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_6 = \cos(12\pi/6) + i\sin(12\pi/6) = 1.$



A hatodik egységgyökök

Példa

A hatodik egységgyökök a következők.

$\varepsilon_1 = \cos(2\pi/6) + i\sin(2\pi/6) = 1/2 + i\sqrt{3}/2.$

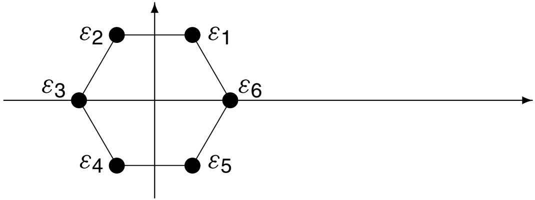
$\varepsilon_2 = \cos(4\pi/6) + i\sin(4\pi/6) = -1/2 + i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_3 = \cos(6\pi/6) + i\sin(6\pi/6) = -1.$

$\varepsilon_4 = \cos(8\pi/6) + i\sin(8\pi/6) = -1/2 - i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_5 = \cos(10\pi/6) + i\sin(10\pi/6) = 1/2 - i\sqrt{3}/2.$

$\varepsilon_6 = \cos(12\pi/6) + i\sin(12\pi/6) = 1.$



Szabályos hatszöget alkotnak.

Gyökvonás egységgyökök segítségével

Állítás

Legyen $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$.

Gyökvonás egységgyökök segítségével

Állítás

Legyen $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$. Ekkor $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$.

Gyökvonás egységgyökök segítségével

Állítás

Legyen $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$. Ekkor $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$.
Az n-edik egységgyökök a $\cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ hatványai.

Gyökvonás egységgyökök segítségével

Állítás

Legyen $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$. Ekkor $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$.
Az n-edik egységgyökök a $\cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ hatványai.
A k tetszőleges egész, negatív is lehet.

Gyökvonás egységgyökök segítségével

Állítás

Legyen $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$. Ekkor $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$.
Az n-edik egységgyökök a $\cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ hatványai.
A k tetszőleges egész, negatív is lehet.

Tétel

Ha a $z \neq 0$ számnak w_0 az egyik n-edik gyöke,

Gyökvonás egységgyökök segítségével

Állítás

Legyen $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$. Ekkor $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$.
Az n-edik egységgyökök a $\cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ hatványai.
A k tetszőleges egész, negatív is lehet.

Tétel

Ha a $z \neq 0$ számnak w_0 az egyik n-edik gyöke,
akkor $\varepsilon_k w_0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ az összes n-edik gyöke.

Gyökvonás egységgyökök segítségével

Állítás

Legyen $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$. Ekkor $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$.
Az n-edik egységgyökök a $\cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ hatványai.
A k tetszőleges egész, negatív is lehet.

Tétel

Ha a $z \neq 0$ számnak w_0 az egyik n-edik gyöke,
akkor $\varepsilon_k w_0$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ az összes n-edik gyöke.
Vagyis w_0-t végig kell szorozni az n-edik egységgyökökkel.

Gyökvonás egységgyökök segítségével

Állítás

Legyen $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$. Ekkor $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$.
Az n-edik egységgyökök a $\cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ hatványai.
A k tetszőleges egész, negatív is lehet.

Tétel

Ha a $z \neq 0$ számnak w_0 az egyik n-edik gyöke,
akkor $\varepsilon_k w_0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ az összes n-edik gyöke.
Vagyis w_0-t végig kell szorozni az n-edik egységgyökökkel.

Bizonyítás

$$w^n = z \iff w^n = w_0^n$$

Gyökvonás egységgyökök segítségével

Állítás

Legyen $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$. Ekkor $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$.
Az n-edik egységgyökök a $\cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ hatványai.
A k tetszőleges egész, negatív is lehet.

Tétel

Ha a $z \neq 0$ számnak w_0 az egyik n-edik gyöke,
akkor $\varepsilon_k w_0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ az összes n-edik gyöke.
Vagyis w_0-t végig kell szorozni az n-edik egységgyökökkel.

Bizonyítás

$$w^n = z \iff w^n = w_0^n \iff (w/w_0)^n = 1,$$

Gyökvonás egységgyökök segítségével

Állítás

Legyen $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$. Ekkor $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$.
Az n-edik egységgyökök a $\cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ hatványai.
A k tetszőleges egész, negatív is lehet.

Tétel

Ha a $z \neq 0$ számnak w_0 az egyik n-edik gyöke,
akkor $\varepsilon_k w_0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ az összes n-edik gyöke.
Vagyis w_0-t végig kell szorozni az n-edik egységgyökökkel.

Bizonyítás

$w^n = z \iff w^n = w_0^n \iff (w/w_0)^n = 1$, akkor és csak akkor,
ha w/w_0 egy n-edik egységgyök.

Gyökvonás egységgyökök segítségével

Állítás

Legyen $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$. Ekkor $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$.
Az n-edik egységgyökök a $\cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ hatványai.
A k tetszőleges egész, negatív is lehet.

Tétel

Ha a $z \neq 0$ számnak w_0 az egyik n-edik gyöke,
akkor $\varepsilon_k w_0$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ az összes n-edik gyöke.
Vagyis w_0-t végig kell szorozni az n-edik egységgyökökkel.

Bizonyítás

$w^n = z \iff w^n = w_0^n \iff (w/w_0)^n = 1$, akkor és csak akkor,
ha w/w_0 egy n-edik egységgyök. Ha $w/w_0 = \varepsilon$, akkor $w = \varepsilon w_0$.

A hatványok száma

Kérdés

Hány hatványa van egy nem nulla komplex számnak?

A hatványok száma

Kérdés

Hány hatványa van egy nem nulla komplex számnak?

Példák

Az 1 minden hatványa 1,

A hatványok száma

Kérdés

Hány hatványa van egy nem nulla komplex számnak?

Példák

Az 1 minden hatványa 1, azaz 1 darab hatványa van.

A hatványok száma

Kérdés

Hány hatványa van egy nem nulla komplex számnak?

Példák

Az 1 minden hatványa 1, azaz 1 darab hatványa van.
A -1 hatványai 1 és -1,

A hatványok száma

Kérdés

Hány hatványa van egy nem nulla komplex számnak?

Példák

Az 1 minden hatványa 1, azaz 1 darab hatványa van.
A -1 hatványai 1 és -1, azaz 2 darab hatványa van.

A hatványok száma

Kérdés

Hány hatványa van egy nem nulla komplex számnak?

Példák

Az 1 minden hatványa 1, azaz 1 darab hatványa van.
A -1 hatványai 1 és -1, azaz 2 darab hatványa van.
Az i hatványai

A hatványok száma

Kérdés

Hány hatványa van egy nem nulla komplex számnak?

Példák

Az 1 minden hatványa 1, azaz 1 darab hatványa van.
A -1 hatványai 1 és -1, azaz 2 darab hatványa van.
Az i hatványai i,

$i^1 = i$,

A hatványok száma

Kérdés

Hány hatványa van egy nem nulla komplex számnak?

Példák

Az 1 minden hatványa 1, azaz 1 darab hatványa van.
A -1 hatványai 1 és -1, azaz 2 darab hatványa van.
Az i hatványai i, -1,

$i^1 = i$, $i^2 = -1$,

A hatványok száma

Kérdés

Hány hatványa van egy nem nulla komplex számnak?

Példák

Az 1 minden hatványa 1, azaz 1 darab hatványa van.
A -1 hatványai 1 és -1, azaz 2 darab hatványa van.
Az i hatványai i, -1, $-i$,

$i^1 = i,\ \ i^2 = -1,\ \ i^3 = -i,$

A hatványok száma

Kérdés

Hány hatványa van egy nem nulla komplex számnak?

Példák

Az 1 minden hatványa 1, azaz 1 darab hatványa van.
A -1 hatványai 1 és -1, azaz 2 darab hatványa van.
Az i hatványai i, -1, $-i$, 1,

$$i^1 = i,\ \ i^2 = -1,\ \ i^3 = -i,\ \ i^4 = 1,$$

A hatványok száma

Kérdés

Hány hatványa van egy nem nulla komplex számnak?

Példák

Az 1 minden hatványa 1, azaz 1 darab hatványa van.
A -1 hatványai 1 és -1, azaz 2 darab hatványa van.
Az i hatványai i, -1, $-i$, 1,

$$i^1 = i,\ \ i^2 = -1,\ \ i^3 = -i,\ \ i^4 = 1,\ \ i^5 = i = i^1,$$

A hatványok száma

Kérdés

Hány hatványa van egy nem nulla komplex számnak?

Példák

Az 1 minden hatványa 1, azaz 1 darab hatványa van.
A -1 hatványai 1 és -1, azaz 2 darab hatványa van.
Az i hatványai i, -1, $-i$, 1,

$i^1 = i, \ \ i^2 = -1, \ \ i^3 = -i, \ \ i^4 = 1, \ \ i^5 = i = i^1, \ \ i^6 = -1 = i^2$, stb.

A hatványok száma

Kérdés

Hány hatványa van egy nem nulla komplex számnak?

Példák

Az 1 minden hatványa 1, azaz 1 darab hatványa van.
A -1 hatványai 1 és -1, azaz 2 darab hatványa van.
Az i hatványai i, -1, $-i$, 1,

$i^1 = i,\ \ i^2 = -1,\ \ i^3 = -i,\ \ i^4 = 1,\ \ i^5 = i = i^1,\ \ i^6 = -1 = i^2$, stb.
Nempozitív kitevőkre:

A hatványok száma

Kérdés

Hány hatványa van egy nem nulla komplex számnak?

Példák

Az 1 minden hatványa 1, azaz 1 darab hatványa van.
A -1 hatványai 1 és -1, azaz 2 darab hatványa van.
Az i hatványai i, -1, $-i$, 1,

$i^1 = i,\ \ i^2 = -1,\ \ i^3 = -i,\ \ i^4 = 1,\ \ i^5 = i = i^1,\ \ i^6 = -1 = i^2$, stb.
Nempozitív kitevőkre: $i^0 = 1 = i^4$,

A hatványok száma

Kérdés

Hány hatványa van egy nem nulla komplex számnak?

Példák

Az 1 minden hatványa 1, azaz 1 darab hatványa van.
A -1 hatványai 1 és -1, azaz 2 darab hatványa van.
Az i hatványai i, -1, $-i$, 1,

$i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i = i^1$, $i^6 = -1 = i^2$, stb.
Nempozitív kitevőkre: $i^0 = 1 = i^4$, $i^{-1} = 1/i = -i = i^3$,

A hatványok száma

Kérdés

Hány hatványa van egy nem nulla komplex számnak?

Példák

Az 1 minden hatványa 1, azaz 1 darab hatványa van.
A -1 hatványai 1 és -1, azaz 2 darab hatványa van.
Az i hatványai i, -1, $-i$, 1,

$i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i = i^1$, $i^6 = -1 = i^2$, stb.
Nempozitív kitevőkre: $i^0 = 1 = i^4$, $i^{-1} = 1/i = -i = i^3$,
$i^{-2} = 1/i^2 = -1 = i^2$,

A hatványok száma

Kérdés

Hány hatványa van egy nem nulla komplex számnak?

Példák

Az 1 minden hatványa 1, azaz 1 darab hatványa van.
A -1 hatványai 1 és -1, azaz 2 darab hatványa van.
Az i hatványai i, -1, $-i$, 1,

$i^1 = i,\ \ i^2 = -1,\ \ i^3 = -i,\ \ i^4 = 1,\ \ i^5 = i = i^1,\ \ i^6 = -1 = i^2$, stb.
Nempozitív kitevőkre: $i^0 = 1 = i^4, \quad i^{-1} = 1/i = -i = i^3,$
$i^{-2} = 1/i^2 = -1 = i^2, \quad i^{-3} = 1/i^3 = i = i^1.$

A hatványok száma

Kérdés

Hány hatványa van egy nem nulla komplex számnak?

Példák

Az 1 minden hatványa 1, azaz 1 darab hatványa van.
A -1 hatványai 1 és -1, azaz 2 darab hatványa van.
Az i hatványai i, -1, $-i$, 1,

$i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i = i^1$, $i^6 = -1 = i^2$, stb.
Nempozitív kitevőkre: $i^0 = 1 = i^4$, $i^{-1} = 1/i = -i = i^3$,
$i^{-2} = 1/i^2 = -1 = i^2$, $i^{-3} = 1/i^3 = i = i^1$.

A hatványok periódikusan ismétlődnek:

A hatványok száma

Kérdés

Hány hatványa van egy nem nulla komplex számnak?

Példák

Az 1 minden hatványa 1, azaz 1 darab hatványa van.
A -1 hatványai 1 és -1, azaz 2 darab hatványa van.
Az i hatványai i, -1, $-i$, 1,

$i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i = i^1$, $i^6 = -1 = i^2$, stb.
Nempozitív kitevőkre: $i^0 = 1 = i^4$, $i^{-1} = 1/i = -i = i^3$,
$i^{-2} = 1/i^2 = -1 = i^2$, $i^{-3} = 1/i^3 = i = i^1$.

A hatványok periódikusan ismétlődnek:
Ha a k egész szám 4-gyel való osztási maradéka
akkor i^k értéke rendre

A hatványok száma

Kérdés

Hány hatványa van egy nem nulla komplex számnak?

Példák

Az 1 minden hatványa 1, azaz 1 darab hatványa van.
A -1 hatványai 1 és -1, azaz 2 darab hatványa van.
Az i hatványai i, -1, $-i$, 1,

$i^1 = i,\ i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1,\ i^5 = i = i^1,\ i^6 = -1 = i^2$, stb.
Nempozitív kitevőkre: $i^0 = 1 = i^4, \quad i^{-1} = 1/i = -i = i^3$,
$i^{-2} = 1/i^2 = -1 = i^2, \quad i^{-3} = 1/i^3 = i = i^1$.

A hatványok periódikusan ismétlődnek:
Ha a k egész szám 4-gyel való osztási maradéka 1,
akkor i^k értéke rendre i,

A hatványok száma

Kérdés

Hány hatványa van egy nem nulla komplex számnak?

Példák

Az 1 minden hatványa 1, azaz 1 darab hatványa van.
A -1 hatványai 1 és -1, azaz 2 darab hatványa van.
Az i hatványai i, -1, $-i$, 1,

$i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i = i^1$, $i^6 = -1 = i^2$, stb.
Nempozitív kitevőkre: $i^0 = 1 = i^4$, $i^{-1} = 1/i = -i = i^3$,
$i^{-2} = 1/i^2 = -1 = i^2$, $i^{-3} = 1/i^3 = i = i^1$.

A hatványok periódikusan ismétlődnek:
Ha a k egész szám 4-gyel való osztási maradéka 1, 2,
akkor i^k értéke rendre i, -1,

A hatványok száma

Kérdés

Hány hatványa van egy nem nulla komplex számnak?

Példák

Az 1 minden hatványa 1, azaz 1 darab hatványa van.
A -1 hatványai 1 és -1, azaz 2 darab hatványa van.
Az i hatványai i, -1, $-i$, 1,

$i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i = i^1$, $i^6 = -1 = i^2$, stb.
Nempozitív kitevőkre: $i^0 = 1 = i^4$, $i^{-1} = 1/i = -i = i^3$,
$i^{-2} = 1/i^2 = -1 = i^2$, $i^{-3} = 1/i^3 = i = i^1$.

A hatványok periódikusan ismétlődnek:
Ha a k egész szám 4-gyel való osztási maradéka 1, 2, 3,
akkor i^k értéke rendre i, -1, $-i$,

A hatványok száma

Kérdés

Hány hatványa van egy nem nulla komplex számnak?

Példák

Az 1 minden hatványa 1, azaz 1 darab hatványa van.
A -1 hatványai 1 és -1, azaz 2 darab hatványa van.
Az i hatványai i, -1, $-i$, 1,

$i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i = i^1$, $i^6 = -1 = i^2$, stb.
Nempozitív kitevőkre: $i^0 = 1 = i^4$, $i^{-1} = 1/i = -i = i^3$, $i^{-2} = 1/i^2 = -1 = i^2$, $i^{-3} = 1/i^3 = i = i^1$.

A hatványok periódikusan ismétlődnek:
Ha a k egész szám 4-gyel való osztási maradéka 1, 2, 3, 0, akkor i^k értéke rendre i, -1, $-i$, 1.

A hatványok száma

Kérdés

Hány hatványa van egy nem nulla komplex számnak?

Példák

Az 1 minden hatványa 1, azaz 1 darab hatványa van.
A -1 hatványai 1 és -1, azaz 2 darab hatványa van.
Az i hatványai i, -1, $-i$, 1, azaz 4 darab hatványa van.

$i^1 = i,\ \ i^2 = -1,\ \ i^3 = -i,\ \ i^4 = 1,\ \ i^5 = i = i^1,\ \ i^6 = -1 = i^2$, stb.
Nempozitív kitevőkre: $i^0 = 1 = i^4, \quad i^{-1} = 1/i = -i = i^3,$
$i^{-2} = 1/i^2 = -1 = i^2, \quad i^{-3} = 1/i^3 = i = i^1.$

A hatványok periódikusan ismétlődnek:
Ha a k egész szám 4-gyel való osztási maradéka $1,\ 2,\ 3,\ 0$, akkor i^k értéke rendre $i,\ -1,\ -i,\ 1$.

További példák a hatványok számára

A 2 szám minden egész kitevőjű hatványa különböző.

További példák a hatványok számára

A 2 szám minden egész kitevőjű hatványa különböző.
Indoklás: $\ldots < 2^{-2} < 2^{-1} < 2^0 < 2^1 < 2^2 < \ldots$.

További példák a hatványok számára

A 2 szám minden egész kitevőjű hatványa különböző.
Indoklás: $\ldots < 2^{-2} < 2^{-1} < 2^0 < 2^1 < 2^2 < \ldots$.

A $2i$ minden egész kitevőjű hatványa különböző.

További példák a hatványok számára

A 2 szám minden egész kitevőjű hatványa különböző.
Indoklás: $\ldots < 2^{-2} < 2^{-1} < 2^0 < 2^1 < 2^2 < \ldots$.

A $2i$ minden egész kitevőjű hatványa különböző.
Indoklás: $|2i|^k = 2^k$ is páronként különböző.

További példák a hatványok számára

A 2 szám minden egész kitevőjű hatványa különböző.
Indoklás: $\ldots < 2^{-2} < 2^{-1} < 2^{0} < 2^{1} < 2^{2} < \ldots$.

A $2i$ minden egész kitevőjű hatványa különböző.
Indoklás: $|2i|^k = 2^k$ is páronként különböző.

A $\cos(\sqrt{2}\cdot 2\pi) + i\sin(\sqrt{2}\cdot 2\pi)$ bármely két hatványa különböző.

További példák a hatványok számára

A 2 szám minden egész kitevőjű hatványa különböző.
Indoklás: $\ldots < 2^{-2} < 2^{-1} < 2^0 < 2^1 < 2^2 < \ldots$.

A $2i$ minden egész kitevőjű hatványa különböző.
Indoklás: $|2i|^k = 2^k$ is páronként különböző.

A $\cos(\sqrt{2}\cdot 2\pi) + i\sin(\sqrt{2}\cdot 2\pi)$ bármely két hatványa különböző.
Indoklás: ha $n \neq m$ esetén igaz lenne, hogy
$\left(\cos(\sqrt{2}\cdot 2\pi)+i\sin(\sqrt{2}\cdot 2\pi)\right)^n = \left(\cos(\sqrt{2}\cdot 2\pi)+i\sin(\sqrt{2}\cdot 2\pi)\right)^m$,

További példák a hatványok számára

A 2 szám minden egész kitevőjű hatványa különböző.
Indoklás: $\ldots < 2^{-2} < 2^{-1} < 2^0 < 2^1 < 2^2 < \ldots$.

A $2i$ minden egész kitevőjű hatványa különböző.
Indoklás: $|2i|^k = 2^k$ is páronként különböző.

A $\cos(\sqrt{2}\cdot 2\pi) + i\sin(\sqrt{2}\cdot 2\pi)$ bármely két hatványa különböző.
Indoklás: ha $n \neq m$ esetén igaz lenne, hogy
$\left(\cos(\sqrt{2}\cdot 2\pi)+i\sin(\sqrt{2}\cdot 2\pi)\right)^n = \left(\cos(\sqrt{2}\cdot 2\pi)+i\sin(\sqrt{2}\cdot 2\pi)\right)^m$,
akkor $n\sqrt{2}\cdot 2\pi - m\sqrt{2}\cdot 2\pi = k\cdot 2\pi$ (k egész).

További példák a hatványok számára

A 2 szám minden egész kitevőjű hatványa különböző.
Indoklás: $\ldots < 2^{-2} < 2^{-1} < 2^{0} < 2^{1} < 2^{2} < \ldots$.

A $2i$ minden egész kitevőjű hatványa különböző.
Indoklás: $|2i|^k = 2^k$ is páronként különböző.

A $\cos(\sqrt{2}\cdot 2\pi) + i\sin(\sqrt{2}\cdot 2\pi)$ bármely két hatványa különböző.
Indoklás: ha $n \neq m$ esetén igaz lenne, hogy
$\left(\cos(\sqrt{2}\cdot 2\pi)+i\sin(\sqrt{2}\cdot 2\pi)\right)^n = \left(\cos(\sqrt{2}\cdot 2\pi)+i\sin(\sqrt{2}\cdot 2\pi)\right)^m$,
akkor $n\sqrt{2}\cdot 2\pi - m\sqrt{2}\cdot 2\pi = k\cdot 2\pi$ (k egész). Innen

$$\sqrt{2} = \frac{k}{n-m}.$$

További példák a hatványok számára

A 2 szám minden egész kitevőjű hatványa különböző.
Indoklás: $\ldots < 2^{-2} < 2^{-1} < 2^0 < 2^1 < 2^2 < \ldots$.

A $2i$ minden egész kitevőjű hatványa különböző.
Indoklás: $|2i|^k = 2^k$ is páronként különböző.

A $\cos(\sqrt{2}\cdot 2\pi) + i\sin(\sqrt{2}\cdot 2\pi)$ bármely két hatványa különböző.
Indoklás: ha $n \neq m$ esetén igaz lenne, hogy
$\big(\cos(\sqrt{2}\cdot 2\pi)+i\sin(\sqrt{2}\cdot 2\pi)\big)^n = \big(\cos(\sqrt{2}\cdot 2\pi)+i\sin(\sqrt{2}\cdot 2\pi)\big)^m$,
akkor $n\sqrt{2}\cdot 2\pi - m\sqrt{2}\cdot 2\pi = k\cdot 2\pi$ (k egész). Innen
$\sqrt{2} = \dfrac{k}{n-m}$. Ez ellentmond annak, hogy $\sqrt{2}$ irracionális szám.

További példák a hatványok számára

A 2 szám minden egész kitevőjű hatványa különböző.
Indoklás: $\ldots < 2^{-2} < 2^{-1} < 2^{0} < 2^{1} < 2^{2} < \ldots$.

A $2i$ minden egész kitevőjű hatványa különböző.
Indoklás: $|2i|^k = 2^k$ is páronként különböző.

A $\cos(\sqrt{2}\cdot 2\pi) + i\sin(\sqrt{2}\cdot 2\pi)$ bármely két hatványa különböző.
Indoklás: ha $n \neq m$ esetén igaz lenne, hogy
$\left(\cos(\sqrt{2}\cdot 2\pi)+i\sin(\sqrt{2}\cdot 2\pi)\right)^n = \left(\cos(\sqrt{2}\cdot 2\pi)+i\sin(\sqrt{2}\cdot 2\pi)\right)^m$,
akkor $n\sqrt{2}\cdot 2\pi - m\sqrt{2}\cdot 2\pi = k\cdot 2\pi$ (k egész). Innen
$\sqrt{2} = \dfrac{k}{n-m}$. Ez ellentmond annak, hogy $\sqrt{2}$ irracionális szám.

Indirekt bizonyítás:

További példák a hatványok számára

A 2 szám minden egész kitevőjű hatványa különböző.
Indoklás: $\ldots < 2^{-2} < 2^{-1} < 2^0 < 2^1 < 2^2 < \ldots$.

A $2i$ minden egész kitevőjű hatványa különböző.
Indoklás: $|2i|^k = 2^k$ is páronként különböző.

A $\cos(\sqrt{2}\cdot 2\pi) + i\sin(\sqrt{2}\cdot 2\pi)$ bármely két hatványa különböző.
Indoklás: ha $n \neq m$ esetén igaz lenne, hogy
$\left(\cos(\sqrt{2}\cdot 2\pi)+i\sin(\sqrt{2}\cdot 2\pi)\right)^n = \left(\cos(\sqrt{2}\cdot 2\pi)+i\sin(\sqrt{2}\cdot 2\pi)\right)^m$,
akkor $n\sqrt{2}\cdot 2\pi - m\sqrt{2}\cdot 2\pi = k\cdot 2\pi$ (k egész). Innen
$\sqrt{2} = \dfrac{k}{n-m}$. Ez ellentmond annak, hogy $\sqrt{2}$ irracionális szám.

Indirekt bizonyítás: feltettük, hogy az állítás nem igaz,

További példák a hatványok számára

A 2 szám minden egész kitevőjű hatványa különböző.
Indoklás: $\ldots < 2^{-2} < 2^{-1} < 2^{0} < 2^{1} < 2^{2} < \ldots$.

A $2i$ minden egész kitevőjű hatványa különböző.
Indoklás: $|2i|^k = 2^k$ is páronként különböző.

A $\cos(\sqrt{2}\cdot 2\pi) + i\sin(\sqrt{2}\cdot 2\pi)$ bármely két hatványa különböző.
Indoklás: ha $n \neq m$ esetén igaz lenne, hogy
$\big(\cos(\sqrt{2}\cdot 2\pi)+i\sin(\sqrt{2}\cdot 2\pi)\big)^n = \big(\cos(\sqrt{2}\cdot 2\pi)+i\sin(\sqrt{2}\cdot 2\pi)\big)^m$,
akkor $n\sqrt{2}\cdot 2\pi - m\sqrt{2}\cdot 2\pi = k\cdot 2\pi$ (k egész). Innen
$\sqrt{2} = \dfrac{k}{n-m}$. Ez ellentmond annak, hogy $\sqrt{2}$ irracionális szám.

Indirekt bizonyítás: feltettük, hogy az állítás nem igaz,
és ellentmondásra jutottunk.

A hatványok száma mikor véges?

Sejtés (az eddigi példák alapján):

A hatványok száma mikor véges?

Sejtés (az eddigi példák alapján):

Ha egy nem nulla komplex számnak az abszolút értéke nem 1,

A hatványok száma mikor véges?

Sejtés (az eddigi példák alapján):

Ha egy nem nulla komplex számnak az abszolút értéke nem 1, vagy a szöge a 2π-nek nem racionális többszöröse,

A hatványok száma mikor véges?

Sejtés (az eddigi példák alapján):

Ha egy nem nulla komplex számnak az abszolút értéke nem 1, vagy a szöge a 2π-nek nem racionális többszöröse, akkor bármely két, egész kitevőjű hatványa különböző.

A hatványok száma mikor véges?

Sejtés (az eddigi példák alapján):

Ha egy nem nulla komplex számnak az abszolút értéke nem 1, vagy a szöge a 2π-nek nem racionális többszöröse, akkor bármely két, egész kitevőjű hatványa különböző.

Mik a „kimaradó” számok?

A hatványok száma mikor véges?

Sejtés (az eddigi példák alapján):

Ha egy nem nulla komplex számnak az abszolút értéke nem 1, vagy a szöge a 2π-nek nem racionális többszöröse, akkor bármely két, egész kitevőjű hatványa különböző.

Mik a „kimaradó” számok?
Abszolút értékük 1,

A hatványok száma mikor véges?

Sejtés (az eddigi példák alapján):

Ha egy nem nulla komplex számnak az abszolút értéke nem 1, vagy a szöge a 2π-nek nem racionális többszöröse, akkor bármely két, egész kitevőjű hatványa különböző.

Mik a „kimaradó” számok?
Abszolút értékük 1, szögük $(k/n) \cdot 2\pi$.

A hatványok száma mikor véges?

Sejtés (az eddigi példák alapján):

Ha egy nem nulla komplex számnak az abszolút értéke nem 1, vagy a szöge a 2π-nek nem racionális többszöröse, akkor bármely két, egész kitevőjű hatványa különböző.

Mik a „kimaradó” számok?
Abszolút értékük 1, szögük $(k/n) \cdot 2\pi$. Tehát a szám $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$,

A hatványok száma mikor véges?

Sejtés (az eddigi példák alapján):

Ha egy nem nulla komplex számnak az abszolút értéke nem 1, vagy a szöge a 2π-nek nem racionális többszöröse, akkor bármely két, egész kitevőjű hatványa különböző.

Mik a „kimaradó” számok?
Abszolút értékük 1, szögük $(k/n) \cdot 2\pi$. Tehát a szám $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$, azaz egységgyök.

A hatványok száma mikor véges?

Sejtés (az eddigi példák alapján):

Ha egy nem nulla komplex számnak az abszolút értéke nem 1, vagy a szöge a 2π-nek nem racionális többszöröse, akkor bármely két, egész kitevőjű hatványa különböző.

Mik a „kimaradó” számok?
Abszolút értékük 1, szögük $(k/n) \cdot 2\pi$. Tehát a szám $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$, azaz egységgyök.

Tétel

Legyen $z \neq 0$ tetszőleges komplex szám.

A hatványok száma mikor véges?

Sejtés (az eddigi példák alapján):

Ha egy nem nulla komplex számnak az abszolút értéke nem 1, vagy a szöge a 2π-nek nem racionális többszöröse, akkor bármely két, egész kitevőjű hatványa különböző.

Mik a „kimaradó” számok?
Abszolút értékük 1, szögük $(k/n) \cdot 2\pi$. Tehát a szám $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$, azaz egységgyök.

Tétel

Legyen $z \neq 0$ tetszőleges komplex szám.
Ha z egységgyök, akkor hatványai periódikusan ismétlődnek.

A hatványok száma mikor véges?

Sejtés (az eddigi példák alapján):

Ha egy nem nulla komplex számnak az abszolút értéke nem 1, vagy a szöge a 2π-nek nem racionális többszöröse, akkor bármely két, egész kitevőjű hatványa különböző.

Mik a „kimaradó” számok?
Abszolút értékük 1, szögük $(k/n) \cdot 2\pi$. Tehát a szám $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$, azaz egységgyök.

Tétel

Legyen $z \neq 0$ tetszőleges komplex szám.
Ha z egységgyök, akkor hatványai periódikusan ismétlődnek.
Ha z nem egységgyök, akkor z-nek bármely két, egész kitevőjű hatványa különböző.

A hatványok száma mikor véges?

Sejtés (az eddigi példák alapján):

Ha egy nem nulla komplex számnak az abszolút értéke nem 1, vagy a szöge a 2π-nek nem racionális többszöröse, akkor bármely két, egész kitevőjű hatványa különböző.

Mik a „kimaradó” számok?
Abszolút értékük 1, szögük $(k/n) \cdot 2\pi$. Tehát a szám $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$, azaz egységgyök.

Tétel

Legyen $z \neq 0$ tetszőleges komplex szám.
Ha z egységgyök, akkor hatványai periódikusan ismétlődnek.
Ha z nem egységgyök, akkor z-nek bármely két, egész kitevőjű hatványa különböző.

Bizonyítás a következő előadáson.

Komplex szám rendje

Definíció

Egy $z \neq 0$ komplex szám rendje a különböző, egész kitevőjű hatványainak a száma.

Komplex szám rendje

Definíció

Egy $z \neq 0$ komplex szám **rendje** a különböző, egész kitevőjű hatványainak a száma. Jele $o(z)$.

Komplex szám rendje

Definíció

Egy $z \neq 0$ komplex szám rendje a különböző, egész kitevőjű hatványainak a száma. Jele $o(z)$.
Ez vagy pozitív egész szám,

Komplex szám rendje

Definíció

Egy $z \neq 0$ komplex szám rendje a különböző, egész kitevőjű hatványainak a száma. Jele $o(z)$.
Ez vagy pozitív egész szám, vagy a ∞ (végtelen) szimbólum.

Komplex szám rendje

Definíció

Egy $z \neq 0$ komplex szám rendje a különböző, egész kitevőjű hatványainak a száma. Jele $o(z)$.
Ez vagy pozitív egész szám, vagy a ∞ (végtelen) szimbólum.

Példák

Komplex szám rendje

Definíció

Egy $z \neq 0$ komplex szám rendje a különböző, egész kitevőjű hatványainak a száma. Jele $o(z)$.
Ez vagy pozitív egész szám, vagy a ∞ (végtelen) szimbólum.

Példák

$o(2)$

Komplex szám rendje

Definíció

Egy $z \neq 0$ komplex szám rendje a különböző, egész kitevőjű hatványainak a száma. Jele $o(z)$.
Ez vagy pozitív egész szám, vagy a ∞ (végtelen) szimbólum.

Példák

$o(2) = \infty$.

Komplex szám rendje

Definíció

Egy $z \neq 0$ komplex szám rendje a különböző, egész kitevőjű hatványainak a száma. Jele $o(z)$.
Ez vagy pozitív egész szám, vagy a ∞ (végtelen) szimbólum.

Példák

$o(2) = \infty$. $o(2i)$

Komplex szám rendje

Definíció

Egy $z \neq 0$ komplex szám rendje a különböző, egész kitevőjű hatványainak a száma. Jele $o(z)$.
Ez vagy pozitív egész szám, vagy a ∞ (végtelen) szimbólum.

Példák

$o(2) = \infty$. $o(2i) = \infty$.

Komplex szám rendje

Definíció

Egy $z \neq 0$ komplex szám rendje a különböző, egész kitevőjű hatványainak a száma. Jele $o(z)$.
Ez vagy pozitív egész szám, vagy a ∞ (végtelen) szimbólum.

Példák

$o(2) = \infty$. $o(2i) = \infty$. $o\big(\cos(\sqrt{2} \cdot 2\pi) + i \sin(\sqrt{2} \cdot 2\pi)\big)$

Komplex szám rendje

Definíció

Egy $z \neq 0$ komplex szám rendje a különböző, egész kitevőjű hatványainak a száma. Jele $o(z)$.
Ez vagy pozitív egész szám, vagy a ∞ (végtelen) szimbólum.

Példák

$o(2) = \infty$. $o(2i) = \infty$. $o\big(\cos(\sqrt{2} \cdot 2\pi) + i \sin(\sqrt{2} \cdot 2\pi)\big) = \infty$.

Komplex szám rendje

Definíció

Egy $z \neq 0$ komplex szám **rendje** a különböző, egész kitevőjű hatványainak a száma. Jele $o(z)$.
Ez vagy pozitív egész szám, vagy a ∞ (végtelen) szimbólum.

Példák

$o(2) = \infty$. $o(2i) = \infty$. $o\big(\cos(\sqrt{2} \cdot 2\pi) + i \sin(\sqrt{2} \cdot 2\pi)\big) = \infty$.
$o(1)$

Komplex szám rendje

Definíció

Egy $z \neq 0$ komplex szám **rendje** a különböző, egész kitevőjű hatványainak a száma. Jele $o(z)$.
Ez vagy pozitív egész szám, vagy a ∞ (végtelen) szimbólum.

Példák

$o(2) = \infty$. $o(2i) = \infty$. $o\big(\cos(\sqrt{2} \cdot 2\pi) + i \sin(\sqrt{2} \cdot 2\pi)\big) = \infty$.
$o(1) = 1$,

Komplex szám rendje

Definíció

Egy $z \neq 0$ komplex szám **rendje** a különböző, egész kitevőjű hatványainak a száma. Jele $o(z)$.
Ez vagy pozitív egész szám, vagy a ∞ (végtelen) szimbólum.

Példák

$o(2) = \infty$. $o(2i) = \infty$. $o\big(\cos(\sqrt{2} \cdot 2\pi) + i\sin(\sqrt{2} \cdot 2\pi)\big) = \infty$.
$o(1) = 1$, $o(-1)$

Komplex szám rendje

Definíció

Egy $z \neq 0$ komplex szám **rendje** a különböző, egész kitevőjű hatványainak a száma. Jele $o(z)$.
Ez vagy pozitív egész szám, vagy a ∞ (végtelen) szimbólum.

Példák

$o(2) = \infty$. $o(2i) = \infty$. $o\big(\cos(\sqrt{2} \cdot 2\pi) + i \sin(\sqrt{2} \cdot 2\pi)\big) = \infty$.
$o(1) = 1$, $o(-1) = 2$,

Komplex szám rendje

Definíció

Egy $z \neq 0$ komplex szám **rendje** a különböző, egész kitevőjű hatványainak a száma. Jele $o(z)$.
Ez vagy pozitív egész szám, vagy a ∞ (végtelen) szimbólum.

Példák

$o(2) = \infty$. $o(2i) = \infty$. $o\big(\cos(\sqrt{2} \cdot 2\pi) + i\sin(\sqrt{2} \cdot 2\pi)\big) = \infty$.
$o(1) = 1$, $o(-1) = 2$, $o(i)$

Komplex szám rendje

Definíció

Egy $z \neq 0$ komplex szám rendje a különböző, egész kitevőjű hatványainak a száma. Jele $o(z)$.
Ez vagy pozitív egész szám, vagy a ∞ (végtelen) szimbólum.

Példák

$o(2) = \infty$. $o(2i) = \infty$. $o\big(\cos(\sqrt{2} \cdot 2\pi) + i \sin(\sqrt{2} \cdot 2\pi)\big) = \infty$.
$o(1) = 1$, $o(-1) = 2$, $o(i) = 4$.

Komplex szám rendje

Definíció

Egy $z \neq 0$ komplex szám rendje a különböző, egész kitevőjű hatványainak a száma. Jele $o(z)$.
Ez vagy pozitív egész szám, vagy a ∞ (végtelen) szimbólum.

Példák

$o(2) = \infty$. $o(2i) = \infty$. $o\big(\cos(\sqrt{2} \cdot 2\pi) + i \sin(\sqrt{2} \cdot 2\pi)\big) = \infty$.
$o(1) = 1$, $o(-1) = 2$, $o(i) = 4$.

Kérdés (a szünetre):

Egységgyök-e $\cos 336^\circ + i \sin 336^\circ$?

Komplex szám rendje

Definíció

Egy $z \neq 0$ komplex szám rendje a különböző, egész kitevőjű hatványainak a száma. Jele $o(z)$.
Ez vagy pozitív egész szám, vagy a ∞ (végtelen) szimbólum.

Példák

$o(2) = \infty.\ \ o(2i) = \infty.\ \ o\big(\cos(\sqrt{2} \cdot 2\pi) + i \sin(\sqrt{2} \cdot 2\pi)\big) = \infty.$
$o(1) = 1,\ \ o(-1) = 2,\ \ o(i) = 4.$

Kérdés (a szünetre):

Egységgyök-e $\cos 336^\circ + i \sin 336^\circ$?
Hányadik?

Komplex szám rendje

Definíció

Egy $z \neq 0$ komplex szám rendje a különböző, egész kitevőjű hatványainak a száma. Jele $o(z)$.
Ez vagy pozitív egész szám, vagy a ∞ (végtelen) szimbólum.

Példák

$o(2) = \infty$. $o(2i) = \infty$. $o\big(\cos(\sqrt{2} \cdot 2\pi) + i \sin(\sqrt{2} \cdot 2\pi)\big) = \infty$.
$o(1) = 1$, $o(-1) = 2$, $o(i) = 4$.

Kérdés (a szünetre):

Egységgyök-e $\cos 336^\circ + i \sin 336^\circ$?
Hányadik? Mennyi a rendje?